# 光円錐ゲージでの開弦の量子化

光円錐ゲージを使った開弦の量子化を行います。交換関係の設定までを見ていきます。前半は古典論での話をしています。
ゲージ固定に関する背景には触れていません。

古典論での粒子の記述を弦に置き換えていたように、粒子の量子化をそのまま弦に使います。なので、量子力学での正準量子化を弦に当てはめてやります。そのために、古典的な状況をまとめておきます。
$X^\mu$ の共役な量は

$$P^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \quad (\dot{X}^\mu = \frac{\partial}{\partial \tau} X^\mu)$$
$$P^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \quad (X^{\mu\prime} = \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\mu)$$

$\tau$ を時間と見なして $P^\tau_\mu$ を正準共役な量だとします。ラグランジアンは扱い易いのでポリヤコフ作用として

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} T_0 \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

共形ゲージ

$$g_{ij} = g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を取った

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} T_0 (-\dot{X}^2 + X'^2)$$

この形を使います。このときの正準共役量 $\Pi_\mu = P^\tau_\mu$ は

$$\Pi_\mu = P^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = T_0 \dot{X}_\mu \tag{1}$$

ここから $P^\sigma_\mu$ は出てこないので、$\Pi_\mu = P^\tau_\mu$ としていきます。これを使ってラグランジアンを書き換えると

$$\mathcal{L} = T_0 \dot{X}^2 - \frac{1}{2} T_0 (\dot{X}^2 + X'^2) = \Pi \cdot \dot{X} - \frac{1}{2T_0} (\Pi^2 + T_0^2 X'^2)$$

これからハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \Pi \cdot \dot{X} - \mathcal{L} = \frac{1}{2T_0} (\Pi^2 + T_0^2 X'^2)$$

ハミルトニアンと言ってきましたが、正確にはハミルトニアン密度なのでハミルトニアンは $\sigma$ 積分して

$$H = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{H} = \frac{1}{2T_0} \int_0^\pi d\sigma (\Pi^2 + T_0^2 X'^2)$$

開弦なので $\sigma$ の範囲は $0 \sim \pi$ とします。

正準形式を作るためにポアソン括弧を計算します。同じ $\tau$ での正準共役な $X^\mu$ と $\Pi_\mu$ によるポアソン括弧は

$$
\begin{aligned}
\{X^\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma_1)\}_{PB} &= \int_0^\pi d\sigma_2 \Big(\frac{\partial X^\mu(\sigma)}{\partial X^\alpha(\sigma_2)}\frac{\partial X^\nu(\sigma_1)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_2)} - \frac{\partial X^\mu(\sigma)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_2)}\frac{\partial X^\nu(\sigma_1)}{\partial X^\alpha(\sigma_2)}\Big) = 0 \\
\{\Pi^\mu(\tau,\sigma), \Pi^\nu(\tau,\sigma_1)\}_{PB} &= \int_0^\pi d\sigma_2 \Big(\frac{\partial \Pi^\mu(\sigma)}{\partial X^\alpha(\sigma_2)}\frac{\partial \Pi^\nu(\sigma_1)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_2)} - \frac{\partial \Pi^\mu(\sigma)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_2)}\frac{\partial \Pi^\nu(\sigma_1)}{\partial X^\alpha(\sigma_2)}\Big) = 0 \\
\{X^\mu(\tau,\sigma), \Pi^\nu(\tau,\sigma_1)\}_{PB} &= \int_0^\pi d\sigma_2 \Big(\frac{\partial X^\mu(\sigma)}{\partial X^\alpha(\sigma_2)}\frac{\partial \Pi^\nu(\sigma_1)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_2)} - \frac{\partial X^\mu(\sigma)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_2)}\frac{\partial \Pi^\nu(\sigma_1)}{\partial X^\alpha(\sigma_2)}\Big) = \eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma_1)
\end{aligned}
$$

$\tau$ は同じなのでポアソン括弧内で $\tau$ を省いて書いています。$X_\mu$ とハミルトニアン $H$ でのポアソン括弧は

$$
\begin{aligned}
\{X_\mu(\tau,\sigma), H\}_{PB} &= \frac{1}{2T_0}\int_0^\pi d\sigma_1 d\sigma_2 \Big(\frac{\partial X_\mu(\sigma)}{\partial X^\alpha(\sigma_1)}\frac{\partial \mathcal{H}(\sigma_2)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_1)} - \frac{\partial X_\mu(\sigma)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_1)}\frac{\partial \mathcal{H}(\sigma_2)}{\partial X^\alpha(\sigma_1)}\Big) \\
&= \frac{1}{2T_0}\int_0^\pi d\sigma_2 (2\Pi_\mu \delta(\sigma_2-\sigma)) \\
&= \frac{1}{T_0}\Pi_\mu \\
&= \dot{X}_\mu
\end{aligned}
$$

となってポアソン括弧による正準方程式になります。$\Pi_\mu$ とでも同様で、自由端条件

$$
\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}|_{\sigma=0} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}|_{\sigma=\pi} = 0
$$

を使うと

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_\mu = \{\Pi_\mu(\tau,\sigma), H\}_{PB} &= \frac{1}{2T_0}\int_0^\pi d\sigma_1 d\sigma_2 \Big(\frac{\partial \Pi_\mu(\sigma)}{\partial X^\alpha(\sigma_1)}\frac{\partial \mathcal{H}(\sigma_2)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_1)} - \frac{\partial \Pi_\mu(\sigma)}{\partial \Pi_\alpha(\sigma_1)}\frac{\partial \mathcal{H}(\sigma_2)}{\partial X^\alpha(\sigma_1)}\Big) \\
&= -\frac{T_0}{2}\frac{\partial}{\partial X^\mu(\sigma)}\int_0^\pi d\sigma_2 \frac{\partial X_\alpha(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\frac{\partial X^\alpha(\sigma_2)}{\partial \sigma_2} \\
&= -\frac{T_0}{2}\int_0^\pi d\sigma_2 \Big((\frac{\partial}{\partial \sigma_2}\frac{\partial X_\alpha(\sigma_2)}{\partial X^\mu(\sigma)})\frac{\partial X^\alpha(\sigma_2)}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial X_\alpha(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\frac{\partial}{\partial \sigma_2}\frac{\partial X^\alpha(\sigma_2)}{\partial X^\mu(\sigma)}\Big) \\
&= -\frac{T_0}{2}\int_0^\pi d\sigma_2 \Big((\frac{\partial}{\partial \sigma_2}\delta(\sigma_2-\sigma))\frac{\partial X_\mu(\sigma_2)}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial X_\mu(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\frac{\partial}{\partial \sigma_2}\delta(\sigma_2-\sigma)\Big) \\
&= T_0\int_0^\pi d\sigma_2 \delta(\sigma_2-\sigma)\frac{\partial}{\partial \sigma_2}\frac{\partial X_\mu(\sigma_2)}{\partial \sigma_2} \\
&= T_0\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial X_\mu(\sigma)}{\partial \sigma}
\end{aligned}
$$

これらの $X_\mu$ と $\Pi_\mu$ の正準方程式から

$$T_0 \frac{\partial}{\partial \tau}\dot{X}_\mu - \dot{\Pi}_\mu = 0$$

$$\frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \sigma^2} = 0$$

が出てきます。

古典的なポアソン括弧が通常通りなのが分かったので、何も考えなければ $X_\mu$ と $\Pi_\mu$ を演算子化してポアソン括弧を交換関係に置き換えて終了です。しかし、ゲージ場と同じように拘束系であるので、ゲージ固定を考慮しなければいけません。ここでは、ゲージ固定を完全にするために光円錐座標に持っていって、光円錐ゲージで量子化の手続きをします。光円錐ゲージの良い所は、ゲージ自由度があるときの量子化に付随するゴーストが出てこない点です。このため、拘束系での事情を後回しにして話を進められます。欠点は見ていけば分かりますが、ローレンツ不変性が明確に保たれている形になっていない点です。

量子化する前に光円錐座標での正準形式を見ておきます。$D = d + 1$ 次元光円錐座標

$$X^\mu = (X^+, X^-, X^2, \ldots, X^d)$$

$$X^+ = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}}\ ,\ X^+ = \frac{X^0 - X^1}{\sqrt{2}}$$

を使い、$X^2, \ldots, X^d$ は $X^I\ (I = 2, 3, \ldots, d)$ とし、計量は

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

添え字の上げ下げは

$$a_+ = -a^-\ ,\ a_- = -a^+\ ,\ a_I = a^I$$

そして、光円錐ゲージを取るので $X^+$ と $p^+$ はパラメータの条件によって

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$$

$$p^+ \sigma = \pi \int_0^\sigma d\sigma' \Pi^+(\tau, \sigma')$$

拘束条件は

$$4\alpha' p^+ \dot{X}^- = (\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2$$

$$2\alpha' p^+ X^{-\prime} = \dot{X}^I \cdot X^{I\prime}$$

これらを使ってポルヤコフ作用のラグランジアンとハミルトニアンを光円錐座標にします。ラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& -\frac{1}{2}T_0\big(-\dot{X}^2+X'^2\big)\\
=& -\frac{1}{2}T_0\big(-\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\nu}{\partial\tau}+\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma}\big)\\
=& -\frac{1}{2}T_0\big(-2\eta_{+-}\frac{\partial X^+}{\partial\tau}\frac{\partial X^-}{\partial\tau}+\eta_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial\tau}\frac{\partial X^J}{\partial\tau}+\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma}\big)\\
=& -\frac{1}{2}T_0\big(-2\eta_{+-}\frac{\partial X^+}{\partial\tau}\frac{\partial X^-}{\partial\tau}-\eta_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial\tau}\frac{\partial X^J}{\partial\tau}+2\eta_{+-}\frac{\partial X^+}{\partial\sigma}\frac{\partial X^-}{\partial\sigma}+\eta_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial\sigma}\frac{\partial X^J}{\partial\sigma}\big)\\
=& -T_0(\dot{X}^+\dot{X}^- - X^{+\prime}X^{-\prime})+\frac{1}{2}T_0\big(\frac{\partial X^I}{\partial\tau}\frac{\partial X^I}{\partial\tau}-\frac{\partial X^I}{\partial\sigma}\frac{\partial X^I}{\partial\sigma}\big)
\end{aligned}
$$

$I$ 成分の内積は

$$
\eta_{IJ}A^IA^J = A^IA^I = (A^I)^2
$$

のように書いています。パラメータの条件による $X^{+\prime}=0$ から

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& -T_0\dot{X}^+\dot{X}^- + \frac{1}{2}T_0\big(\dot{X}^I\dot{X}^I - X^{I\prime}X^{I\prime}\big)\\
=& -2\alpha' T_0 p^+\dot{X}^- + \frac{1}{2}T_0\big(\dot{X}^I\dot{X}^I - X^{I\prime}X^{I\prime}\big)\\
=& -\frac{1}{\pi}p^+\dot{X}^- + \frac{1}{2}T_0\big(\dot{X}^I\dot{X}^I - X^{I\prime}X^{I\prime}\big)\\
=& \frac{1}{\pi}p_-\dot{X}^- + \frac{1}{2}T_0\big(\dot{X}^I\dot{X}^I - X^{I\prime}X^{I\prime}\big)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$X^-$ と $X^I$ の正準共役量は

$$
\begin{aligned}
&\Pi_- = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^-} = \frac{1}{\pi}p_- = -\frac{1}{\pi}p^+\\
&\Pi_I = \Pi^I = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^I} = T_0\dot{X}^I
\end{aligned}
$$

これからラグランジアンの変数は $\dot{X}^-,\dot{X}^I,X^{I\prime}$ です。正準共役量とラグランジアンからハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Pi_- \dot{X}^- + \Pi^I \dot{X}^I - \mathcal{L} \\
&= -\frac{1}{\pi} p^+ \dot{X}^- + \Pi^I \dot{X}^I + \frac{1}{\pi} p^+ \dot{X}^- - \frac{1}{2} T_0 (\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I\prime} X^{I\prime}) \\
&= \Pi^I \dot{X}^I - \frac{1}{2} T_0 (\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I\prime} X^{\prime I}) \\
&= \frac{1}{T_0} \Pi^I \Pi^I - \frac{1}{2} T_0 (\frac{1}{T_0^2} \Pi^I \Pi^I - X^{I\prime} X^{I\prime}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} \Pi^I \Pi^I + \frac{1}{2} T_0 X^{I\prime} X^{I\prime} \\
&= \pi \alpha' \Pi^I \Pi^I + \frac{1}{4\pi\alpha'} X^{I\prime} X^{I\prime} \quad (T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'})
\end{aligned} \tag{3}$$

と求まります。また、これの三行目を

$$\mathcal{H} = \Pi^I \dot{X}^I - \frac{1}{2} T_0 (\frac{\partial X^I}{\partial \tau} \frac{\partial X^J}{\partial \tau} - \frac{\partial X^I}{\partial \sigma} \frac{\partial X^J}{\partial \sigma}) = \Pi^I \dot{X}^I - \mathcal{L}(\dot{X}^I, X^{I\prime})$$

となっていると見ることで、ラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} T_0 (\frac{\partial X^I}{\partial \tau} \frac{\partial X^J}{\partial \tau} - \frac{\partial X^I}{\partial \sigma} \frac{\partial X^J}{\partial \sigma})$$

とすることもできます。

この話から $X^-, X^I, p^+, \Pi^I$ が独立変数であることが分かりますが、もう少し制限できます。そのために、運動方程式と拘束条件を見ます。$\dot{X}^-$ は拘束条件から

$$\dot{X}^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} ((\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2)$$

$\Pi^-$ はラグランジアン (2) から

$$\Pi^- = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_-} = -T_0 \frac{\partial}{\partial \dot{X}_-} (\dot{X}^+ \dot{X}^-) = -T_0 \frac{\partial}{\partial \dot{X}_-} (\eta^{+-} \dot{X}_- \dot{X}^-) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^-$$

となっているので、

$$\begin{aligned}
\Pi^- = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{4\alpha' p^+} ((\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{4\alpha' p^+} ((2\pi\alpha')^2 (\Pi^I)^2 + (X^{I\prime})^2) \\
&= \frac{\pi}{2p^+} ((\Pi^I)^2 + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} (X^{I\prime})^2)
\end{aligned}$$

これから、$\Pi^-$ は $p^+, \Pi^I, X^I$ によって決まることが直接分かります。$X^-$ は運動方程式の解を見てみると (「弦のゲージ固定」での $F_0$ を $x_0$ にしてます)

$$X^- = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^- e^{-in\tau}\cos(n\sigma)$$

$\alpha_0^-$ は

$$\alpha_0^- = p^- = \pi\int_0^\pi d\sigma\Pi^-$$

なので、$\Pi^-$ が $p^+, \Pi^I, X^I$ によって決まることから、$X^-$ は $x_0^-$ を与えれば決まります。というわけで、独立変数は $x_0^-, p^+, \Pi^I, X^I$ となります。そうするとポアソン括弧は

$$\{X^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')\}_{PB} = \int_0^\pi d\sigma_1\Big(\frac{\partial X^I(\sigma)}{\partial X^A(\sigma_1)}\frac{\partial\Pi^J(\sigma')}{\partial\Pi^A(\sigma_1)} - \frac{\partial X^I(\sigma)}{\partial\Pi^A(\sigma_1)}\frac{\partial\Pi^J(\sigma')}{\partial X^A(\sigma_1)}\Big) = \eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')$$

$$\{X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')\}_{PB} = \{\Pi^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')\}_{PB} = 0$$

$$\{x_0^-, p^+\}_{PB} = -\{x_0^-, p_-\}_{PB} = -\Big(\frac{\partial x_0^-}{\partial x_0^-}\frac{\partial p_-}{\partial p_-} - \frac{\partial x_0^-}{\partial p_-}\frac{\partial p_-}{\partial x_0^-}\Big) = -1$$

となっています。$X^-$ の正準共役量は $p_-$ なので、$x_0^-$ と $p_-$ でポアソン括弧を作っています。

というわけで、$x_0^-, X^I, p^+, \Pi^I$ を独立変数とし、これらを演算子化して、ポアソン括弧を交換関係にします。これ以降 $x_0^-, X^I, p^+, \Pi^I$ は演算子です。$\tau$ が同じときの交換関係 (同時刻交換関係) を

$$[x_0^-, p^+] = i\eta^{+-} = -i$$

$$[X^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')$$

$$[x_0^-, X^I(\tau,\sigma')] = [x_0^-, \Pi^I(\tau,\sigma')] = [p^+, X^I(\tau,\sigma')] = [p^+, \Pi^I(\tau,\sigma')] = 0$$

$$[X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')] = [\Pi^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')] = 0$$

と設定します (下の補足で共変な形を載せています)。場の概念なんか導入していないので第一量子化です。ここから交換関係は $\tau$ が同じだとして、省いて書きます。例えば、$[X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')] \Rightarrow [X^I(\sigma), X^J(\sigma')]$。

$x_0^-$ と $p^+$ から $\tau$ と $\sigma$ の依存性を外している理由を説明します。古典的には $x_0^-$ は積分定数なので依存性を持たないと考えられますが、シュレーディンガー表示とハイゼンベルグ表示を考えると、演算子として $x_0^-(\tau=0)$ から $x_0^-(\tau)$ に発展していく可能性があります。$p^+$ は古典的に $\sigma$ に依存していないですが、同様に $\tau$ には依存している可能性があります。なので、実際に $\tau$ に依存していないのを見ればいいです。これはハイゼンベルグ方程式

$$\frac{dO}{dt} = -i[O, H]$$

から、ハミルトニアンと交換するかどうかが分かれば良いです。(3) を演算子化したものと $x_0^-$ と $p^+$ を交換関係を使ってハミルトニアンと交換させれば、明らかに交換することが分かります。なので、$x_0^-$ と $p^+$ は $\tau$ に依存していません。これで量子化の手続きは終わりです。後はヒルベルト空間にどのように作用しているかということになります。

今度は交換関係から、$X^I$ の展開係数 $x_0^I, \alpha_n^I$ に対する交換関係を出します。$X_\mu^I$ の解は

$$X^I(\tau,\sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau}\cos(n\sigma)$$

このとき $X^I$ は拘束条件から

$$\dot{X}^I \pm X^{I\prime} = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n^I e^{-in(\tau\pm\sigma)}$$

これの右辺に展開係数がいるので、これを使って交換関係を作ります。$\sigma$ は $0\sim\pi$ の範囲にしていますが、これの右辺は $X_\mu$ は $\sigma$ に対して $2\pi$ の周期があることを反映して

$$\exp[-in(\tau\pm\sigma)] = \exp[-in(\tau\pm(\sigma+2\pi))]$$

となっています。なので、$\sigma$ の範囲を $2\pi$ 取れるように $\sigma=-\pi\sim\pi$ に広げます。そうすると、$\sigma=0\sim\pi$ のときをプラス符号に選び

$$\dot{X}^I(\tau,\sigma) + X^{I\prime}(\tau,\sigma) = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \tag{4}$$

としたなら、$\sigma=0\sim-\pi$ ではマイナス符号を選ぶことで

$$\dot{X}^I(\tau,-\sigma) - X^{I\prime}(\tau,-\sigma) = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n^I e^{-in(\tau-(-\sigma))} = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \tag{5}$$

となるので、右辺の符号が揃います。$\sigma$ をマイナスの範囲で取れるようにしていますが、$X^I(\tau,-\sigma)$ としているので、$X^I$ での $\sigma$ は $0\sim\pi$ のままです。これらから

$$[\dot{X}^I(\sigma) + X^{I\prime}(\sigma), \dot{X}^J(\sigma') + X^{J\prime}(\sigma')]$$

を計算すれば展開係数 $\alpha_n^I$ の交換関係が作れそうです。

$\dot{X}_\mu$ は古典的には $\Pi_\mu$ に関係しているので、量子論でも関係しているのは予想できます。実際にどうなっているのかはハイゼンベルグ方程式からわかって

$$\begin{aligned}
\dot{X}^I(\tau,\sigma) =&\ -i[X^I, H] \\
=&\ -i[X^I(\sigma), \int d\sigma(\pi\alpha'(\Pi^J(\sigma'))^2 + \frac{1}{4\pi\alpha'}(X^{J\prime}(\sigma'))^2)] \\
=&\ -i\pi\alpha'\int d\sigma'[X^I(\sigma), (\Pi^J(\sigma'))^2] \\
=&\ -i\pi\alpha'\int d\sigma'(\Pi^J(\sigma')[X^I(\sigma), \Pi^J(\sigma')] + [X^I(\sigma), \Pi^J(\sigma')]\Pi^J(\sigma')) \\
=&\ -i2\pi\alpha'\int d\sigma'\ i\eta^{IJ}\Pi^J(\tau,\sigma')\delta(\sigma-\sigma') \\
=&\ 2\pi\alpha'\Pi^I(\tau,\sigma)
\end{aligned}$$

二行目から三行目にいくときには

$$[X^I(\sigma), \frac{\partial}{\partial\sigma'}X^I(\sigma')] = \frac{\partial}{\partial\sigma'}[X^I(\sigma), X^I(\sigma')] = 0$$

最後の行へは、計量 $\eta^{IJ}$ はクロネッカーデルタ $\delta^{IJ}$ なので、$\eta^{IJ}\Pi^J = \Pi^I$ となります。このように

$$\dot{X}^I(\tau,\sigma) = 2\pi\alpha'\Pi^I(\tau,\sigma)$$

となっているので、$X^I$ と $\dot{X}^I$ の交換関係は

$$[X^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]=2\pi\alpha'[X(\sigma),\Pi^I(\sigma')]=2i\pi\alpha'\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')$$

これを $\sigma$ で微分すれば

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}[X^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]=[\frac{\partial}{\partial\sigma}X^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]=[X^{I\prime}(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]=2i\pi\alpha'\eta^{IJ}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') \tag{6}$$

この結果から

$$[\dot{X}^I(\sigma)+X^{I\prime}(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')+X^{J\prime}(\sigma')]$$

を計算できます。この交換関係は分解すると

$$\begin{aligned}
&[\dot{X}^I(\sigma)\pm X^{I\prime}(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')\pm X^{J\prime}(\sigma')]\\
&\quad=[\dot{X}^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]\pm[X'^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]\pm[\dot{X}^I(\sigma),X'^J(\sigma')]+[X'^I(\sigma),X'^J(\sigma')]\\
&\quad=\ \pm[X^{I\prime}(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]\pm[\dot{X}^I(\sigma),X^{J\prime}(\sigma')]
\end{aligned}$$

$$([a\pm b,c\pm d]=[a,c]\pm[b,c]\pm[a,d]+[b,d])$$

$X^I$ の交換関係で消しています。これの第二項は

$$\begin{aligned}
[\dot{X}^I(\sigma),X^{J\prime}(\sigma')]=-[X^{J\prime}(\sigma'),\dot{X}^I(\sigma)]&=\ -\frac{\partial}{\partial\sigma'}[X^J(\sigma'),\dot{X}^I(\sigma)]\\
&=\ -2i\pi\alpha'\eta^{IJ}\frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma-\sigma')\\
&=2i\pi\alpha'\eta^{IJ}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma')
\end{aligned}$$

$\delta(-x)=\delta(x)$ と

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')=\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X}\delta(X)=\frac{\partial}{\partial X}\delta(X)\\
&\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x')=\frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial X}\delta(X)=-\frac{\partial}{\partial X}\delta(X)=-\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')
\end{aligned}$$

を使っています。よって

$$\begin{aligned}
[\dot{X}^I(\sigma)\pm X^{I\prime}(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')\pm X^{J\prime}(\sigma')]&=\ \pm([X^{I\prime}(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]+[\dot{X}^I(\sigma),X^{J\prime}(\sigma')])\\
&=\ \pm4i\pi\alpha'\eta^{IJ}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma')
\end{aligned} \tag{7}$$

符号をそろえなければ当然

$$[\dot{X}^I(\sigma) \pm X^{I\prime}(\sigma), \dot{X}^J(\sigma') \mp X^{J\prime}(\sigma')] = 0 \tag{8}$$

この結果 (7) と (4) による

$$[\dot{X}^I(\sigma) + X^{I\prime}(\sigma), \dot{X}^J(\sigma') + X^{J\prime}(\sigma')] = 2\alpha' \sum_{m,n} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')}$$

を合わせる事で

$$\begin{aligned} 2\alpha' \sum_{m,n} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')} &= 4i\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \\ \sum_{m,n} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')} &= 2i\pi\eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \tag{9}$$

今は $\sigma$ の範囲を $-\pi \sim \pi$ にとっているので、$\sigma$ の符号でどうなっているのかも確かめます。これは両方とも $\sigma, \sigma' == 0 \sim \pi$ のときには明らかに成立しています。$\sigma = 0 \sim \pi, \sigma' = -\pi \sim 0$ では (5) から

$$[\dot{X}^I(\sigma) + X^{I\prime}(\sigma), \dot{X}^J(-\sigma') - X^{J\prime}(-\sigma')] = 2\alpha' \sum_{m,n} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')}$$

左辺は $\sigma'$ が $-\sigma'$ になっていますが、結果は変わりません。なので、左辺は (8) と同じで 0 です。つまり、$\sigma = 0 \sim \pi, \sigma' = -\pi \sim 0$ のように $\sigma$ と $\sigma'$ が別の符号になっている場合では

$$\sum_{m,n} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')} = 0$$

となる必要があって、これはデルタ関数において $\sigma = \sigma'$ が作れないということで (9) で成立しています。両方ともマイナスのときでは

$$[\dot{X}^I(-\sigma) - X^{I\prime}(-\sigma), \dot{X}^J(-\sigma') - X^{J\prime}(-\sigma')] = 2\alpha' \sum_{m,n} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')}$$

これの左辺は

$$\begin{aligned} [\dot{X}^I(-\sigma) - X^{I\prime}(-\sigma), \dot{X}^J(-\sigma') - X^{J\prime}(-\sigma')] &= -4i\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial(-\sigma)} \delta(-\sigma + \sigma') \\ &= 4i\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned}$$

となるので、(9) になります。というわけで、$\sigma$ の取り方に問題なく交換関係 (9) は成立しています。

この交換関係には和の計算やデルタ関数の微分なんかがいて気持ち悪いので消します。デルタ関数を消すには、$\sigma$ 積分をすればよさそうなので

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma d\sigma' \sum_{m,n} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')} = 2i\pi\eta^{IJ} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma d\sigma' \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

この形から、左辺に $e^{im_1\sigma}e^{in_1\sigma'}$ をくっつけてから積分すると

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma d\sigma' \sum_{m,n}[\alpha^I_m,\alpha^J_n]e^{-i(m+n)\tau}e^{-im\sigma}e^{-in\sigma'}e^{im_1\sigma}e^{in_1\sigma'} \\
&= \sum_{m,n}[\alpha^I_m,\alpha^J_n]e^{-i(m+n)\tau}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(m_1-m)\sigma}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{i(n_1-n)\sigma'} \\
&= \sum_{m,n}[\alpha^I_m,\alpha^J_n]e^{-i(m+n)\tau}\int_{0}^{2\pi} d\sigma e^{i(m_1-m)\sigma}\int_{0}^{2\pi} d\sigma' e^{i(n_1-n)\sigma'} \\
&= (2\pi)^2\sum_{m,n}[\alpha^I_m,\alpha^J_n]e^{-i(m+n)\tau}\delta_{mm_1}\delta_{nn_1} \\
&= (2\pi)^2[\alpha^I_{m_1},\alpha^J_{n_1}]e^{-i(m_1+n_1)\tau}
\end{aligned}
$$

とできます ($\sigma=\xi-\pi,\sigma'=\xi'-\pi$ にしても積分は変わらない)。三行目から四行目へはクロネッカーデルタの積分での定義を使っているだけです。同じようにすると右辺は

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma d\sigma' e^{im_1\sigma}e^{in_1\sigma'}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') &= \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in_1\sigma'}\int_0^{2\pi} d\sigma e^{im_1\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') \\
&= -\int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in_1\sigma'}\frac{\partial}{\partial\sigma'}e^{im_1\sigma'} \\
&= -im_1\int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m_1+n_1)\sigma} \\
&= -im_1 2\pi\delta_{m_1+n_1,0}
\end{aligned}
$$

2 行目へはデルタ関数の性質

$$
\int dx f(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta(x) = -\int dx\frac{\partial f}{\partial x}\delta(x)
$$

もしくは

$$
\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inx}
$$

から

$$
\frac{\partial}{\partial x}\delta(x) = \frac{-i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} ne^{-inx}
$$

となることを使えばいいです。$\delta_{m_1+n_1,0}$ は $m_1+n_1=0$ のとき 1 になることを表しています。よって

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^2[\alpha^I_m,\alpha^J_n]e^{-i(m+n)\tau} &= (2\pi)^2 m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0} \\
[\alpha^I_m,\alpha^J_n] &= m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0} \quad (m=-n) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

最後へは右辺が $m+n=0$ のときに値を持つことから exp を 1 にしています。
$\alpha_n$ は $x_0^I$ 以外を含んでいるので、残っているのは $x_0^I$ です。$X^I$ を $\sigma$ 積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\sigma X^I(\tau,\sigma) =& \int_0^\pi d\sigma\Big(x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau+i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau}\cos(n\sigma)\Big)\\ =& \pi x_0^I+\pi\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau\end{aligned}$$

となるので、(6) は

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\sigma[X^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')] &= 2i\pi\alpha'\eta^{IJ}\int_0^\pi d\sigma\delta(\sigma-\sigma')\\ \pi[x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau,\dot{X}^J(\sigma')] &= 2i\pi\alpha'\eta^{IJ}\\ [x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau,\dot{X}^J(\sigma')] &= 2i\alpha'\eta^{IJ}\end{aligned}$$

$\dot{X}^I$ は

$$\begin{aligned}\dot{X}^I &= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I+\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^I e^{-in\tau}\cos(n\sigma)\\ &= \sqrt{2\alpha'}\sum_n\alpha_n^I e^{-in\tau}\cos(n\sigma)\end{aligned}$$

なので、交換関係 (10) から $\alpha_0^I$ と $\dot{X}^I$ は交換するので

$$\begin{aligned}[x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau,\dot{X}^J(\sigma)] &= \sqrt{2\alpha'}\sum_n[x_0^I,\alpha_n^J]e^{-in\tau}\cos(n\sigma)\\ &= \sqrt{2\alpha'}\big([x_0^I,\alpha_0^J]+\sum_{n=1}^\infty[x_0^I,\alpha_n^J e^{-in\tau}+\alpha_{-n}^J e^{in\tau}]\cos(n\sigma)\big)\quad(\cos\theta=\cos(-\theta))\end{aligned}$$

$\sigma$ と $\sigma'$ で区別する必要がなくなっているので $\sigma$ にしています。これから

$$\sqrt{2\alpha'}([x_0^I,\alpha_0^J]+\sum_{n=1}[x_0^I,\alpha_n^J e^{-in\tau}+\alpha_{-n}^J e^{in\tau}]\cos(n\sigma)=2i\alpha'\eta^{IJ}$$

ここでも $0\sim\pi$ の範囲で $\sigma$ 積分すると

$$\begin{aligned}\sqrt{2\alpha'}[x_0^I,\alpha_0^J] &= 2i\alpha'\eta^{IJ}\\ [x_0^I,\alpha_0^J] &= i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}\end{aligned}$$

今度は $\cos n\sigma$ をくっつけて積分すると

$$\sqrt{2\alpha'}\int_0^\pi d\sigma\cos(m\sigma)\Big([x_0^I,\alpha_0^J]+\sum_{n=1}[x_0^I,\alpha_n^Je^{-in\tau}+\alpha_{-n}^Je^{in\tau}]\cos(n\sigma)\Big)=2i\alpha'\eta^{IJ}\int_0^\pi d\sigma\cos(m\sigma)$$

$$\sum_{n=1}[x_0^I,\alpha_n^Je^{-in\tau}+\alpha_{-n}^Je^{in\tau}]\int_0^\pi d\sigma\cos(m\sigma)\cos(n\sigma)=0$$

$$\sum_{n=1}[x_0^I,\alpha_n^Je^{-in\tau}+\alpha_{-n}^Je^{in\tau}]=0$$

$$\sum_{n=1}[x_0^I,\alpha_n^Je^{-in\tau}]=-\sum_{n=1}[x_0^I,\alpha_{-n}^Je^{in\tau}]$$

$$[x_0^I,\alpha_n^J]e^{-in\tau}=-[x_0^I,\alpha_{-n}^J]e^{in\tau}$$

三行目へは、$m\neq n$ では積分は 0 ですが、$m=n$ では値を持つからです。同じ $\tau$ を使った交換関係を作りたいので、これが成立するためには交換関係部分が 0 になっている必要があります。よって

$$[x_0^I,\alpha_n^I]=0\quad(n\neq0)$$

ということになります。というわけで、展開係数の交換関係は

$$[\alpha_m^I,\alpha_n^J]=m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}$$
$$[x_0^I,\alpha_0^J]=i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}$$
$$[x_0^I,\alpha_n^J]=0\quad(n\neq0)$$

また、$\alpha_0^I=\sqrt{2\alpha'}p^I$ を使えば

$$[x_0^I,p^J]=i\eta^{IJ}$$

と書けます。これは量子力学での位置と運動量の交換関係と同じ形になっているので

$$(x_0^I)^\dagger=x_0^I\ ,\ (p^I)^\dagger=p^I$$

のようにエルミートになっています。$p^I$ がエルミートなので $\alpha_0^I$ もエルミートです。

この結果と通常の量子論のことを考えると $\alpha_m^I$ は生成、消滅演算子にでもなってそうです。エルミート共役の形で書くために $\alpha_n^I$ を $a_n^I$ に戻します。$\alpha_n^I$ と $a_n^I$ は「弦のゲージ固定」で定義したように

$$\alpha_n^\mu=a_n^\mu\sqrt{n}\ ,\ \alpha_{-n}^\mu=a_n^{\mu*}\sqrt{n}\quad(n\geq1)$$

これを演算子として

$$\alpha_n^I=a_n^I\sqrt{n}\ ,\ \alpha_{-n}^I=(a_n^I)^\dagger\sqrt{n}\quad(n\geq1)$$

演算子なので複素共役をエルミート共役にしています。これを交換関係に入れると

$$\sqrt{mn}[a_m^I,a_n^J]=m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}$$

$m, n \geq 1$ で与えられている $a_n$ では $m = -n$ を作れないので、$m + n = 0$ とはできなく

$$[a_m^I, a_n^J] = [(a_m^I)^\dagger, (a_n^J)^\dagger] = 0$$

エルミート共役をとったものでは

$$\begin{aligned}
[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] &= m\eta^{IJ}\delta_{m-n,0} \\
[a_m^I, (a_n^J)^\dagger] &= \frac{m}{\sqrt{mn}}\eta^{IJ}\delta_{mn} \\
[a_m^I, (a_n^J)^\dagger] &= \eta^{IJ}\delta_{mn}
\end{aligned}$$

途中で $\delta_{m-n,0} = \delta_{mn}$ と書き換えて、最後に $m = n$ のときに消えないことから $\sqrt{mn} = m$ としています。というわけで、$a_n^I$ の交換関係は生成、消滅演算子のものと同じになっています。$\alpha_n^I$ で言えば、$\alpha_n^I$ が消滅演算子、$\alpha_{-n}^I (n \geq 1)$ が生成演算子です。

最後に $X^I$ がエルミートであることを示しておきます。$X^I$ のエルミート共役をとってみると

$$\begin{aligned}
(X^I(\tau,\sigma))^\dagger &= (x_0^I)^\dagger + \sqrt{2\alpha'}(\alpha_0^I)^\dagger\tau - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_n^I)^\dagger e^{in\tau}\cos(n\sigma) \\
&= (x_0^I)^\dagger + \sqrt{2\alpha'}(\alpha_0^I)^\dagger\tau - i\sqrt{2\alpha'}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^I)^\dagger e^{in\tau} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^I)^\dagger e^{in\tau})\cos(n\sigma) \\
&= x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau - i\sqrt{2\alpha'}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_{-n}^I e^{in\tau} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{n}\alpha_{-n}^I e^{in\tau})\cos(n\sigma) \\
&= x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau - i\sqrt{2\alpha'}(\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{-n}\alpha_n^I e^{-in\tau} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-n}\alpha_n^I e^{-in\tau})\cos(n\sigma) \\
&= x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau}\cos(n\sigma) \\
&= X^I(\tau,\sigma)
\end{aligned}$$

このように $X^I$ はエルミートになっているのが分かります。途中で $\alpha_n^I$ のエルミート共役が

$$(\alpha_n^I)^\dagger = (a_n^I)^\dagger\sqrt{n} = \alpha_{-n}^I$$

となっていることを使っています。

**・補足**

共変な形での交換関係を示します。共変な形なので、最初のポアソン括弧の式をそのまま演算子に対応させて、同じ $\tau$ での交換関係は

$$[X^\mu(\sigma,\tau), X^\nu(\sigma',\tau)] = 0$$

$$[\Pi^\mu(\sigma,\tau), \Pi^\nu(\sigma',\tau)] = [\frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu(\sigma,\tau), \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu(\sigma',\tau)] = 0$$

$$[X^\mu(\sigma,\tau), \Pi^\nu(\sigma',\tau)] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')$$

となっています。上では光円錐ゲージで求めた $\dot{X}^I(\sigma) \pm X'^I(\sigma)$ の交換関係もついでに求めます。これは $\dot{X}^\mu(\sigma) \pm X'^\mu(\sigma)$ と変更します。ついでに計算を見やすくするために

$$\frac{1}{2}(\dot{X}^\mu(\sigma) \pm X'^\mu(\sigma)) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} \pm \frac{\partial}{\partial\sigma})X^\mu = \partial_\pm X^\mu$$

として、$\partial_\pm X^\mu$ の交換関係を求めることにします。

まず $\partial_+ X^\mu$ と $\partial_- X^\nu$ の交換関係を求めます。これは

$$\begin{aligned}
[\partial_+ X^\mu, \partial'_- X^\nu] &= \frac{1}{4}[(\partial_\tau + \partial_\sigma)X^\mu(\sigma), (\partial_\tau - \partial'_\sigma)X^\nu(\sigma')] \quad (\partial'_\pm = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} \pm \frac{\partial}{\partial\sigma'}) = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial'_\sigma)) \\
&= \frac{1}{4}([\partial_\tau X^\mu(\sigma), \partial_\tau X^\nu(\sigma')] - [\partial_\sigma X^\mu(\sigma), \partial'_\sigma X^\nu(\sigma')] \\
&\quad - [\partial_\tau X^\mu(\sigma), \partial'_\sigma X^\nu(\sigma')] + [\partial_\sigma X^\mu(\sigma), \partial_\tau X^\nu(\sigma')]) \\
&= \frac{1}{4}([\partial_\tau X^\mu(\sigma), \partial_\tau X^\nu(\sigma')] - \partial_\sigma\partial'_\sigma[X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')] \\
&\quad - \partial'_\sigma[\partial_\tau X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')] + \partial_\sigma[X^\mu(\sigma), \partial_\tau X^\nu(\sigma')]) \\
&= \frac{1}{4}(-\partial'_\sigma[\Pi^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')] + \partial_\sigma[X^\mu(\sigma), \Pi^\nu(\sigma')])
\end{aligned}$$

第一項と第二項は、上でのデルタ関数部分の変形と同じように

$$\begin{aligned}
&\partial'_\sigma[\Pi^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')] = -i\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma - \sigma') = i\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma - \sigma') \quad (\delta(x) = \delta(-x)) \\
&\partial_\sigma[X^\mu(\sigma), \Pi^\nu(\sigma')]) = i\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned}$$

なので

$$[\partial_+ X^\mu, \partial'_- X^\nu] = 0$$

同様に

$$[\partial_- X^\mu, \partial'_+ X^\nu] = 0$$

となります。

$\partial_+ X^\mu$ 同士の交換関係を求めます。まず、共役量同士の交換関係を変形すると

$$\begin{aligned}
[\Pi^\mu(\sigma), \Pi^\nu(\sigma')] &= T_0^2[\frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu(\sigma), \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu(\sigma')] \\
&= T_0^2[(\partial_+ + \partial_-)X^\mu(\sigma), (\partial'_+ + \partial'_-)X^\nu(\sigma')] \\
&= T_0^2[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] + T_0^2[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] \\
&\quad + T_0^2[\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] + T_0^2[\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] \\
&= T_0^2[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] + T_0^2[\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')]
\end{aligned}$$

なので

$$0 = T_0[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] + T_0[\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] \tag{11}$$

今度は $X^\mu$ と $\Pi^\nu$ の交換関係を同じように変形していくと

$$\begin{aligned}
[X^\mu(\sigma,\tau), \Pi^\nu(\sigma',\tau)] &= T_0[X^\mu(\sigma), \frac{\partial}{\partial\tau} X^\nu(\sigma')] \\
&= T_0[X^\mu(\sigma), (\partial'_+ + \partial'_-) X^\nu(\sigma')] \\
&= T_0[X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] + T_0[X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')]
\end{aligned}$$

これを $\sigma$ で微分して

$$\begin{aligned}
i\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') &= T_0[\frac{\partial}{\partial\sigma} X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] + T_0[\frac{\partial}{\partial\sigma} X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] \\
&= T_0[(\partial_+ - \partial_-) X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] + T_0[(\partial_+ - \partial_-) X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] \\
&= T_0[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] - T_0[\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] \\
&\quad + T_0[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] - T_0[\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] \\
&= T_0[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] - T_0[\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')]
\end{aligned}$$

ここに (11) を使えば

$$\begin{aligned}
i\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') &= \ 2T_0[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] \\
-i\eta^{\mu\nu}\frac{1}{2T_0}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') &= \ [\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')]
\end{aligned}$$

よって、共変な形では

$$\begin{aligned}
&[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] = i\eta^{\mu\nu}\frac{1}{2T_0}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') \\
&[\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] = -i\eta^{\mu\nu}\frac{1}{2T_0}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') \\
&[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] = [\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] = 0
\end{aligned}$$

となります。