時空での超対称性

時空上の超対称性によってフェルミオンを加えます。一般化した状況ではやらずに、4 次元でスピノールはマヨラナスピノールだとします。
ここでは場の量子論での「Wess-Zumino モデル」と「超ポアンカレ代数」で求めたものを使っています。
作用を作った後は超対称性変換に対して不変であることを確かめてるだけです。
添え字がゴチャゴチャしているので気をつけてください。

最初に超空間 (superspace) を導入します。超空間は 4 次元時空の座標 x^μ にグラスマン数の座標を加えたものです。θ_a をグラスマン数とすれば (a は $1,2,3,4$)、超空間の座標を (x^μ, θ_a) で与えます。ミンコフスキー空間の平行移動はポアンカレ代数の中にいるので、それにグラスマン数 (スピノール) を加えた超空間での平行移動は超ポアンカレ代数によると考えます。

超ポアンカレ代数の生成子は、通常の平行移動の生成子 P_μ、ローレンツ変換の生成子 $J_{\mu\nu}$、超対称性変換の生成子の Q_a です。簡単のために超対称性変換の生成子は 1 つにしています ($N = 1$ の超対称性)。無限小変換を考えたとき、x^μ, θ_a を平行移動させる生成子は P_μ と Q_a のはずなので、これらを exp に乗せた変換を超空間の平行移動とします。超空間上の場 $F(x^\mu, \theta)$ の平行移動の変換は通常の平行移動と同じように考えて

$$F(x^\mu + \delta x^\mu, \theta_a + \delta\theta_a) = e^{-i\bar{\epsilon}Q} e^{-ia^\mu P_\mu} F(x^\mu, \theta) e^{ia^\mu P_\mu} e^{i\bar{\epsilon}Q}$$

a^μ は通常の数、ϵ は定数のグラスマン数です ($\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger \gamma_0$)。ちなみに例えば「生成子・ポアンカレ群」と符号が変わっていますが定義上の差でしかないです。ただし、符号が反転する箇所もあります。

実際にこれでどのような平行移動になっているのかは、$F(0,0)$ から $F(x^\mu + \delta x^\mu, \theta_a + \delta\theta_a)$ への変換

$$\exp[-ia^\mu P_\mu - i\bar{\epsilon}Q] \exp[-ix^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q]$$

から分かります。これは平行移動の形はハウスドルフの公式

$$e^A e^B = \exp\big[A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \cdots\big]$$

から

$$e^{-ia^\mu P_\mu} e^{-ix^\mu P_\mu} = e^{-i(x^\mu + a^\mu)P_\mu} \ \Rightarrow\ x^\mu + a^\mu$$

と求められるからです。同じようにハウスドルフの公式を使って計算してみると、超対称性変換 (場の量子論の「超ポアンカレ代数」参照) を使って

$$
\begin{aligned}
&\exp[-ia^\mu P_\mu - i\bar{\epsilon}Q]\exp[-ix^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q] \\
&\simeq \exp[-ix^\mu P_\mu - ia^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q - i\bar{\epsilon}Q + \frac{1}{2}[ia^\mu P_\mu + i\bar{\epsilon}Q, ix^\nu P_\nu + i\bar{\theta}Q]] \\
&= \exp[-ix^\mu P_\mu - ia^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q - i\bar{\epsilon}Q + \frac{1}{2}[i\bar{\epsilon}Q, i\bar{\theta}Q]] \quad ([P_\mu, P_\nu] = 0\ ,\ [Q_a, P_\mu] = 0) \\
&= \exp[-ix^\mu P_\mu - ia^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q - i\bar{\epsilon}Q - \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}Q\bar{\theta}Q - \bar{\theta}Q\bar{\epsilon}Q)] \\
&= \exp[-ix^\mu P_\mu - ia^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q - i\bar{\epsilon}Q - \frac{1}{2}(-\bar{\epsilon}_a\bar{\theta}_b Q_a Q_b - \bar{\epsilon}_a\bar{\theta}_b Q_b Q_a)] \quad (\bar{\theta}_a\bar{\epsilon}_b = -\bar{\epsilon}_b\bar{\theta}_a) \\
&= \exp[-ix^\mu P_\mu - ia^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q - i\bar{\epsilon}Q + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_a\bar{\theta}_b(Q_a Q_b + Q_b Q_a)] \\
&= \exp[-ix^\mu P_\mu - ia^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q - i\bar{\epsilon}Q + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_a\bar{\theta}_b\{Q_a, Q_b\}] \\
&= \exp[-ix^\mu P_\mu - ia^\mu P_\mu - i\bar{\theta}Q - i\bar{\epsilon}Q + \bar{\epsilon}_a\bar{\theta}_b(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu] \quad (\{Q_a, Q_b\} = 2(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu) \\
&= \exp[-i(x^\mu + a^\mu + i\bar{\epsilon}_a(\gamma^\mu C)_{ab}\bar{\theta}_b)P_\mu - i(\bar{\theta} + \bar{\epsilon})Q]
\end{aligned}
$$

C は荷電共役演算子です。これから超空間の平行移動は

$$
\begin{aligned}
x^\mu &\Rightarrow x^\mu + a^\mu + i\bar{\epsilon}_a(\gamma^\mu C)_{ab}\bar{\theta}_b \\
\theta_a &\Rightarrow \theta_a + \epsilon_a
\end{aligned}
$$

となっていることが分かります。ϵ, θ を 4 成分マヨラナスピノールとして、$C\bar{\theta}^T = \theta_C = \theta$ (T は転置) とすれば

$$
i\bar{\epsilon}_a(\gamma^\mu C)_{ab}\bar{\theta}_b = i\bar{\epsilon}\gamma^\mu C\bar{\theta}^T = i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta_C = i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta
$$

なので、4 成分マヨラナスピノールに対する平行移動は

$$
x^\mu \Rightarrow x^\mu + a^\mu + i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta \tag{1a}
$$

$$
\theta_a \Rightarrow \theta_a + \epsilon_a \tag{1b}
$$

グラスマン数を 2 つ含む項は普通の数として扱えます。時空の平行移動だけでなく、グラスマン数の平行移動も加えているので、ねじれた平行移動と表現されたりします。

同様に 2 成分マヨラナスピノールでも出来ます。2 成分マヨラナスピノール $\epsilon_A, \bar{\epsilon}_{\dot{A}}$ ($(\epsilon_A)^\dagger = \bar{\epsilon}_{\dot{A}}$) を使って

$$
\exp[-ia^\mu P_\mu - i\epsilon^A Q_A - i\bar{\epsilon}_{\dot{A}}\overline{Q}^{\dot{A}}]
$$

とします ($A, \dot{A} = 1, 2$)。内積は

$$
\epsilon Q = \epsilon^A Q_A\ ,\ \bar{\epsilon}\overline{Q} = \bar{\epsilon}_{\dot{A}}\overline{Q}^{\dot{A}}
$$

と定義し、添え字の上げ下げは

$$\chi^A = \epsilon^{AB}\chi_B \ , \ \overline{\chi}^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\overline{\chi}_{\dot{B}}$$

$$\epsilon_{AB} = -\epsilon^{AB} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = -\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \ , \ \epsilon_{12} = -\epsilon^{12} = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -\epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -1$$

で行います。これも同じようにすると (θ, ϵ は 2 成分マヨラナスピノール)

$$\begin{aligned}
&\exp[-ia^\mu P_\mu - i\epsilon Q - i\overline{\epsilon Q}]\exp[-ix^\mu P_\mu - i\theta Q - i\overline{\theta Q}]\\
&\quad= \exp[-i(x^\mu + a^\mu)P_\mu - i(\theta+\epsilon)Q - i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon}) + \frac{1}{2}[i\epsilon Q + i\overline{\epsilon Q}, i\theta Q + i\overline{\theta Q}]]\\
&\quad= \exp[-i(x^\mu + a^\mu)P_\mu - i(\theta+\epsilon)Q - i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon}) + \frac{1}{2}[i\overline{\epsilon Q}, i\theta Q] + \frac{1}{2}[i\epsilon Q, i\overline{\theta Q}]]\\
&\quad= \exp[-i(x^\mu + a^\mu)P_\mu - i(\theta+\epsilon)Q - i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon}) - \frac{1}{2}(\overline{\epsilon Q}\theta Q - \theta Q\overline{\epsilon Q}) - \frac{1}{2}(\epsilon Q\overline{\theta Q} - \overline{\theta Q}\epsilon Q)]\\
&\quad= \exp[-i(x^\mu + a^\mu)P_\mu - i(\theta+\epsilon)Q - i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon})\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}(\theta^A\overline{\epsilon}_{\dot{B}}\overline{Q}^{\dot{B}}Q_A + \theta^A\overline{\epsilon}_{\dot{B}}Q_A\overline{Q}^{\dot{B}}) - \frac{1}{2}(\overline{\theta}_{\dot{A}}\epsilon^B Q_B\overline{Q}^{\dot{A}} + \overline{\theta}_{\dot{A}}\epsilon^B\overline{Q}^{\dot{A}}Q_B)]\\
&\quad= \exp[-i(x^\mu + a^\mu)P_\mu - i(\theta+\epsilon)Q - i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon}) - \frac{1}{2}\theta^A\overline{\epsilon}_{\dot{B}}\{Q_A, \overline{Q}^{\dot{B}}\} - \frac{1}{2}\overline{\theta}_{\dot{A}}\epsilon^B\{\overline{Q}^{\dot{A}}, Q_B\}]\\
&\quad= \exp[-i(x^\mu + a^\mu)P_\mu - i(\theta+\epsilon)Q - i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon}) + \frac{1}{2}\theta^A\overline{\epsilon}^{\dot{B}}\{Q_A, \overline{Q}_{\dot{B}}\} + \frac{1}{2}\overline{\theta}^{\dot{A}}\epsilon^B\{\overline{Q}_{\dot{A}}, Q_B\}]\\
&\quad= \exp[-i(x^\mu + a^\mu)P_\mu - i(\theta+\epsilon)Q - i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon})\overline{Q} + \theta^A\overline{\epsilon}^{\dot{B}}(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}P_\mu + \overline{\theta}^{\dot{A}}\epsilon^B(\sigma^\mu)_{B\dot{A}}P_\mu]\\
&\quad= \exp[-i(x^\mu + a^\mu + i\theta^A(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}\overline{\epsilon}^{\dot{B}} - i\epsilon^B(\sigma^\mu)_{B\dot{A}}\overline{\theta}^{\dot{A}})P_\mu - i(\theta+\epsilon)Q - i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon})]
\end{aligned}$$

途中で使っている関係は

$$\begin{aligned}
&\chi^A\eta_A = -\chi_A\eta^A \ , \ \overline{\chi}_{\dot{A}}\overline{\eta}^{\dot{A}} = -\overline{\chi}^{\dot{A}}\overline{\eta}_{\dot{A}}\\
&\{Q_A, \overline{Q}_{\dot{B}}\} = 2(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}P_\mu\\
&[Q_A, P_\mu] = 0 \ , \ [\overline{Q}_{\dot{A}}, P_\mu] = 0 \ , \ \{Q_A, Q_B\} = \{\overline{Q}_{\dot{A}}, \overline{Q}_{\dot{B}}\} = 0\\
&[\theta Q, \epsilon Q] = \theta Q\epsilon Q - \epsilon Q\theta Q = -\theta_A\epsilon_B Q_A Q_B - \theta_A\epsilon_B Q_B Q_A = -\theta_A\epsilon_B\{Q_A, Q_B\} = 0\\
&[\overline{\theta Q}, \overline{\epsilon Q}] = 0\\
&\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)
\end{aligned}$$

σ^i はパウリ行列で、σ^0 は単位行列です。というわけで、2 成分マヨラナスピノールでの平行移動は

$$\begin{aligned}
x^\mu &\Rightarrow x^\mu + a^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\epsilon} - i\epsilon\sigma^\mu\overline{\theta} \quad (\theta^A(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}\overline{\epsilon}^{\dot{B}} = \theta\sigma^\mu\overline{\epsilon})\\
\theta &\Rightarrow \theta + \epsilon\\
\overline{\theta} &\Rightarrow \overline{\theta} + \overline{\epsilon}
\end{aligned}$$

このように超対称性変換は超空間の平行移動となっています。

まずは粒子の場合を見ていきます。作用は「相対論的な弦」の補足で示した

$$\frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \lambda^{-1}(\tau)\dot{x}^2$$

を使います (質量は 0 にします)。$\lambda(\tau)$ は未定乗数で、1 次元の計量に対応します。これから超対称性変換に対して不変になるように項を加えます。4 成分マヨラナスピノールでの超対称性変換の形 (超空間の平行移動)(1a),(1b) から

$$-i\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta}$$

という項を $\dot{x}$ に加えれば (4 元ベクトルになっている)、超対称性変換に対して不変になります。実際に、ϵ は定数なので、変換によって

$$\dot{x}\ \Rightarrow\ \dot{x}^\mu + i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\dot{\theta}$$

$$-i\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta}\ \Rightarrow\ -i(\bar{\theta}+\bar{\epsilon})\gamma^\mu\dot{\theta} = -i\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta} - i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\dot{\theta}$$

となって、余計な項が打ち消しあいます。よって、超対称性変換に対して不変な作用は

$$S = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \lambda^{-1}(\dot{x}^\mu - i\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta})(\dot{x}^\nu - i\bar{\theta}\gamma^\nu\dot{\theta})\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\ \lambda^{-1}\Pi^\mu\Pi^\nu\eta_{\mu\nu}$$

このようにボソンの点粒子 (座標) から、超対称性変換で繋がっている時空上のスピノールの座標が導入されます。これは、ミンコフスキー空間上のボソンの粒子から、超空間上の超対称性を持った粒子になったということです。

これの x^μ に対する運動方程式は、オイラー・ラグランジュ方程式から

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda^{-1}(\dot{x}^\mu - i\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta})) = \frac{d}{d\tau}(\lambda^{-1}\Pi^\mu) = 0$$

θ の運動方程式は $\bar{\theta}$ でのオイラー・ラグランジュ方程式から出てきます。グラスマン数の微分は左から作用するように定義して、$\bar{\theta}$ 微分は

$$-2i\lambda^{-1}\gamma^\mu\dot{\theta}(\dot{x}^\nu - i\bar{\theta}\gamma^\nu\dot{\theta})\eta_{\mu\nu} = -2i\lambda^{-1}\gamma^\mu\dot{\theta}\Pi^\nu\eta_{\mu\nu}$$

なので、θ の運動方程式として

$$\eta_{\mu\nu}\Pi^\mu\gamma^\nu\dot{\theta} = 0$$

λ はそのままで

$$\Pi^\mu\Pi^\nu\eta_{\mu\nu} = 0$$

というわけで、運動方程式として

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda^{-1}\Pi^\mu) = 0 \tag{2a}$$

$$\eta_{\mu\nu}\Pi^\mu\gamma^\nu\dot{\theta} = 0 \tag{2b}$$

$$\Pi^\mu\Pi^\nu\eta_{\mu\nu} = 0 \tag{2c}$$

この運動方程式 (2c) と $\Pi^\mu\gamma_\mu\Pi^\nu\gamma_\nu = -\Pi^2$ から

$$\Pi^\mu\gamma_\mu\Pi^\nu\gamma_\nu = -\Pi^2 = -\Pi^\mu\Pi^\nu\eta_{\mu\nu} = 0$$

一応注意ですが、計量が $\eta_{\mu\nu} = (+1,-1,-1,-1)$ では $p_\mu\gamma^\mu p_\nu\gamma^\nu = p^2$ ですが、$\eta_{\mu\nu} = (-1,+1,+1,+1)$ では符号が反転します。この $\Pi^\mu\gamma_\mu\Pi^\nu\gamma_\nu = 0$ のために、(2b) での方程式の数が減るので θ の自由度が落ちます (固有値方程式と見たとき $\Pi^\mu\gamma_\mu$ は固有値 0 を持ち、逆行列がない)。自由度が落ちるというのは弦でも必要な性質で、この θ の自由度を落とす性質は、局所的な対称性である κ 対称性 (カッパー対称性) によります。

κ 対称性を使う話はしないですが必要な対称性なので、簡単に変換だけを見ておきます。κ 対称性は

$$\delta_\kappa\theta = i\gamma^\mu\Pi_\mu\kappa \tag{3a}$$

$$\delta_\kappa x^\mu = i\bar{\theta}\gamma^\mu\delta_\kappa\theta \tag{3b}$$

$$\delta_\kappa\lambda = -4\lambda(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\kappa \tag{3c}$$

という変換です。κ はマヨラナスピノールで、τ に依存しています。この変換に対して Π^μ は

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa\Pi^\mu = \delta_\kappa(\dot{x}^\mu - i\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta}) &= \delta_\kappa\dot{x}^\mu - i\delta_\kappa\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta} - i\bar{\theta}\gamma^\mu\delta_\kappa\dot{\theta} \\
&= i\frac{d}{d\tau}(\delta_\kappa x^\mu) - i\delta_\kappa\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta} - i\bar{\theta}\gamma^\mu\delta_\kappa\dot{\theta} \\
&= i(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\gamma^\mu\delta_\kappa\theta + i\bar{\theta}\gamma^\mu\delta_\kappa\dot{\theta} + i\dot{\bar{\theta}}\gamma^\mu\delta_\kappa\theta - i\bar{\theta}\gamma^\mu\delta_\kappa\dot{\theta} \qquad (\dot{\bar{\theta}} = \frac{d}{d\tau}\bar{\theta}) \\
&= 2i(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\gamma^\mu\delta_\kappa\theta \\
&= -2(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\gamma^\mu\gamma^\nu\Pi_\nu\kappa
\end{aligned}$$

$\delta_\kappa\bar{\theta}$ もマヨラナスピノールなので、$\bar{\eta}\gamma^\mu\chi = -\bar{\chi}\gamma^\mu\eta$ から、$\delta_\kappa\bar{\theta}\gamma^\mu\dot{\theta} = -\dot{\bar{\theta}}\gamma^\mu\delta_\kappa\theta$ となります。よって $\Pi^\mu\Pi_\mu$ の変換は

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa(\Pi^\mu\Pi_\mu) &= \Pi_\mu\delta\Pi^\mu + \Pi^\mu\delta\Pi_\mu \\
&= -2\Pi_\mu(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\gamma^\mu\gamma^\nu\Pi_\nu\kappa - 2\Pi^\mu(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\gamma_\mu\gamma^\nu\Pi_\nu\kappa \\
&= -2(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\Pi_\mu\gamma^\mu\gamma^\nu\Pi_\nu\kappa - 2(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\Pi^\mu\gamma_\mu\gamma^\nu\Pi_\nu\kappa \\
&= -2(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\Pi^\mu\Pi_\mu\kappa - 2(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\Pi^\mu\Pi_\mu\kappa \\
&= -4\Pi^\mu\Pi_\mu(\frac{d}{d\tau}\bar{\theta})\kappa
\end{aligned}$$

これを使うことで、作用の変換は

$$
\begin{aligned}
\delta_\kappa(\lambda^{-1}\Pi^\mu\Pi_\mu) &= \delta\lambda^{-1}\Pi^\mu\Pi_\mu + \lambda^{-1}\delta(\Pi^\mu\Pi_\mu) \\
&= -\lambda^{-2}(\delta\lambda)\Pi^\mu\Pi_\mu - 4\lambda^{-1}\Pi^\mu\Pi_\mu(\frac{d}{d\tau}\overline{\theta})\kappa \\
&= 4\lambda^{-1}\Pi^\mu\Pi_\mu(\frac{d}{d\tau}\overline{\theta})\kappa - 4\lambda^{-1}\Pi^\mu\Pi_\mu(\frac{d}{d\tau}\overline{\theta})\kappa \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるので、作用は κ 対称性を持っています。κ 対称性は簡単に言えば θ に対するゲージ自由度です。

粒子の話は終わりにして弦に移ります。最初に小文字のローマ文字をスピノール成分にしていましたが、これ以降は世界面の添え字に使います (ここでは $a=0,1$ より $a=1,2$ の方が見やすい気がするので $a=1,2$ にします)。ポリヤコフ作用

$$
S = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau \int d\sigma \sqrt{-g}g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}
$$

に対して同じことをします。超対称性変換に対して不変になるように

$$
\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta
$$

と与えます (4 元ベクトル)。X^μ は座標なので、超対称性変換は (1a),(1b) と同じで

$$
X^\mu \;\Rightarrow\; X^\mu + i\overline{\epsilon}\gamma^\mu\theta \tag{4a}
$$

$$
\theta \;\Rightarrow\; \theta + \epsilon \tag{4b}
$$

$$
\overline{\theta} \;\Rightarrow\; \overline{\theta} + \overline{\epsilon} \tag{4c}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\partial_a X^\mu \;&\Rightarrow\; \partial_a(X^\mu + i\overline{\epsilon}\gamma^\mu\theta) = \partial_a X^\mu + i\overline{\epsilon}\gamma^\mu\partial_a\theta \\
i\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta \;&\Rightarrow\; i(\overline{\theta}+\overline{\epsilon})\gamma^\mu\partial_a(\theta+\epsilon) = i\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta + i\overline{\epsilon}\gamma^\mu\partial_a\theta
\end{aligned}
$$

これらから分かるように、Π_a^μ は変換に対して不変になっています。よって超対称性を持った作用は

$$
S_1 = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau \int d\sigma \sqrt{-g}g^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_b^\nu\eta_{\mu\nu}
$$

となります。しかし、これだと κ 対称性を持っていないので、κ 対称性を持つように項を加えます。それは

$$
S_2 = \frac{1}{\pi}\int d\tau \int d\sigma \epsilon^{ab}(-i\partial_a X^\mu(\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2) + \overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}
$$

となっていて、全体の作用は S_1+S_2 となります。θ^i の添え字は超対称性変換の区別で $i=1,2$ としています。κ 対称性を持つには超対称性は最大で 2 つまでしか取れないです ($N=2$ の超対称性)。$N=1$ にするには 2 の項を

消せばいいです。ϵ^{ab} はレヴィ・チビタ記号 $\epsilon^{12}=+1$ で、これはテンソル密度です。テンソル密度はテンソル T^{ab} による

$$\sqrt{-g}T^{ab}$$

と同じ変換をするので、パラメータ変換に対して不変になっています。g^{ab} を含んでいないので、S_2 はエネルギー・運動量テンソルに影響しません。このように超対称性が $N=2$ になるので、Π^μ_a も

$$\Pi^\mu_a=\partial_a X^\mu-i\overline{\theta}^i\gamma^\mu\partial_a\theta^i$$

とします。$i=1,2$ で、超対称性変換の区別です ($a,b,\dots$ は世界面の添え字で、$i,j,\dots$ は超対称性の添え字にします)。これも同じ添え字は和を取ります。

κ 対称性の変換の形だけを示せば

$$\begin{aligned}
&\delta_\kappa X^\mu=i\overline{\theta}^i\gamma^\mu\delta_\kappa\theta^i\\
&\delta_\kappa\theta^i=2i\gamma_\mu\Pi^\mu_a\kappa^{ia}\\
&\delta_\kappa\sqrt{-g}g^{ab}=-16\sqrt{-g}\big((P_-)^a{}_c g^{cd}\overline{\kappa}^{1b}\partial_d\theta^1+(P_+)^a{}_c g^{cd}\overline{\kappa}^{2b}\partial_d\theta^2\big)
\end{aligned}$$

$(P_\pm)^a{}_b$ は

$$(P_\pm)^a{}_b=\frac{1}{2}(\delta^a_b\pm\frac{\epsilon^{ac}g_{cb}}{\sqrt{-g}})$$

としています。κ^{ia} には $(P_\pm)^a{}_b$ による

$$\kappa^{1a}=(P_-)^a{}_b\kappa^{1b}\ ,\ \kappa^{2a}=(P_+)^a{}_b\kappa^{2b}$$

という条件を与えています。この変換で、例えば Π^μ_a は

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa\Pi^\mu_a&=\partial_a\delta_\kappa X^\mu-i\delta_\kappa\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta-i\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\delta_\kappa\theta\\
&=i\partial_a(\overline{\theta}\gamma^\mu\delta_\kappa\theta)-i\delta_\kappa\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta-i\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\delta_\kappa\theta\\
&=i(\partial_a\overline{\theta})\gamma^\mu\delta_\kappa\theta+i\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\delta_\kappa\theta-i\delta_\kappa\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta-i\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\delta_\kappa\theta\\
&=i(\partial_a\overline{\theta})\gamma^\mu\delta_\kappa\theta-i\delta_\kappa\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta\\
&=\ -i\delta_\kappa\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta-i\delta_\kappa\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta\\
&=\ -2i\delta_\kappa\overline{\theta}\gamma^\mu\partial_a\theta\\
&=2i\partial_a\overline{\theta}\gamma^\mu\delta_\kappa\theta
\end{aligned}$$

となっています。κ 対称性を持っていることを直接確かめるのはかなり面倒です。

このようにして時空の超対称性を使ってフェルミオン (スピノール) を導入する方法を Green-Schwarz(GS) 形式と言います。4 次元のマヨラナスピノールとしていますが、他の場合でも同じ形になります。世界面上での超対称性を使った RNS 形式、時空上での超対称性を使った GS 形式ということで、どちらも超対称性によってフェルミオンを加えています。このため、これらを超弦理論 (superstring theory) と言います。使い方に違いがある場合もありますが、超空間上を動く弦ということから、このときの弦を超弦 (superstring) と言います。「世界面上での超

対称性」では超空間を導入せずに行いましたが、世界面での超空間を考えることで RNS 形式の作用を作ることが出来ます。

ここからはダラダラと計算していくだけです。S_2 が超対称性変換に対して不変であることを確かめます。S_2 の変換は (4a–4c) を δ で表せば

$$\begin{aligned}\delta S_2 = \frac{1}{\pi}\int d\tau\int d\sigma\epsilon^{ab}\big(&-i\partial_a\delta X^\mu(\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\\&-i\partial_a X^\mu(\delta\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1+\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\delta\theta^1-\delta\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2-\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\delta\theta^2)\\&+\delta\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2+\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\delta\theta^1\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2\\&+\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\delta\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2+\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\delta\theta^2\big)\eta_{\mu\nu}\end{aligned}$$

θ^1 と θ^2 の部分は同じになっているので、θ^1 の方を見ていきます。第一項は

$$-i(\partial_a\delta X^\mu)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1=\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^i)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1$$

第二項は

$$-i\partial_a X^\mu(\delta\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1+\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\delta\theta^1)=-i\partial_a X^\mu(\overline{\epsilon}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1+\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\epsilon^1)=-i\partial_a X^\mu\overline{\epsilon}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1$$

第三項と第四項は

$$\begin{aligned}&\delta\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2=\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2\\&\overline{\theta}^1\gamma^\mu(\partial_a\delta\theta^1)\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2=0\end{aligned}$$

なので、δS_2 に出てくる項は

$$\begin{aligned}&\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^i)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2\\&-i\partial_a X^\mu\overline{\epsilon}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1+i\partial_a X^\mu\overline{\epsilon}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2\\&\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2+\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\overline{\epsilon}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2\end{aligned}$$

2 番目のは

$$\partial_a X^\mu\overline{\epsilon}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1=\partial_a(X^\mu\overline{\epsilon}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1)-X^\mu\overline{\epsilon}^1\gamma^\nu\partial_a\partial_b\theta^1$$

これの第一項は表面積分で落ち、第二項は ϵ^{ab} が反対称なので消えます。一番目のは

$$\overline{\epsilon}^i\gamma^\mu(\partial_a\theta^i)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1=\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1+\overline{\epsilon}^2\gamma^\mu(\partial_a\theta^2)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1$$

これの第二項は三番目での

$$(\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1)(\overline{\epsilon}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)=\overline{\epsilon}^2\gamma^\nu(\partial_b\theta^2)\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1$$

と打ち消しあいます (ϵ^{ab} の反対称性で符号が反転する)。よって、一番目での

$$\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\overline{\epsilon}^2\gamma^\mu(\partial_a\theta^2)\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2$$

という項が消えずに残ります。というわけで、δS_2 は

$$\delta S_2=\frac{1}{\pi}\int d\tau\int d\sigma\epsilon^{ab}(\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\overline{\epsilon}^2\gamma^\mu(\partial_a\theta^2)\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu} \tag{5}$$

これは消えるようには見えませんが、消すことが出来ます。第一項と第二項で同じことをするので第一項を見ていきます。

まず、これに表面積分で落ちる項

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{3}\epsilon^{ab}\partial_a\big((\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\theta^1)(\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1)\big)\\
&=\ -\frac{1}{3}\epsilon^{ab}\big((\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1)(\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1)+(\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\theta^1)(\partial_a\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1)+(\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\theta^1)(\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_a\partial_b\theta^1)\big)\\
&=\ -\frac{1}{3}\epsilon^{ab}(\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1)-\frac{1}{3}\epsilon^{ab}(\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\theta^1)(\partial_a\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1)
\end{aligned}$$

を加えます (2 行目の第三項は ϵ^{ab} の反対称性で消える)。$i=2$ でも同様のものを加えます。δS_2 にこれを加えることで

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{ab}\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1-\frac{1}{3}\epsilon^{ab}(\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^i)-\frac{1}{3}\epsilon^{ab}(\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\theta^1)(\partial_a\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1)\\
&\quad=\frac{1}{3}\epsilon^{ab}(2\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1-(\overline{\epsilon}^1\gamma^\mu\theta^1)(\partial_a\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1))
\end{aligned}$$

なので、ϵ^{ab} を展開していくと

$$
\begin{aligned}
&\bar{\epsilon}^1\big(2\epsilon^{ab}\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1-\epsilon^{ab}\gamma^\mu\theta^1(\partial_a\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_b\theta^1)\big)\\
&\quad=\bar{\epsilon}^1\big(2\gamma^\mu(\partial_1\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_2\theta^1-2\gamma^\mu(\partial_2\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_1\theta^1\\
&\qquad\qquad-\gamma^\mu\theta^1(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_2\theta^1)+\gamma^\mu\theta^1(\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)\big)\\
&\quad=\bar{\epsilon}^1\big(2\gamma^\mu(\partial_1\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu(\partial_2\theta^1)-2\gamma^\mu(\partial_2\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)\\
&\qquad\qquad-\gamma^\mu\theta^1(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_2\theta^1)+\gamma^\mu\theta^1(\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)\big)\\
&\quad=\bar{\epsilon}^1\big(2\gamma^\mu(\partial_1\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu(\partial_2\theta^1)\\
&\qquad\qquad+2\gamma^\mu(\partial_2\theta^1)(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu\theta^1-2\gamma^\mu(\partial_2\theta^1)(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu\theta^1-2\gamma^\mu(\partial_2\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)\\
&\qquad\qquad+2\gamma^\mu\theta^1(\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)-\gamma^\mu\theta^1(\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)\\
&\qquad\qquad-\gamma^\mu\theta^1(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_2\theta^1)\big)\\
&\quad=\bar{\epsilon}^1\big(2\big(\gamma^\mu(\partial_1\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma_\mu(\partial_2\theta^1)+\gamma^\mu(\partial_2\theta^1)(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu\theta^1+\gamma^\mu\theta^1(\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)\big)\\
&\qquad\qquad-2\gamma^\mu(\partial_2\theta^1)\big((\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu\theta^1+\overline{\theta}^1\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)\big)-\gamma^\mu\theta^1\big((\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)+(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_2\theta^1)\big)\big)
\end{aligned}
$$

第二項と第三項は θ^i がマヨラナスピノールなので

$$\bar{\xi}\gamma_\mu\eta=-\overline{\eta}\gamma_\mu\xi$$

によって

$$(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu\theta^1+\overline{\theta}^1\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)=(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu\theta^1-(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu\theta^1=0$$

$$(\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)+(\partial_1\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_2\theta^1)=(\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)-(\partial_2\overline{\theta}^1)\gamma_\mu(\partial_1\theta^1)=0$$

となって消えます。面倒なのは第一項です。
　見やすくするために、第一項を

$$\gamma^\mu\psi_1\overline{\psi}\gamma_\mu\psi_2+\gamma^\mu\psi_2\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi+\gamma^\mu\psi\overline{\psi}_2\gamma_\mu\psi_1 \tag{6}$$

と書けば、ψ_1,ψ,ψ_2 が巡回していることが分かります。これを利用します。
　結果は同じなので、「Wess-Zumino モデル」での Fierz 恒等式をそのまま使うためにガンマ行列を

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=+2\eta^{\mu\nu}$$

として、一旦計量を $(+1,-1,-1,-1)$ にします。そうすると、Fierz 恒等式は

$$(\bar{\xi}M\eta)(\overline{\psi}N\chi)=\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{16}(\bar{\xi}M\Gamma_AN\chi)(\overline{\psi}\Gamma^A\eta)$$

$$\Gamma^A=1,\gamma^\mu,\gamma^\mu\gamma_5,\sigma^{\mu\nu},i\gamma_5$$

$$\Gamma_A = 1, \gamma_\mu, -\gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}, -i\gamma_5 \quad (\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad \mu < \nu)$$

と与えられます。今の場合は $M = \gamma_\mu, N = \gamma^\mu$ なので

$$\begin{aligned}
&(\overline{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{16}(\overline{\xi}\gamma_\mu\Gamma_A\gamma^\mu\chi)(\overline{\psi}\Gamma^A\eta) \\
&= -\frac{1}{4}(\overline{\xi}\gamma_\mu\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\eta + \overline{\xi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta - \overline{\xi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta + \overline{\xi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta + \frac{1}{2}\overline{\xi}\gamma_\mu\gamma_{\alpha\beta}\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\eta)
\end{aligned}$$

ガンマ行列は

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4\ ,\ \gamma_\mu\gamma_\nu = 2\eta_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu\ ,\ \gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_\mu\ ,\ \gamma_5\gamma_5 = 1\ ,\ \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$\sigma^{\alpha\beta}\gamma^\mu$ は

$$\begin{aligned}
(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)\gamma^\mu &= (\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu - \gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\mu) \\
&= \gamma^\alpha(2\eta^{\mu\beta} - \gamma^\mu\gamma^\beta) - \gamma^\beta(2\eta^{\alpha\mu} - \gamma^\mu\gamma^\alpha) \\
&= 2\eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta - 2\gamma^\beta\eta^{\alpha\mu} + \gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha \\
&= 2\eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - (2\eta^{\alpha\mu} - \gamma^\mu\gamma^\alpha)\gamma^\beta - 2\gamma^\beta\eta^{\alpha\mu} + (2\eta^{\beta\mu} - \gamma^\mu\gamma^\beta)\gamma^\alpha \\
&= 2\eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - 2\eta^{\alpha\mu}\gamma^\beta + \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta - 2\gamma^\beta\eta^{\alpha\mu} + 2\eta^{\beta\mu}\gamma^\alpha - \gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha \\
&= 2\eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - 2\eta^{\alpha\mu}\gamma^\beta - 2\gamma^\beta\eta^{\alpha\mu} + 2\eta^{\beta\mu}\gamma^\alpha + \gamma^\mu[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]
\end{aligned}$$

なので、$\gamma_\mu\sigma^{\alpha\beta}\gamma^\mu$ では

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu(2\eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - 2\eta^{\alpha\mu}\gamma^\beta - 2\gamma^\beta\eta^{\alpha\mu} + 2\eta^{\beta\mu}\gamma^\alpha + \gamma^\mu[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]) \\
&= 2\gamma^\beta\gamma^\alpha - 2\gamma^\alpha\gamma^\beta - 2\gamma^\alpha\gamma^\beta + 2\gamma^\beta\gamma^\alpha + \gamma_\mu\gamma^\mu[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \\
&= -4\gamma^\alpha\gamma^\beta + 4\gamma^\beta\gamma^\alpha + 4[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \\
&= -4[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] + 4[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \\
&= 0
\end{aligned}$$

となって、消えます。そして、他の項は

$$\overline{\xi}\gamma_\mu\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\eta = 4\overline{\xi}\chi\overline{\psi}\eta$$

$$\overline{\xi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta = \overline{\xi}(2\eta_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta = -2\overline{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta$$

$$\overline{\xi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta = -\overline{\xi}(2\eta_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma^\mu\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta = 2\overline{\xi}\gamma_\nu\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta$$

$$\overline{\xi}\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\mu\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta = -4\overline{\xi}\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta$$

となっているので、Fierz 変換は

$$(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) = -(\bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta - \frac{1}{2}\bar{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta - \frac{1}{2}\bar{\xi}\gamma_\nu\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta - \bar{\xi}\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta) \tag{7}$$

これの左辺の $\eta, \overline{\psi}, \chi$ を ψ_1, ψ_2, ψ_3 に対応させて巡回させて

$$(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) + cycle = -(\bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta - \frac{1}{2}\bar{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta - \frac{1}{2}\bar{\xi}\gamma_\nu\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta - \bar{\xi}\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta) + cycle \tag{8}$$

そうすると、左辺の巡回と右辺第二項の巡回は

$$(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) + (\bar{\xi}\gamma_\mu\chi)(\overline{\eta}\gamma^\mu\psi) + (\bar{\xi}\gamma_\mu\psi)(\overline{\chi}\gamma^\mu\eta)$$

$$(\bar{\xi}\gamma_\nu\chi)(\overline{\psi}\gamma^\nu\eta) + (\bar{\xi}\gamma_\nu\eta)(\overline{\chi}\gamma^\nu\psi) + (\bar{\xi}\gamma_\nu\psi)(\overline{\eta}\gamma^\nu\chi)$$

となっているので、マヨラナスピノールでの関係 $\bar{\xi}\gamma_\mu\eta = -\overline{\eta}\gamma_\mu\xi$ から

$$\begin{aligned}
&(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) + cyclic - \frac{1}{2}(\bar{\xi}\gamma_\nu\chi)(\overline{\psi}\gamma^\nu\eta) - cyclic \\
&= (\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) + cyclic + \frac{1}{2}(\bar{\xi}\gamma_\nu\chi)(\overline{\eta}\gamma^\nu\psi) + cyclic \\
&= \frac{3}{2}(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) + \frac{3}{2}(\bar{\xi}\gamma_\mu\chi)(\overline{\eta}\gamma^\mu\psi) + \frac{3}{2}(\bar{\xi}\gamma_\mu\psi)(\overline{\chi}\gamma^\mu\eta)
\end{aligned}$$

となって、(8) は

$$\frac{3}{2}(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) + cyclic = -(\bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta - \frac{1}{2}\bar{\xi}\gamma_\nu\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta - \bar{\xi}\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta) + cyclic \tag{9}$$

これの右辺第一項での巡回を見てみると

$$\bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta + \bar{\xi}\eta\overline{\chi}\psi + \bar{\xi}\psi\overline{\eta}\chi$$

これの $\overline{\psi}$ と η を交換したときの巡回は

$$\bar{\xi}\chi\overline{\eta}\psi + \bar{\xi}\eta\overline{\psi}\chi + \bar{\xi}\psi\overline{\chi}\eta$$

この二つをマヨラナスピノールでの関係

$$\bar{\xi}\eta = \overline{\eta}\xi$$

を使って足せば

$$(\bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta + \bar{\xi}\eta\overline{\chi}\psi + \bar{\xi}\psi\overline{\eta}\chi) + (\bar{\xi}\chi\overline{\eta}\psi + \bar{\xi}\eta\overline{\psi}\chi + \bar{\xi}\psi\overline{\chi}\eta) = 2(\bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta + \bar{\xi}\eta\overline{\chi}\psi + \bar{\xi}\psi\overline{\eta}\chi)$$

残っている第二項と第三項は、$\gamma_\mu\gamma_5$ と γ_5 での関係が

$$\bar{\xi}\gamma_\mu\gamma_5\eta = \bar{\eta}\gamma_\mu\gamma_5\xi\ ,\ \bar{\xi}\gamma_5\eta = \bar{\eta}\gamma_5\xi$$

となっているので、同様です。これに対して左辺は、$\overline{\psi}$ と η を交換したときとは

$$\begin{aligned}&\bar{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta + \bar{\xi}\gamma_\nu\eta\overline{\chi}\gamma^\nu\psi + \bar{\xi}\gamma_\nu\psi\overline{\eta}\gamma^\nu\chi\\ &\bar{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\eta}\gamma^\nu\psi + \bar{\xi}\gamma_\nu\psi\overline{\chi}\gamma^\nu\eta + \bar{\xi}\gamma_\nu\eta\overline{\psi}\gamma^\nu\chi = -\bar{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta - \bar{\xi}\gamma_\nu\psi\overline{\eta}\gamma^\nu\chi - \bar{\xi}\gamma_\nu\eta\overline{\chi}\gamma^\nu\psi\end{aligned}$$

なので

$$(\bar{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta + \bar{\xi}\gamma_\nu\eta\overline{\chi}\gamma^\nu\psi + \bar{\xi}\gamma_\nu\psi\overline{\eta}\gamma^\nu\chi) + (\bar{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\eta}\gamma^\nu\psi + \bar{\xi}\gamma_\nu\psi\overline{\chi}\gamma^\nu\eta + \bar{\xi}\gamma_\nu\eta\overline{\psi}\gamma^\nu\chi) = 0 \tag{10}$$

つまり、(9) と $\overline{\psi}$ と η を交換したものを足し合わせると、左辺は

$$\begin{aligned}&(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) + (\bar{\xi}\gamma_\mu\chi)(\overline{\eta}\gamma^\mu\psi) + (\bar{\xi}\gamma_\mu\psi)(\overline{\chi}\gamma^\mu\eta)\\ &\quad + (\bar{\xi}\gamma_\mu\psi)(\overline{\eta}\gamma^\mu\chi) + (\bar{\xi}\gamma_\mu\chi)(\overline{\psi}\gamma^\mu\eta) + (\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\chi}\gamma^\mu\psi) = 0\end{aligned}$$

右辺は

$$-2(\bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta - \frac{1}{2}\bar{\xi}\gamma_\nu\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta - \bar{\xi}\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta) + cyclic$$

よって

$$-2(\bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta - \frac{1}{2}\bar{\xi}\gamma_\nu\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta - \bar{\xi}\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta) + cyclic = 0$$

というわけで、(9) から

$$(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi) + cyclic = 0$$

となり、これが欲しかった結果です。

この結果を (6) に使えば 0 になることが分かるので、δS_2 は消えます。よって、超対称性に対して作用 S_1+S_2 が不変になります。

4 次元ではワイルスピノールだとすることでも消すことが出来ます。ワイルスピノールは条件

$$\gamma_5\psi = \pm\psi$$

によって与えられます。これを (7) の右辺の第三項と第四項に使うと

$$\begin{aligned}&\bar{\xi}\gamma_\nu\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\eta = \bar{\xi}\gamma_\nu\chi\overline{\psi}\gamma^\nu\eta\\ &\bar{\xi}\gamma_5\chi\overline{\psi}\gamma_5\eta = \bar{\xi}\chi\overline{\psi}\eta\end{aligned}$$

なので、(7) は

$$(\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\overline{\psi}\gamma^\mu\chi)=(\bar{\xi}\gamma_\nu\chi)(\overline{\psi}\gamma^\nu\eta)$$

そうすると、(5) での積分は

$$\begin{aligned}
\delta S_2&=\frac{1}{\pi}\int d\tau\int d\sigma\epsilon^{ab}(\bar{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\bar{\epsilon}^2\gamma^\mu(\partial_a\theta^2)\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&=\frac{1}{\pi}\int d\tau\int d\sigma(\bar{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_1\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_2\theta^1-\bar{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_2\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_1\theta^1-\cdots)\eta_{\mu\nu}\\
&=\frac{1}{\pi}\int d\tau\int d\sigma(\bar{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_1\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_2\theta^1-\bar{\epsilon}^1\gamma^\mu(\partial_1\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_2\theta^1-\cdots)\eta_{\mu\nu}\\
&=0
\end{aligned}$$

となるので、4 次元でのワイルスピノールは超対称性を持ちます。ちなみに、4 次元ではマヨラナ条件とワイル条件を同時に与えることは出来ません。簡単に言えば、マヨラナ表現での γ_5 は純虚数で、そのときのマヨラナスピノールは実数なので (「世界面上での超対称性」参照)、$\gamma_5\psi=\pm\psi$ とできないからです。

他の次元でも $\delta S_2=0$ にできるものがあって、3 次元でマヨラナスピノール、6 次元でワイルスピノール、10 次元でマヨラナ-ワイルスピノールとなっています。マヨラナ-ワイルスピノールはマヨラナとワイルの条件を両方とも与えたものです。重要なのは 10 次元での場合なんですが、ガンマ行列の代数を 10 次元に上げなくてはいけないので、取り合えず飛ばします。

簡単に自由度の観点からマヨラナ-ワイルスピノールになる理由を言っておきます。超対称性を作るにはフェルミオンとボソンの自由度をあわせる必要があります。フェルミオンであるスピノールの自由度は D 次元において $2^{D/2}$、ボソンである質量 0 のゲージ場は $D-2$ の自由度を持ちます。そうすると、10 次元においては、スピノールは 32、ゲージ場は 8 の自由度です。このためスピノールの自由度を落とす必要があります。マヨラナとワイルの条件はそれぞれスピノールの自由度を半分にするので (スピノール成分の半分でもう半分が分かるようになるから)、マヨラナとワイル両方の条件を与えれば、スピノールの自由度は 8 に落ちて、ゲージ場と同じ自由度になります。これが超対称性理論での自由度から見たマヨラナ-ワイルスピノールになる理由です。

最後に運動方程式を求めます。計量 g_{ab} に対しては、「相対論的な弦」でのポリヤコフ作用の g_{ab} の運動方程式を今の場合に合わせればいいだけで

$$\Pi_a^\mu\Pi_b^\nu\eta_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\Pi_c^\mu\Pi_d^\nu\eta_{\mu\nu}=0$$

X^μ の運動方程式は、オイラー・ラグランジュ方程式によって、S_1 から

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\partial_c(\sqrt{-g}g^{ab}\frac{\partial}{\partial(\partial_cX^\alpha)}(\partial_aX^\mu-i\overline{\theta}^i\gamma^\mu\partial_a\theta^i)(\partial_bX^\nu-i\overline{\theta}^i\gamma^\nu\partial_b\theta^i))\eta_{\mu\nu}\\
&=\ -\frac{1}{2}\partial_a(2\sqrt{-g}g^{ab}(\partial_bX^\nu-i\overline{\theta}^i\gamma^\nu\partial_b\theta^i))\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

S_2 からは

$$\begin{aligned}
&\partial_c\frac{\partial}{\partial(\partial_cX^\alpha)}(-i\partial_aX^\mu(\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)+\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&=\ -i\partial_a(\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

合わせると

$$
\begin{aligned}
&\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}(\partial_b X^\nu - i\overline{\theta}^i\gamma^\nu\partial_b\theta^i) + \epsilon^{ab}i(\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2))\eta_{\mu\nu} \\
&= \partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b X^\nu - i\sqrt{-g}g^{ab}\overline{\theta}^i\gamma^\nu\partial_b\theta^i + i\epsilon^{ab}\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1 - i\epsilon^{ab}\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu} \\
&= \partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b X^\nu - i\sqrt{-g}\delta^a_b g^{bd}\overline{\theta}^i\gamma^\nu\partial_b\theta^i + i\epsilon^{ac}g_{cb}g^{bd}\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1 - i\epsilon^{ac}g_{cb}g^{bd}\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu} \\
&= \partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b X^\nu \\
&\qquad - i\sqrt{-g}g^{bd}(\delta^a_b - \frac{\epsilon^{ac}g_{cb}}{\sqrt{-g}})\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1 - i\sqrt{-g}g^{bd}(\delta^a_b + \frac{\epsilon^{ac}g_{cb}}{\sqrt{-g}})\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu} \\
&= \partial_a\big(\sqrt{-g}\big(g^{ab}\partial_b X^\nu - 2i(P_-)^a{}_b\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1 - 2i(P_+)^a{}_b\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2\big)\big)\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\partial_a\big(\sqrt{-g}\big(g^{ab}\partial_b X^\nu - 2i(P_-)^a{}_b\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1 - 2i(P_+)^a{}_b\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2\big)\big) = 0
$$

θ^1 に対しては、$\overline{\theta}^1$ のオイラー・ラグランジュ方程式を使うことで、S_1 から

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^1}(\sqrt{-g}g^{ab}(\partial_a X^\mu - i\overline{\theta}^i\gamma^\mu\partial_a\theta^i)(\partial_b X^\nu - i\overline{\theta}^i\gamma^\nu\partial_b\theta^i)\eta_{\mu\nu}) \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}(-i\gamma^\mu\partial_a\theta^1(\partial_b X^\nu - i\overline{\theta}^i\gamma^\nu\partial_b\theta^i) + (\partial_a X^\mu - i\overline{\theta}^i\gamma^\mu\partial_a\theta^i)(-i\gamma^\nu\partial_b\theta^1))\eta_{\mu\nu} \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}(-i\gamma^\mu\Pi^\nu_b\partial_a\theta^1 - i\gamma^\nu\Pi^\mu_a\partial_b\theta^1)\eta_{\mu\nu} \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}(-i\gamma^\mu\Pi^\nu_b\partial_a\theta^1 - i\gamma^\mu\Pi^\nu_b\partial_a\theta^1)\eta_{\mu\nu} \\
&\qquad = i\sqrt{-g}g^{ab}\gamma^\mu\Pi^\nu_b\partial_a\theta^1\eta_{\mu\nu} \\
&\qquad = i\sqrt{-g}g^{ab}\gamma^\mu\Pi^\nu_a\partial_b\theta^1\eta_{\mu\nu} \\
&\qquad = i\sqrt{-g}\delta^a_b g^{bd}\gamma^\mu\Pi^\nu_a\partial_d\theta^1\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

S_2 からは

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^1}\epsilon^{ab}(-i\partial_a X^\mu(\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)+\overline{\theta}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=\epsilon^{ab}(-i(\partial_a X^\mu)\gamma^\nu\partial_b\theta^1+\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=\epsilon^{ab}(-i\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)(\partial_a X^\mu)+\gamma^\nu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^2\gamma^\mu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=\epsilon^{ab}(-i\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)(\partial_a X^\mu)-\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)\overline{\theta}^2\gamma^\mu\partial_a\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=-i\epsilon^{ab}\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)(\partial_a X^\mu-i\overline{\theta}^2\gamma^\mu\partial_a\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=-i\epsilon^{ab}\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)(\partial_a X^\mu-i\overline{\theta}^i\gamma^\mu\partial_a\theta^i)\eta_{\mu\nu}-i\epsilon^{ab}\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)i\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=-i\epsilon^{ab}\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)\Pi^\mu_a\eta_{\mu\nu}+\epsilon^{ab}\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=-i\epsilon^{ab}\Pi^\mu_a\gamma^\nu\partial_b\theta^1\eta_{\mu\nu}+\epsilon^{ab}\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=-i\epsilon^{ac}g_{cb}g^{bd}\Pi^\mu_a\gamma^\nu\partial_d\theta^1\eta_{\mu\nu}+\epsilon^{ab}\gamma^\nu(\partial_b\theta^1)\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_a\theta^1\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

第二項は超対称性変換での δS_2 の形 (5) と同じなので、消すことができます。そうすると

$$
\begin{aligned}
&i\sqrt{-g}\delta^a_b g^{bd}\gamma^\mu\Pi^\nu_a\partial_d\theta^1\eta_{\mu\nu}-i\epsilon^{ac}g_{cb}g^{bd}\Pi^\mu_a\gamma^\nu\partial_d\theta^1\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=i\sqrt{-g}\gamma^\mu\Pi^\nu_a(\delta^a_b-\frac{\epsilon^{ac}g_{cb}}{\sqrt{-g}})g^{bd}\partial_d\theta^1\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=i2\sqrt{-g}\eta_{\mu\nu}\gamma^\mu\Pi^\nu_a(P_-)^a{}_b g^{bd}\partial_d\theta^1
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\eta_{\mu\nu}\gamma^\mu\Pi^\nu_a(P_-)^a{}_b g^{bd}\partial_d\theta^1=0
$$

θ^2 でも同様です。この場合は S_2 が

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^2}\epsilon^{ab}(-i\partial_a X^\mu(\overline{\theta}^1\gamma^\nu\partial_b\theta^1-\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)+\overline{\theta}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\overline{\theta}^2\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=\epsilon^{ab}(i(\partial_a X^\mu)\gamma^\nu\partial_b\theta^2+\overline{\theta}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1)\gamma^\nu\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=i\epsilon^{ab}((\partial_a X^\mu)-i\overline{\theta}^1\gamma^\mu(\partial_a\theta^1))\gamma^\nu\partial_b\theta^2\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=i\epsilon^{ab}((\partial_a X^\mu)-i\overline{\theta}^i\gamma^\mu(\partial_a\theta^i))\gamma^\nu\partial_b\theta^2\eta_{\mu\nu}-\epsilon^{ab}\overline{\theta}^2\gamma^\mu(\partial_a\theta^2)\gamma^\nu(\partial_b\theta^2)\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=i\epsilon^{ab}\Pi^\mu_a\gamma^\nu\partial_b\theta^2\eta_{\mu\nu}\\
&\quad=i\epsilon^{ac}g_{cb}g^{bd}\Pi^\mu_a\gamma^\nu\partial_b\theta^2\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
i\sqrt{-g}\delta^a_b g^{bd}\gamma^\mu\Pi^\nu_a\partial_d\theta^2\eta_{\mu\nu}+i\epsilon^{ac}g_{cb}g^{bd}\Pi^\mu_a\gamma^\nu\partial_d\theta^2\eta_{\mu\nu}=i\sqrt{-g}\gamma^\mu\Pi^\nu_a(P_+)^a{}_b g^{bd}\partial_d\theta^2
$$

よって

$$\eta_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\Pi_a^{\nu}(P_+)^a{}_b g^{bd}\partial_d\theta^2 = 0$$

まとめると、運動方程式は

$$\Pi_a \cdot \Pi_b - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\Pi_c \cdot \Pi_d = 0$$

$$\partial_a\big(\sqrt{-g}\big(g^{ab}\partial_b X^{\nu} - 2i(P_-)^a{}_b\overline{\theta}^1\gamma^{\nu}\partial_b\theta^1 - 2i(P_+)^a{}_b\overline{\theta}^2\gamma^{\nu}\partial_b\theta^2\big)\big) = 0$$

$$\gamma \cdot \Pi_a(P_-)^a{}_b g^{bd}\partial_d\theta^1 = 0$$

$$\gamma \cdot \Pi_a(P_+)^a{}_b g^{bd}\partial_d\theta^2 = 0$$

$\eta_{\mu\nu}\Pi_a^{\mu}\Pi_b^{\nu} = \Pi_a \cdot \Pi_b$ のように書いています。これらは非線形方程式になっていますが、光円錐ゲージを取ると簡単な形になります。