相対論的な弦

時空における点粒子の運動でなく、時空における弦の運動を考えます。弦は力学で出てきますが、ここでは 4 次元時空での弦の運動を見ます。
弦というより紐と言ったほうがイメージしやすい気がしますが、弦と言っていきます。また、弦の区別として、紐状になっている開弦 (open string) と、両端をくっつけて輪にした閉弦 (closed string) の 2 つがありますが、ここでは明確に区別しないと混乱する状況は出てこないので 2 つあることを意識して話をしていません。ただし、境界条件については注意してください。
途中で次元解析をするので自然単位系にしていません。
力学で出てくる弦の話と一般相対性理論はある程度知っているとしています。
図を一切使っていないので、イメージを重視したい方は他の本とかを見てください。

記号の定義をしていきます。ここで考えるのは 4 次元ミンコフスキー時空です。D 次元としても話は同じなので 4 次元でやっていきます。場の量子論や一般相対性理論とは変えて、計量を $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$ に取ります。理由は簡単でこっちの定義を使っている場合の方が多いというだけです。内積は計量によって

$$\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu = A \cdot B$$

となるのは同じですが、ベクトル A_μ の時間的 (time-like)、空間的 (space-like) は

$$A^2 > 0 \ \ (\text{ 空間的 })$$

$$A^2 < 0 \ \ (\text{ 時間的 })$$

となっています。特に断らない限り内積の表記 $A \cdot B$ は添え字 μ に対して使います。これにともなって線素 ds を

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$$

とします ($dx_0 = cdt,\ ds^2 = (ds)^2$)。$(dx_0)^2 > (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$、のときに $ds^2 > 0$ とするためです。
ついでに開弦 (open string) と閉弦 (closed string) の違いも言っておきます。開弦は弦の両端がお互いに繋がっていない紐で、閉弦は両端が繋がって輪になっているものです。この 2 つの重要な違いは開弦では両端の動きに対して境界条件を課すのに対して、閉弦では周期的境界条件 ($f(x) = f(x + a)$ のような) が課せられている点です。開弦の境界条件は後で変分原理から出てきますが、閉弦は閉弦とした時点で周期的境界条件が課せられています。
ここでは出てこないものですが、ここで定義を与えておきます。弦の張力 T_0 と光速 c から

$$\frac{T_0}{c} = \frac{1}{2\pi\alpha' \hbar c^2}$$

として、α' を定義します。
ここ以外では基本的に自然単位系 $\hbar = c = 1$ を使っています。例えば、後で出てくる P^τ_μ, P^σ_μ は

$$P^\tau_\mu = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$P^\sigma_\mu = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

自然単位系で T_0 は質量の 2 乗 ($M^2 = L^{-2}$)、α' は長さの 2 乗 ($M^{-2} = L^2$) の単位を持っています (長さの単位 L、質量の単位 M)。

定義は終わりにして、一般相対性理論で出てくる点粒子での話をまずはしておきます。粒子の運動は作用から求められるので、作用について見ます。一般相対性理論での「測地線方程式」と「運動方程式と測地線方程式」で出てきたように、始点を P_1、終点を P_2 としたときの相互作用のない点粒子に対する作用 S は

$$S = -mc\int_{P_1}^{P_2} ds = -mc^2\int_{t_i}^{t_f} dt\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} \quad \Big(\boldsymbol{v} = (\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt})\Big)$$

これは時間 t にしていますが、曲線のパラメータを使った表現に持っていきます。粒子の軌道に対応する曲線を $x_\mu(\tau)$ と表せば、その世界線はパラメータ τ の変化によるので、線素は

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}(d\tau)^2$$

これを作用の式にいれることで、パラメータ τ による作用として

$$S = -mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L \tag{1}$$

パラメータ τ で書いたものをラグランジアン L とします。この式はパラメータ τ を変換しても不変になっています。これは

$$d\tau = \frac{d\tau}{d\tau'}d\tau' \ , \ \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{d\tau'}{d\tau}$$

を入れると

$$\begin{aligned} S =& -mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{d\tau'}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau'}\frac{d\tau'}{d\tau}} \\ =& -mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{d\tau'}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau'}\frac{d\tau'}{d\tau}} \\ =& -mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\frac{d\tau'}{d\tau}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{dx^\nu}{d\tau'}} \\ =& -mc\int_{\tau'_i}^{\tau'_f} d\tau'\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{dx^\nu}{d\tau'}} \end{aligned}$$

となることから確かめられます。下の補足で $m=0$ でも使える作用を導いています。

ここで言いたいのは、線素 ds の積分が作用で、それは粒子の軌道を表す曲線のパラメータ τ で書くことが出来るということです。そして、作用はパラメータの変換に対して不変だということです。

このことを踏まえて弦での作用を考えてみます。点粒子と弦の違いは、弦は 1 次元の物体であるという点です。このため、点粒子の動いた軌道は線を描くのに対して、弦が動いた軌道は 2 次元面を形成します (例えば、xy 平面で x 軸に平行な線を y 軸方向に移動させたときにできる面)。面なので、これを世界面 (world sheet) と言います。単に、時空における、点による 1 次元的な軌道を世界線 (world line)、1 次元の物体による 2 次元的な軌道を世界面、2 次元の物体による 3 次元的な軌道を世界体積 (world volume) と呼ぶだけです。個人的な感覚では、世界面という単語はあまり使われていない気がします。大抵は world sheet が使われていると思います。ここでは世界面で通します。

というわけで、知りたいのは世界面の微小な面積です (世界線の微小な部分が ds)。上でも触れましたがもう一度言い方を変えて、点粒子の場合を見ておきます。4 次元ミンコフスキー時空における点粒子が描く曲線 (世界線) を、あるパラメータ ξ によって $X_\mu(\xi)$ と書きます。この関数 X_μ がパラメータ ξ による 1 次元空間から 4 次元ミンコフスキー時空への変換を表していると捉えます。つまり、世界線に対応する仮想的な 1 次元のパラメータ空間

を用意し、4 次元ミンコフスキー時空とを繋ぐ変換を用意したことになります。線素は $X_\mu(\xi)$ のパラメータ ξ の変化によって

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\xi}\frac{dX^\nu}{d\xi}(d\xi)^2$$

と書けます。

弦でも同じように考えます。弦が描くのは面なのでパラメータが 1 つ増えます (1 次元の線に厚みを与えて 2 次元の面にするため)。なので、ξ_1, ξ_2 の 2 つを用意し、ξ_1, ξ_2 を座標とする 2 次元のパラメータ空間が作れます。このパラメータに従って弦が 4 次元ミンコフスキー時空に描く 2 次元面 (世界面) を $X_\mu(\xi_1, \xi_2)$ とします。この 4 次元ミンコフスキー時空における弦の軌道による 2 次元面上 (世界面上) の微小な面積 dA は、その面上の微小なベクトル dv_μ, dw_μ によって

$$dA = |dv||dw||\sin\theta| \quad (|dv| = \sqrt{dv_\mu dv^\mu} = \sqrt{dv \cdot dv})$$

となっていると考えられます。これは平行四辺形の面積です (長方形になっているとは限らないから)。4 次元ミンコフスキー時空だと分かりづらければ 3 次元空間だと思えばいいです。線素がパラメータを使った形に書き換えられたのと同じように、dA もパラメータ ξ_1, ξ_2 による形に書き換えます。パラメータ空間における $d\xi_1$ と $d\xi_2$ による長方形の面積 $d\xi_1 d\xi_2$ が世界面 $X_\mu(\xi_1, \xi_2)$ 上の dA に対応すると考えれば (言い換えれば、ξ_1 の微小変化によってベクトル dv_μ ができ、ξ_2 の微小変化によってベクトル dw_μ ができる)

$$dv_\mu = \frac{\partial X_\mu(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1}d\xi_1 \ , \ dw_\mu = \frac{\partial X_\mu(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2}d\xi_2$$

となるので

$$\begin{aligned}
dA &= |dv||dw||\sin\theta| \\
&= |dv||dw|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= \sqrt{|dv|^2|dw|^2 - |dv|^2|dw|^2\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{(dv \cdot dv)(dw \cdot dw) - (dv \cdot dw)^2} \\
&= \sqrt{(\frac{\partial X_\mu(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1}d\xi_1)^2(\frac{\partial X_\mu(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2}d\xi_2)^2 - (\frac{\partial X^\mu(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1}\frac{\partial X_\mu(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2})^2(d\xi_1 d\xi_2)^2} \\
&= d\xi_1 d\xi_2\sqrt{(\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_1})(\frac{\partial X}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_2}) - (\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_2})^2}
\end{aligned}$$

dA が求まりましたが、面積である dA が虚数になると問題があるので、ルートの中が負にならないようにする必要があります。そのためにルート内の第一項と第二項の大小関係を調べます。

世界面上の接ベクトル q_μ は世界線上の接ベクトルと同じようにパラメータの微分によって

$$q_\mu(\lambda) = \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_1} + \lambda\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_2}$$

と書けます。今はパラメータが 2 つあるので、各パラメータによるものの線形結合になり、長さを変えるスケール因子 λ $(-\infty \sim +\infty)$ を含ませています。ξ_2 の方だけに λ がいるのは、ある点 P での ξ_1 方向の変化による接ベクトルを基準にし、そこから ξ_2 方向の変化によって生じる接ベクトルを作るようにしているからです。つまり、2 次元面なので曲線の接ベクトルと違い 1 つの点に対して 1 方向だけでないので、λ を変化させることで点 P での接ベクトルを全て作れるということです。$q_\mu(\lambda)$ の 2 乗は

$$q^2(\lambda) = q_\mu(\lambda)q^\mu(\lambda) = (\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_1} + \lambda\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_2})(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi_1} + \lambda\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi_2})$$
$$= (\frac{\partial X}{\partial \xi_1})^2 + 2\lambda(\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_2}) + \lambda^2(\frac{\partial X}{\partial \xi_2})^2$$

これを λ による 2 次方程式だと見ます。q^2 には正でなければいけないという縛りもなく、一般的に考えて、点 P での接ベクトルは時間的 (time-like)、空間的 (space-like) のどちらもいるはずです。そうすると λ は q^2 が正負どちらの値も取れるような値になっていなくてはいけないです。2 次不等式の基本的な話から、q^2 が正負両方の値を持つためには $v^2 = 0$ となるときに λ が 2 つの解 (実根) を持っている必要があるので (ようは $v^2 = a\lambda^2 + b\lambda + c$ のグラフが正負両方の領域にいればいい)、判別式が

$$b^2 - 4ac > 0 \quad (a\lambda^2 + b\lambda + c = 0)$$

となっていればいいです。よって

$$(\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_2})^2 - (\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_1})^2(\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_2})^2 > 0$$

となるので、dA が虚数にならないようにするためにルート内の符号を反転させて

$$dA = d\xi_1 d\xi_2\sqrt{(\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_2})^2 - (\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_1})(\frac{\partial X}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_2})}$$

とします。

これで世界面の微小面積が出たので、世界線の場合と同じように考えることで、弦の作用が

$$S = -C\int_P d\xi_1 d\xi_2\sqrt{(\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_2})^2 - (\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_1})(\frac{\partial X}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial X}{\partial \xi_2})}$$

と書けます (P は弦の動く範囲)。次元解析から係数 C を決めます。長さの次元を L、時間を T、質量を M とします。まず、$X^\mu(\xi_1, \xi_2)$ は長さの次元 L で、面積 dA は L^2 です。一方で、ξ_1, ξ_2 は dA の式からは打ち消しあって寄与していないので、任意です。なので、こちらの都合に合わせて無次元にしたり、ξ_1 には時間の次元 T、ξ_2 には長さの次元 L を持たせたりできます。作用は例えば自由粒子を見てみると

$$S \sim \int dt\ \frac{1}{2}mv^2$$

これから作用の次元は L^2M/T です。そうすると

$$\frac{L^2M}{T} = [C]L^2$$

なので、C の次元は M/T です。似た次元として力があって、力の次元は

$$\text{力} = \frac{LM}{T^2} = \frac{M}{T}\frac{L}{T}$$

くっついている余計な L/T は速度の次元です。よって、力の次元を持ったものを何かの速度で割れば C の次元を作ることが出来ます。今考えている状況で力の次元を持っているのは弦の張力 T_0 です。そして、速度には相対論的な状況を考えているので光速 c を使うことにして、ついでに ξ_1 を τ、ξ_2 を σ と書くことにすれば、作用は

$$S=-\frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_{\sigma_i}^{\sigma_f}d\sigma\sqrt{(\frac{\partial X}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial X}{\partial\sigma})^2-(\frac{\partial X}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial X}{\partial\tau})(\frac{\partial X}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial X}{\partial\sigma})} \tag{2}$$

これを南部・後藤作用 (Nambu-Goto action) と言います。ここまでの話から分かるように、点粒子での作用の作り方を弦の場合で行うことで出てきたものです。なので、この作用から最小作用の原理 (変分原理) を使って弦の運動方程式を求めると、その軌道は 2 次元の面積が最小になるようになっています (ようは世界面)。

τ を時間の次元、σ を長さの次元にしたりすると言ったように、感覚的に τ を時間座標、σ を空間座標のように扱います。このため、弦の端は σ の範囲内で与えられ、例えば σ の範囲を $0\sim\sigma_1$ としたとき、弦の端は $\sigma=0$ と $\sigma=\sigma_1$ となります (弦の長さを有限にする)。これに対して τ は時間なので $-\infty\sim+\infty$ まで取れます。また、$X^0(\tau,\sigma)$ は弦の座標の時間方向なので、これの τ 微分はたとえ弦の端であっても変化しているべきだと考えて

$$\frac{\partial X^0(\tau,\sigma)}{\partial\tau}|_{\sigma=0,\sigma_1}\neq 0 \tag{3}$$

という制限を与えます。

閉弦では σ に対して

$$X^\mu(\tau,\sigma)=X^\mu(\tau,\sigma+a)$$

として周期的境界条件を課します。a は元の位置までに戻ってくる長さで、σ の範囲を $0\sim\sigma_1$ だとすれば $X^\mu(\tau,0)=X^\mu(\tau,\sigma_1)$ となります。

パラメータ ξ_1,ξ_2 を導入して来ましたが、作用がパラメータの変更に対してどうなっているのか確かめます。面積がどうなるのかが分かればいいので

$$A=\int_P d\xi_1d\xi_2\sqrt{(\frac{\partial X}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial\xi_2})^2-(\frac{\partial X}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial\xi_1})(\frac{\partial X}{\partial\xi_2}\cdot\frac{\partial X}{\partial\xi_2})}$$

を使います。P は適当なパラメータの範囲を表しています。パラメータを ξ_1,ξ_2 から $\rho_1(\xi_1,\xi_2),\rho_2(\xi_1,\xi_2)$ に変換した場合を考えます。まず、状況をもっと扱いやすくするために変形させます。世界面上の微小なベクトル dX_μ は 2 変数の全微分なので、パラメータの微小変化によって

$$dX_\mu=\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_1}d\xi_1+\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_2}d\xi_2$$

とかけるので、世界面上の微小距離は

$$\begin{aligned}ds^2=dX_\mu dX^\mu&=\big(\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_1}d\xi_1+\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_2}d\xi_2\big)\big(\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi_1}d\xi_1+\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi_2}d\xi_2\big)\\&=\sum_{i,j=1}^2\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_i}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi_j}d\xi_id\xi_j\\&=\sum_{i,j=1}^2\gamma_{ij}d\xi_id\xi_j\end{aligned}$$

$d\xi_id\xi_j$ の前の部分を世界面上でのパラメータに対する計量とみなし、相対論的な表記にするために ξ の添え字を上につけることにすれば (ξ_1 を ξ^1 と書き直すだけなので計量によって上付きになるわけではない)

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^2\gamma_{ij}d\xi^id\xi^j \tag{4}$$

この和の記号も省いて、ローマ文字の添え字に対しては $1, 2$ の和をとるようにします。γ_{ij} は

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_\mu}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial X^\mu}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial X_\mu}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial X^\mu}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial X_\mu}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial X^\mu}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial X_\mu}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial X^\mu}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}$$

となっており、行列式は

$$\det \gamma_{ij} = \gamma = (\frac{\partial X}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^1})(\frac{\partial X}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^2}) - (\frac{\partial X}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^2})^2$$

なので、面積のルート内に対応しています。よって、面積は

$$A = \int_P d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{-\gamma} \tag{5}$$

と書けます。

$d\xi^1 d\xi^2$ と $d\rho^1 d\rho^2$ はヤコビアンから

$$d\xi^1 d\xi^2 = |\det M_{ij}| d\rho^1 d\rho^2 \quad (M_{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \rho^j})$$

$i, j = 1, 2$ です。逆変換は

$$d\rho^1 d\rho^2 = |\det N_{ij}| d\xi^1 d\xi^2 \quad (N_{ij} = \frac{\partial \rho^i}{\partial \xi^j})$$

2×2 行列 M, N は偏微分の連鎖則から、例えば

$$M_{1i}N_{i1} = \frac{\partial \xi^1}{\partial \rho^1}\frac{\partial \rho^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial \rho^2}\frac{\partial \rho^2}{\partial \xi^1} = \frac{\partial \xi^1}{\partial \xi^1} = 1$$

$$M_{2i}N_{i1} = \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho^1}\frac{\partial \rho^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho^2}\frac{\partial \rho^2}{\partial \xi^1} = \frac{\partial \xi^2}{\partial \xi^1} = 0$$

となっているので、M, N の積は

$$N_{ij}M_{ji} = \delta^i_i \tag{6}$$

という単位行列になっています。δ^i_i はクロネッカーデルタです。

これで準備ができたので、面積がパラメータの変換に対してどうなるのか見ます。世界面上の微小距離 ds^2 はパラメータの選びかたとは無関係なので

$$ds^2 = \gamma_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \overline{\gamma}_{ij}(\rho) d\rho^i d\rho^j = \overline{\gamma}_{ij}(\rho) \frac{d\rho^i}{d\xi^a}\frac{d\rho^j}{d\xi^b} d\xi^a d\xi^b$$

と書けます。なので

$$\gamma_{ij}(\xi) = \overline{\gamma}_{ab}(\rho) \frac{d\rho^a}{d\xi^i}\frac{d\rho^b}{d\xi^j}$$

これは行列 N によって

$$\gamma_{ij}(\xi) = \overline{\gamma}_{ab}(\rho) N_{ai} N_{bj} = N_{ai} \overline{\gamma}_{ab}(\rho) N_{bj} = (N^t)_{ia} \overline{\gamma}_{ab}(\rho) N_{bj}$$

右辺は見た目が $i \times j$ 行列になるように変形しているだけで、t は転置を表します。これの行列式を取ると

$$\begin{aligned}
\det[(N^t)_{ia} \overline{\gamma}_{ab}(\rho) N_{bj}] &= \det[(N^t)_{ia}] \det[\overline{\gamma}_{ab}] \det[N_{bj}] \\
&= \det[N_{ia}] \det[\overline{\gamma}_{ab}] \det[N_{bj}] \\
&= \overline{\gamma} \det[N_{ia}] \det[N_{bj}] \\
&= \overline{\gamma} (\det N_{ij})^2
\end{aligned}$$

よって

$$\gamma = \overline{\gamma} (\det N_{ij})^2$$

これを (5) に入れると

$$\begin{aligned}
A &= \int_P d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{-\gamma} \\
&= \int_P d\xi^1 d\xi^2 |\det N_{ij}| \sqrt{-\overline{\gamma}} \\
&= \int_P d\rho^1 d\rho^2 |\det M_{ij}| |\det N_{ij}| \sqrt{-\overline{\gamma}} \\
&= \int_P d\rho^1 d\rho^2 \sqrt{-\overline{\gamma}}
\end{aligned}$$

最後に (6) を行列式に変えたものを使っています。というわけで、パラメータを変更しても A は不変なので、作用も不変になっています。このようにパラメータの選択が自由であるために、計算しやすいパラメータを選んでから計算するということができます。この結果から、南部・後藤作用は $\xi^1 = \tau, \xi^2 = \sigma$ として、パラメータ不変が明確に分かる形として

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\sigma \sqrt{-\gamma} \quad (\gamma = \det \gamma_{ij}) \tag{7}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \dfrac{\partial X^\mu}{\partial \tau} & \dfrac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \dfrac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \\ \dfrac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \dfrac{\partial X^\mu}{\partial \tau} & \dfrac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \dfrac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \end{pmatrix}$$

とできます。

作用自体の話は終わりにして、弦の運動方程式を求めます。共役量を求めたほうが記号が定義できて便利なので、先に共役量を出します。南部・後藤作用 (2) においてラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}, X')$$

$$\mathcal{L}(\dot{X}, X') = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$$

と定義します。σ の範囲を $0 \sim \sigma_1$ として、$\dot{X}, X'$ は

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau}\ ,\ X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma}$$

としています。$\dot{X}^\mu$ と $X^{\mu\prime}$ に対応する共役量は

$$P^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - X'^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2X'^2}}$$

$$P^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - \dot{X}^2X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2X'^2}}$$

となります。後でもう一度触れますが、τ を時間のように扱うことから共役量 P^τ_μ を X^μ の正準 (共役) 運動量と言うことができます。

X_μ の変分 δX_μ を考えて弦の運動方程式を出します。作用の変分は

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} \delta\mathcal{L} \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma\big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\delta\dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}\delta X'^\mu\big) \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma\big(P^\tau_\mu\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau} + P^\sigma_\mu\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma}\big) \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma\big(\frac{\partial}{\partial\tau}(P^\tau_\mu\delta X^\mu) - \frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma}(P^\sigma_\mu\delta X^\mu) - \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial\sigma}\delta X^\mu\big) \\
&= \int_0^{\sigma_1} d\sigma\big[P^\tau_\mu\delta X^\mu\big]_{\tau=\tau_i}^{\tau=\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\big[P^\sigma_\mu\delta X^\mu\big]_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma\big(\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial\tau} + \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial\sigma}\big)\delta X^\mu
\end{aligned}$$

第一項は $\tau = \tau_i,\ \tau = \tau_f$ で $\delta X_\mu(\tau_i.\sigma) = \delta X_\mu(\tau_f,\sigma) = 0$ として消します。第三項は

$$\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial\tau} + \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = \partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_iX^\mu)} = 0 \quad (\partial_i = \frac{\partial}{\partial\xi^i} = (\frac{\partial}{\partial\tau},\frac{\partial}{\partial\sigma})) \tag{8}$$

となって、これがパラメータによるオイラー・ラグランジュ方程式で、計算すれば弦の運動方程式となります。残っている第二項は

$$P^\sigma_\mu(\tau,0) = P^\sigma_\mu(\tau,\sigma_1) = 0$$

という条件を与えれば消えます。これは弦の端が動くことに制限を与えないので $(\delta X_\mu(\tau,0), \delta X_\mu(\tau,\sigma_1) \neq 0)$、自由端 (free endpoint) に対応し、ノイマン（Neumann) 境界条件、もしくは自由端境界条件と呼ばれます。変分 δX_μ の方に制限を課すなら、

$$\delta X_\mu(\tau,0) = \delta X_\mu(\tau,\sigma_1) = 0$$

これは弦の端が τ の変化で動かないとするものなので固定端 (fixed endpoint) に対応し、ディリクレ (Dirichlet) 境界条件、もしくは固定端境界条件と呼ばれます。微分で書くなら

$$\frac{\partial X^\mu(\tau,0)}{\partial\tau}=\frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma_1)}{\partial\tau}=0$$

となりますが、弦の端で (3) の制限 $\partial X_0/\partial\tau\neq 0$ があるので正確には

$$\frac{\partial X^i(\tau,0)}{\partial\tau}=\frac{\partial X^i(\tau,\sigma_1)}{\partial\tau}=0\quad (i=1,2,3)$$

ディリクレ境界条件を使うには両端を固定する物体が必要になるので、D ブレーンが出てくる以前はノイマン境界条件が使われていました。

ちなみに閉弦では周期的境界条件のために $P^\sigma_\mu\delta X^\mu|_{\sigma=0}=P^\sigma_\mu\delta X^\mu|_{\sigma=\sigma_1}$ なので、周期的境界条件だけで作用の変分を 0 に出来ます。これらは力学で出てくる弦の話と同じです。

X^μ の微小変化による保存量も出しておきます。X^μ の並進を与える微小変化 ϵ^μ を考えてやると、ネーターの定理から

$$\epsilon^\mu j^i_\mu=\epsilon^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i X^\mu)}$$

場の量子論での「ネーターの定理」での場を X^μ に置き換えて座標変換による部分をなくしたもので、ネーターカレントの定義から微小量 ϵ^μ を分離しています。これから、ネーターカレント j^i_μ は

$$j^i_\mu=(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu},\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X'^\mu})=(P^\tau_\mu,P^\sigma_\mu)$$

そして、連続の方程式は $\partial_i J^i_\mu=0$ なので

$$\partial_i J^i_\mu=\frac{\partial}{\partial\tau}P^\tau_\mu+\frac{\partial}{\partial\sigma}P^\sigma_\mu=0$$

このとき、ネーターカレントの最初の成分 (今の場合では τ 成分) を空間座標で積分したものが保存量であることを持ち出します。この場合では (τ,σ) の 2 次元で連続の方程式を変形していくと

$$\begin{aligned}0=\int_0^{\sigma_1}d\sigma\frac{\partial}{\partial\xi^i}j^i_\mu &= \int_0^{\sigma_1}d\sigma\frac{\partial}{\partial\tau}j^1_\mu+\int_0^{\sigma_1}d\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}j^2_\mu\\ &= \int_0^{\sigma_1}d\sigma\frac{\partial}{\partial\tau}P^\tau_\mu+\int_0^{\sigma_1}d\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}P^\sigma_\mu\\ &= \int_0^{\sigma_1}d\sigma\frac{\partial}{\partial\tau}P^\tau_\mu\end{aligned}$$

$\sigma=0,\sigma_1$ で P^σ_μ は落ちるとしています。よって

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\sigma_1}d\sigma\ P^\tau_\mu=0\ \Rightarrow\ \int_0^{\sigma_1}d\sigma\ P^\tau_\mu=const$$

このことから P^τ_μ を σ 積分したものは世界面上における保存量です。世界面上と言っているのはパラメータ τ の微分であって時間 t ではないからです。平行移動から出てきた保存量なので P^τ_μ を運動量と見なせ、P^τ_μ を σ で積分した (τ は固定して σ で $0\sim\sigma_1$ の範囲で積分)

$$p_\mu(\tau)=\int_0^{\sigma_1}d\sigma\ P^\tau_\mu \tag{9}$$

これを時空における弦の運動による全運動量だと見なせます。この積分は、τ が一定での弦の長さ (τ 一定での曲線) に渡る積分です。この式の形は、力学での x 軸に沿って張られた y 軸方向に振動する弦の全運動量は ρv_y (ρ は弦の質量密度、v_y は y 方向の振動の速度) を弦の長さで積分することで与えられるというのと同じです。なので、P^τ_μ は X_μ の正準運動量で、σ による運動量密度と言えます。$p_\mu(\tau)$ を τ で微分すると

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}=\int_0^{\sigma_1}d\sigma\ \frac{\partial}{\partial\tau}P^\tau_\mu=-\int_0^{\sigma_1}d\sigma\ \frac{\partial}{\partial\sigma}P^\sigma_\mu=P^\sigma_\mu\Big|_0^{\sigma_1}$$

自由端条件を入れれば 0 になるので、p_μ は世界面における保存量とみなせます。閉弦では周期的境界条件のために $\sigma=0$ と $\sigma=\sigma_1$ の地点は同じなので、消えます。

p_μ は τ による保存量ですが、パラメータ変換に対する不変性があるので、$\tau=t$ となるように選べば時空の時間 t による保存量になります。

より一般的な p_μ の定義は、$\sigma=0,\sigma=\sigma_1$ で弦 (世界面) の端になる曲線 C(パラメータ空間での) に沿った積分によって与えられます。この積分において、$(P^\tau_\mu,P^\sigma_\mu)$ は曲線に沿ったベクトル $(d\tau,d\sigma)$ に直交するように流れてくると考え、ベクトル $(d\sigma,-d\tau)$ の方向に流れているとします。つまり、カレント $J^i=(P^\tau_\mu,P^\sigma_\mu)$ を $(d\sigma,-d\tau)$ の方に向ければいいので、内積によって $(d\tau,d\sigma)$ を横切る運動量は

$$(P^\tau_\mu,P^\sigma_\mu)(d\sigma,-d\tau)=P^\tau_\mu d\sigma-P^\sigma_\mu d\tau=dp_\mu$$

これを曲線に沿って積分すれば曲線を横切る全ての運動量になるので、曲線を横切る全運動量として

$$p_\mu=\int_C(P^\sigma_\mu d\sigma-P^\tau_\mu d\tau)$$

このとき、通常のカレント (フラックス) の考え方と同じように閉じた領域とするために曲線 C が閉じているとして、ガウスの定理 (グリーンの定理) から

$$p_\mu=\oint_C(P^\sigma_\mu d\sigma-P^\tau_\mu d\tau)=\int_S d\tau d\sigma\Big(\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial\tau}+\frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial\sigma}\Big)$$

S は C で囲まれた面です。これがより一般的な p_μ となり、曲線の選び方によりません。曲線を τ が一定だとして、σ 積分の範囲を $0\sim\sigma_1$ に取れば (9) と一致します。

最後に、南部・後藤作用と等価な作用を示します。南部・後藤作用はルートを含んでいるために扱いづらいので、ルートを含まない等価な作用を導出します。まず、パラメータに対する計量 γ_{ij} の逆 γ^{ij} を余因子から求めると

$$\gamma^{ij}=\frac{1}{\det\gamma_{ij}}\begin{pmatrix}\gamma_{22}&-\gamma_{21}\\-\gamma_{12}&\gamma_{11}\end{pmatrix}$$

$$\gamma\gamma^{ij}=\begin{pmatrix}\gamma_{22}&-\gamma_{21}\\-\gamma_{12}&\gamma_{11}\end{pmatrix}$$

右辺の行列は γ^{ij} の余因子です。行列式は成分で書くと

$$\gamma=\det\gamma_{ij}=\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{21}\gamma_{12}$$

この行列式に対して変分を考えると

$$\delta\gamma=\delta\det\gamma_{ij}=\gamma_{11}\delta\gamma_{22}+\gamma_{22}\delta\gamma_{11}-\gamma_{21}\delta\gamma_{12}-\gamma_{12}\delta\gamma_{21}$$

これと $\gamma\gamma^{ij}$ の成分を見比べることで

$$\delta\gamma = \gamma\gamma^{22}\delta\gamma_{22} + \gamma\gamma^{11}\delta\gamma_{11} + \gamma\gamma^{12}\delta\gamma_{12} + \gamma\gamma^{21}\delta\gamma_{21} = \gamma\gamma^{ij}\delta\gamma_{ij}$$

2×2 行列だったので直接行列成分を見ましたが、違った求め方は一般相対性理論の「ラグランジアン密度」でやっています。

この結果を使って γ_{ij} の変分による方程式を求めます。(7) から、γ_{ij} の変分による作用の変分を見てみると

$$\begin{aligned}
\delta S =& -\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta\sqrt{-\gamma} \\
=& -\frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{-\gamma}\delta\gamma \quad (\delta\sqrt{-\gamma} = -\frac{1}{2}(-\gamma)^{-1/2}\delta\gamma) \\
=& -\frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\delta\gamma_{ij}
\end{aligned}$$

計量 γ_{ij} は X_μ の微分なので、$\delta\gamma_{ij}$ は X_μ の変分によると考えて

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^i}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^j} \ \Rightarrow \ \delta\gamma_{ij} = \frac{\partial (X_\mu + \delta X_\mu)}{\partial \xi^i}\frac{\partial (X^\mu + \delta X^\mu)}{\partial \xi^j} - \gamma_{ij} = \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^i}\frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \delta X_\mu}{\partial \xi^i}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^j} \tag{10}$$

とすれば、$\delta\gamma_{ij}$ は δX_μ に置き換わって

$$\begin{aligned}
\delta S =& -\frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^i}\frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \delta X_\mu}{\partial \xi^i}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^j}) \\
=& -\frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \Big[\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^i}\delta X^\mu) - \frac{\partial}{\partial \xi^j}(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^i})\delta X^\mu \\
& \qquad + \frac{\partial}{\partial \xi^i}(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^j}\delta X_\mu) - \frac{\partial}{\partial \xi^i}(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^j})\delta X_\mu\Big] \\
=& \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial}{\partial \xi^i}(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^j})\delta X^\mu
\end{aligned} \tag{11}$$

$\xi^1 = \tau, \xi^2 = \sigma$ の全微分は上での話と同じように消えるとし、γ_{ij} が対称であることを使っています。そして作用の変分が 0 を要求することで、γ_{ij} の変分による方程式

$$\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\partial_j X_\mu) = 0 \quad \big(\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}\big) \tag{12}$$

が出てきます。このとき γ_{ij} が X_μ と $\partial_i X_\mu$ に依存していないとして (パラメータには依存する)、それを g_{ij} とします。そうすると、計量に対しては X_μ に関する微分を考えなくてよくなります。

これは南部・後藤作用から γ_{ij} の変分による方程式として出てきていますが、(10),(11) から X_μ の変分によって出てきていると読み替えることができます。つまり、(12) を X_μ に対する変分によって出てくる方程式だとすることで、ラグランジアンを

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X_\mu = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

と与えられます。オイラー・ラグランジュ方程式 (8) に入れれば実際に確かめられます。よって作用は

$$S = -\frac{1}{2}\frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{-g}g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

これをポリヤコフ (Polyakov) 作用と言い、ルートがいなくなっています (ポリヤコフが作ったわけではなく、ポリヤコフが経路積分で使ったらしい)。4 次元時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ とパラメータに対する新しい計量 g_{ij} の 2 つがいることに注意してください。下の補足の最後も見てください。

ポリヤコフ作用は南部・後藤作用での γ_{ij} と X_μ の変分を繋いで変形してきただけなので ((10) によって繋がっている)、等価であると言うためには途中で置き換えた g_{ij} が実際に $g_{ij}=\gamma_{ij}$ となっていることを示せばいいです。

簡単に確かめます。ポリヤコフ作用から g_{ij} の運動方程式を求めます。そのために、g_{ij} の変分 δg_{ij} によって作用の変分 δS が消えるとします。変分にひっかかる部分を計算すると ($\Delta_{ij}=\partial_i X^\mu\partial_j X^\nu\eta_{\mu\nu}$)

$$
\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}g^{ij}\Delta_{ij}) &= \delta\sqrt{-g}g^{ij}\Delta_{ij}+\sqrt{-g}\delta g^{ij}\Delta_{ij}\\
&= \delta\sqrt{-g}g^{ij}\Delta_{ij}+\sqrt{-g}\delta g^{ij}\Delta_{ij}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}g^{ij}\delta g_{ab}\Delta_{ij}+\sqrt{-g}\delta g^{ij}\Delta_{ij}\\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}g^{ij}\delta g^{ab}\Delta_{ij}+\sqrt{-g}\delta g^{ij}\Delta_{ij}\\
&= (-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}g^{ij}\Delta_{ij}+\sqrt{-g}\Delta_{ab})\delta g^{ab}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

途中で計量の性質 $g_{ij}g^{ij}=\delta^i_i$ によって

$$
g^{ij}\delta g_{ij}+g_{ij}\delta g^{ij}=0
$$

となることを使っています。これから $\delta S=0$ となるには

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\partial_i X^\mu\partial_j X^\nu\eta_{\mu\nu}+\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu\eta_{\mu\nu}\\
\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi^a}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^b} &= \frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi^i}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^j}
\end{aligned}
$$

これが g_{ij} に対する運動方程式です。運動方程式と言っても、ラグランジアンで計量に対する微分がないことからも分かるように、運動しないものです (ラグランジアンの g_{ij} に運動方程式を入れて消せる)。これに γ_{ij} の定義を持ってくると

$$
\gamma_{ab}=\frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\gamma_{ij}\qquad(\gamma_{ij}=\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi^i}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^j}=\partial_i X_\mu\partial_j X^\mu)
$$

この式は右辺の i,j の内積部分はスカラーであるので、$g_{ab}=f^2(\xi)\gamma_{ab}$ と書けます。この $f^2(\xi)$ はラグランジアンに影響しないので、南部・後藤作用とポリヤコフ作用は等価と言えます。影響しない理由は行列式

$$
\det g_{ab}=f^4(\xi)\det\gamma_{ab}
$$
$$
g=f^4\gamma
$$
$$
\sqrt{-g}=f^2\sqrt{-\gamma}
$$

と逆行列が

$$g_{ab}\gamma^{ab} = f^2(\xi)$$
$$g_{ab}\frac{\gamma^{ab}}{f^2} = 1$$
$$g^{ab} = \frac{\gamma^{ab}}{f^2}$$

であることから (2 行目の 1 は単位行列)、

$$\sqrt{-g}g^{ab} = f^2\sqrt{-\gamma}\frac{\gamma^{ab}}{f^2} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{ab} \tag{14}$$

となっているからです。
　もしくは、ポリヤコフ作用での g_{ij} を γ_{ij} から

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (\partial_1 X)^2 & (\partial_1 X)\cdot(\partial_2 X) \\ (\partial_2 X)\cdot(\partial_1 X) & (\partial_2 X)^2 \end{pmatrix}$$
$$g^{ij} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} (\partial_2 X)^2 & -(\partial_1 X)\cdot(\partial_2 X) \\ -(\partial_2 X)\cdot(\partial_1 X) & (\partial_1 X)^2 \end{pmatrix}$$

としたものをポリヤコフ作用に入れると

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}g^{ij}\partial_i X^\mu\partial_j X^\nu\eta_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}(g^{11}\partial_1 X^\mu\partial_1 X^\nu + g^{22}\partial_2 X^\mu\partial_2 X^\nu + 2g^{12}\partial_1 X^\mu\partial_2 X^\nu)\eta_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{-g}}((\partial_2 X)^2\partial_1 X^\mu\partial_1 X^\nu + (\partial_1 X)^2\partial_2 X^\mu\partial_2 X^\nu - 2(\partial_1 X)\cdot(\partial_2 X)\partial_1 X^\mu\partial_2 X^\nu)\eta_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{-g}}(2(\partial_1 X)^2(\partial_2 X)^2 - 2((\partial_1 X)\cdot(\partial_2 X))^2) \\
&= -2\frac{1}{\sqrt{-(\partial_1 X)^2(\partial_2 X)^2 + ((\partial_1 X)\cdot(\partial_2 X))^2}}((\partial_1 X)^2(\partial_2 X)^2 - ((\partial_1 X)\cdot(\partial_2 X))^2) \\
&= 2\sqrt{-(\partial_1 X)^2(\partial_2 X)^2 + ((\partial_1 X)\cdot(\partial_2 X))^2} \\
&= 2\sqrt{(\frac{\partial X}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial X}{\partial\sigma})^2 - (\frac{\partial X}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial X}{\partial\tau})(\frac{\partial X}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial X}{\partial\sigma})}
\end{aligned}$$

となるので、南部・後藤作用と一致するのが分かります。つまり、計量 g_{ij} の運動方程式を介することで等価になっています。
　最後に、エネルギー・運動量テンソルを見ておきます。まずは、ついでにパラメータ変換について補足的な話をしておきます。パラメータ変換は、2 つのパラメータを ξ^a として

$$\xi^a \ \Rightarrow\ \xi'^a$$

と変換するものです。例えば、無限小変換の形にすれば

$$\xi^a \ \Rightarrow\ \xi' = \xi^a - \epsilon^a(\xi)$$

となります。この変換によって計量は

$$g_{ij}(\xi)=g_{ab}(\xi')\frac{\partial\xi'^a}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi'^b}{\partial\xi^j}$$

という変換を受けます。(4) あたりの話と同じです。このとき、ξ^a を座標変換だと思えば、これは一般相対論での一般座標変換と同じものです。このためパラメータ変換を一般座標変換の別の言い方 (数学的な言い方) である diffeomorphism と呼ぶことが頻繁にあります。そうすると積分における

$$d\xi^1 d\xi^2\sqrt{-g}$$

がパラメータ変換に対して不変であることは、一般座標変換の話から分かります。
　作用が持っているワイル対称性 (Weyl symmetry) にも触れておきます。これはワイル変換

$$\begin{aligned}
g_{ab}(\xi)\ &\Rightarrow\ g'_{ab}(\xi)=e^{\phi(\xi)}g_{ab}(\xi)\\
g^{ab}(\xi)\ &\Rightarrow\ g'^{ab}(\xi)=e^{-\phi(\xi)}g^{ab}(\xi)\\
X^\mu(\xi)\ &\Rightarrow\ X'^\mu(\xi)=X^\mu(\xi)
\end{aligned}$$

による対称性です ($g_{ab}g^{bc}=g'_{ab}g'^{bc}=\delta^c_a$)。計量 g_{ab} はスケール変換で、X^μ は変化しないという変換です。不変であることは (14) の導出と同じです。(14) のときもそうですが、これはパラメータの次元が 2 のときに不変になっていることに注意してください。
　エネルギー・運動量テンソルを出します。エネルギー・運動量テンソルは場の量子論の「曲がった時空でのスカラー場」や一般相対性理論の「ラグランジアン密度」で出てくるように、計量の変分によって

$$T_{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$$

と与えられます。これをポリヤコフ作用の状況に合わせることで、世界面での対称性によるエネルギー・運動量テンソルとして

$$T_{ab}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{ab}(x)}$$

となります (定義によっては c/T_0 をつけたり、2 を省いたりされます)。作用の g^{ab} による変分の部分は (13) で求めているので、ポリヤコフ作用から

$$\begin{aligned}
T_{ab}=&\ -\frac{1}{2}\frac{T_0}{c}\frac{-2}{\sqrt{-g}}(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}g^{ij}\Delta_{ij}+\sqrt{-g}\Delta_{ab})\\
=&\ -\frac{T_0}{c}(-\frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\partial_iX^\mu\partial_jX_\mu+\partial_aX^\mu\partial_bX_\mu)
\end{aligned}$$

そして、ポリヤコフ作用は作用の変分が消えることを要求しているので

$$T_{ab}=-\frac{T_0}{c}(-\frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\partial_iX^\mu\partial_jX_\mu+\partial_aX^\mu\partial_bX_\mu)=0$$

このようにエネルギー・運動量テンソルが消えることを条件として課しています。
　また、エネルギー・運動量テンソルのトレース $T^a_{\ a}$ を計算してみると

$$
\begin{aligned}
T^a{}_a = g^{ab}T_{ab} = & -\frac{T_0}{c}(-\frac{1}{2}g^{ab}g_{ab}g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X_\mu + g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu) \\
= & -\frac{T_0}{c}(-\frac{1}{2}\delta^a_a g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X_\mu + g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu) \\
= & -\frac{T_0}{c}(-g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu) \\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

なので、トレースが 0 という性質を持っています。このトレースが 0 になるというのはワイル変換に対する不変性から来ています。このことを簡単に示します。計量 g^{ab} の変分に対する作用の変分は汎関数微分によって

$$
\delta S = \int d\xi^1 d\xi^2 \frac{\delta S}{\delta g^{ab}(\xi)}\delta g^{ab}(\xi) = -\frac{1}{2}\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{-g}T_{ab}\delta g^{ab}
$$

とかけるので、ワイル変換 $e^{-\phi}g^{ab} \simeq (1-\phi)g^{ab}$ からの $\delta g^{ab} = -\phi g^{ab}$ を入れれば

$$
\delta S = -\frac{1}{2}\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{-g}T_{ab}(-\phi g^{ab}) = \frac{1}{2}\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{-g}g^{ab}T_{ab}\phi
$$

作用はワイル変換に対して不変であるために、$\delta S = 0$ から

$$
g^{ab}T_{ab} = T^a{}_a = 0
$$

となります。もしくは、具体的に変分を取った (13) において、$\delta g^{ab} = -\phi g^{ab}$ を入れれば 0 になることからも分かります。

・補足

最初に出てきた点粒子の作用の式は質量 m が 0 のときに使えなくなります。質量 0 でも使える作用を示しておきます。そのためにハミルトニアンを求めます。共役運動量は (1) から

$$
p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \qquad (\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau})
$$

運動方程式はこれを τ 微分したものです。これをハミルトニアンの定義

$$
H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu - L = p_\mu \dot{x}^\mu - L
$$

に入れれば

$$
H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu - L = p_\mu \dot{x}^\mu - L = \frac{mc\dot{x}^2}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + mc\sqrt{-\dot{x}^2} = 0
$$

となって、ハミルトニアンが消えることが分かります。このことは拘束条件があることを意味します。共役運動量の 2 乗を取ってみると

$$
p^\mu p_\mu = \frac{m^2c^2\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{-\dot{x}^2} = -m^2c^2
$$

これより

$$p^2 + m^2c^2 = 0$$

という質量殻条件が出て、これが拘束条件となります。この拘束条件をラグランジアンにラグランジュの未定乗数によって加えて

$$L = -mc\sqrt{-\dot{x}^2} - \frac{\lambda(\tau)}{2}(p^2 + m^2c^2) = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{\lambda(\tau)}{2}(p^2 + m^2c^2)$$

ラグランジアンの変数は $\dot{x}$ なので共役運動量で微分すれば 0 にならなければいけないので

$$\frac{\partial L}{\partial p_\mu} = \dot{x}^\mu - \lambda p^\mu = 0$$

$$p^\mu = \frac{1}{\lambda}\dot{x}^\mu$$

これをラグランジアンに入れて共役運動量を消して

$$\begin{aligned}
L &= p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{\lambda}{2}(p^2 + m^2c^2) \\
&= \frac{1}{\lambda}\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu - \frac{\lambda}{2}\big(\frac{1}{\lambda^2}\dot{x}^2 + m^2c^2\big) \\
&= \frac{\lambda}{2}\big(\frac{2}{\lambda^2}\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{\lambda^2}\dot{x}^2 - m^2c^2\big) \\
&= \frac{\lambda(\tau)}{2}\big(\frac{1}{\lambda^2(\tau)}\dot{x}^2 - m^2c^2\big)
\end{aligned}$$

となり、$m = 0$ でも使えるラグランジアンになります。
　これがちゃんと元の作用に対応していることを確かめておきます。このラグランジアンによる作用は

$$S = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \lambda(\tau)(\lambda^{-2}(\tau)\dot{x}^2 - m^2c^2)$$

今度は λ の変分をとってみると ($\delta\lambda$ の 2 次は無視して)

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ (\frac{1}{\lambda + \delta\lambda}\dot{x}^2 - (\lambda + \delta\lambda)m^2c^2) - S \\
&= \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ (-\frac{1}{\lambda^2}\dot{x}^2 - m^2c^2)\delta\lambda
\end{aligned}$$

作用の変分は消えることを要求することで

$$-\frac{1}{\lambda^2}\dot{x}^2 - m^2c^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{m^2c^2}\dot{x}^2$$

$$\lambda = \frac{1}{mc}\sqrt{-\dot{x}^2}$$

これを作用に入れなおすと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ (-mc\sqrt{-\dot{x}^2} - mc\sqrt{-\dot{x}^2}) \\ &= -mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \sqrt{-\dot{x}^2} \end{aligned}$$

となって、(1) に一致します。また、x_μ の変分をとってみると (δx の 2 次は無視して)

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \lambda(\tau)\Big(\lambda^{-2}(\tau)\frac{d(x_\mu+\delta x_\mu)}{d\tau}\frac{d(x^\mu+\delta x^\mu)}{d\tau} - m^2c^2\Big) - S \\ &= \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \lambda^{-1}(\tau)\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \Big(\frac{d}{d\tau}(\lambda^{-1}(\tau)\frac{dx_\mu}{d\tau}\delta x^\mu) - \frac{d}{d\tau}(\lambda^{-1}(\tau)\frac{dx_\mu}{d\tau})\delta x^\mu\Big) \end{aligned}$$

第一項は τ_i, τ_f で消えるとすれば、作用の変分が 0 になるには

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda^{-1}(\tau)\frac{dx_\mu}{d\tau}) = 0$$

これに λ を入れると

$$\frac{d}{d\tau}(\frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}) = \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$$

共役運動量の τ 微分なので、元の作用の運動方程式と一致します。
　そして $m=0$ とした場合

$$S = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \lambda(\tau)(\lambda^{-2}(\tau)\dot{x}^2) = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \sqrt{-g}(g^{11}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\eta_{\mu\nu})$$

これは $-g^{11} = \lambda^{-2}$ として $g_{11}g^{11} = 1$ より

$$g_{11} = -\lambda^2\ \Rightarrow\ -g = -\det g_{11} = -g_{11} = \lambda^2$$

としています。つまり、1 次元の計量 g^{11} を使った表記になっています。形を見比べれば分かるように、これを 2 次元にもっていくとポリヤコフ作用になります。このため、ポリヤコフ作用には拘束条件が入っていて、計量の指定によって拘束条件が出てきます。