弦のゲージ固定

弦のパラメータ変換に対する不変性によるパラメータの選び方の話をします。前半はよく出てくるパラメータの選び方の話をして、次にそのときの運動方程式を開弦として解きます。その後に、ゲージを完全に固定するために光円錐座標を導入して、光円錐座標での解の形を求めます。
パラメータの選択によって時空がどうなってるのかを図で説明していないので、イメージをしたい人は他の本とか見てください。
特に難しいことはしていないんですが、添え字がグチャグチャ付いていて見づらいです。
「$\cdot$」は τ 微分、「$'$」は σ 微分です。

最初にハミルトニアンを見ておきます。ハミルトニアンはラグランジアンの $\dot{X}^\mu$ を共役量 P^τ_μ に変換したものだとして

$$\mathcal{H} = P^\tau_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L}$$

と与えます。$\mathcal{L}$ と P^τ_μ は南部・後藤作用から

$$\mathcal{L}(\dot{X}, X') = -T_0\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$$

$$P^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T_0 \frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - X'^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

計算してみると

$$P^\tau_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} = -T_0\frac{(\dot{X}\cdot X')^2 - X'^2\dot{X}^2}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} - T_0\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} = 0$$

となるので、ハミルトニアンは 0 です。P^τ を見てみると

$$P^\tau\cdot X' = 0$$

となっていることはすぐに分かり、さらに

$$\begin{aligned}
(P^\tau)^2 &= T_0^2\frac{((\dot{X}\cdot X')X'_\mu - X'^2\dot{X}_\mu)^2}{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2X'^2} \\
&= T_0^2\frac{(\dot{X}\cdot X')^2X'^2 + X'^4\dot{X}^2 - 2X'^2(\dot{X}\cdot X')^2}{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2X'^2} \\
&= T_0^2X'^2\frac{-(\dot{X}\cdot X')^2 + \dot{X}^2X'^2}{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2X'^2} \\
&= -T_0^2X'^2
\end{aligned}$$

から

$$(P^\tau)^2 + T_0^2X'^2 = 0$$

このため、拘束条件として

$$(P^\tau)^2 + T_0^2 X'^2 = 0 \tag{1a}$$

$$P^\tau \cdot X' = 0 \tag{1b}$$

が存在しています。つまり、ゲージ場と同じように拘束系になっており、これはパラメータ変換に対する不変性から来ています。このため、パラメータを選んで自由度を落とすことをゲージ固定、と言うようにゲージ場での言葉を使います。
　単純で状況がかなり分かりやすいパラメータの選択として

$$X^0(\tau, \sigma) = \tau = t$$

とするのがあり、static ゲージと呼ばれます。static というのは 4 次元時空を時間一定面で切ったとき、その面と世界面が交差してできる曲線が弦になるからです。ある時間 t_0 で切るときパラメータ τ も τ_0 に固定されるために、時間一定面における点粒子の軌道 $q(\sigma)$ が弦になるというかんじです。
　ここでは弦の運動方程式が

$$\frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \sigma^2} \tag{2}$$

という波動方程式の形になるパラメータを使います。この運動方程式になるにはポリヤコフ作用

$$S = -\frac{1}{2} T_0 \int d\tau \int d\sigma \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

において計量 g^{ij} が

$$g_{ij} = g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となっていればいいです。ミンコフスキー時空での番号付けに合わせて添え字 $i.j$ は $0, 1$ とします。パラメータに対する計量をこのように平坦時空 (ミンコフスキー時空) のものに選ぶことを共形ゲージと言ったりします (より正確にはスケール因子もつきますが省きます)。実際に、この計量を使ってオイラー・ラグランジュ方程式

$$\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i X_\mu)} = 0$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} T_0 g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} T_0 (-\partial_0 X^\mu \partial_0 X^\nu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X^\nu) \eta_{\mu\nu}$$

$$(\partial_0 X^\mu = \dot{X}^\mu \ , \ \partial_1 X^\mu = X'^\mu)$$

を計算すると

$$-g^{ij} \partial_i \partial_j X^\mu = \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = 0$$

となるのが分かります。また、X^μ の共役量 P^τ_μ は

$$P^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = T_0 \dot{X}_\mu$$

これからはパラメータがどうなっているのか分からないので、このようになるためにはどのようなパラメータを選んでいるのかを見ていきます。

ポリヤコフ作用では計量 g_{ij} を与えましたが、今度は南部・後藤作用ではどうなっているのかを見ます。南部・後藤作用から出てくる運動方程式は

$$\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0 \tag{3}$$

共役量は

$$P^\tau_\mu = -T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$P^\sigma_\mu = -T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

このとき

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \tag{4a}$$

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0 \tag{4b}$$

となっているなら

$$P^\tau_\mu = -T_0 \frac{-X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}$$

$$P^\sigma_\mu = -T_0 \frac{-\dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}$$

共形ゲージでのポルヤコフ作用の共役量と同じにするには $X'^2 > 0$ (X'^μ が空間的) となっている必要があって (ルート内を正にするため。$\dot{X}^2 > 0$ とすると共役量の符号が逆になる)、(4b) を使ってルートの中を $X'^2 X'^2$ にすると

$$P^\tau_\mu = -T_0 \frac{-X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{X'^2 X'^2}} = T_0 \dot{X}_\mu \tag{5a}$$

$$P^\sigma_\mu = -T_0 \frac{-\dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{X'^2 X'^2}} = -T_0 \frac{X'^2 X'_\mu}{X'^2} = -T_0 X'_\mu \tag{5b}$$

これらに τ, σ 微分がかかり運動方程式 (2) になります。つまり、(4a),(4b) が運動方程式 (2) を出すための拘束条件になっています。この P^τ_μ と (4a),(4b) は (1a),(1b) を満たしています。(4a) はあるパラメータの値 (τ_P, σ_P) に対応する弦上の点 P において $\dot{X}_\mu$ と X'_μ が直交していることを意味します ($\dot{X}_\mu$ と X'_μ は弦の接ベクトル)。また、拘束条件はまとめて

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0$$

と書くことが出来ます。

ちなみに、もっと簡単に拘束条件を出すこともできます。ポリヤコフ作用と南部・後藤作用は古典的には等価で、ポリヤコフ作用での計量 g_{ij} を g_{ij} の運動方程式を通して南部・後藤作用でのパラメータの計量 λ_{ij} に対応させることで一致します。なので計量 g_{ij} を

$$\lambda_{ij}=\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^i}\frac{\partial X^\nu}{\partial\xi^j}\eta_{\mu\nu}\qquad(\xi^i=(\tau,\sigma))$$

と対応させることで、共形ゲージによる制限を南部・後藤作用に持っていけます。計量 g_{ij} の運動方程式

$$\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi^a}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^b}=\frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi^i}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^j}$$

において、例えば $a,b=0$ では

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}=&-\frac{1}{2}(-\frac{\partial X_\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}+\frac{\partial X_\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma})\\ \dot{X}\cdot\dot{X}=&-X'\cdot X'\end{aligned}$$

となって拘束条件が出てきます。もっと単純には、例えば

$$g_{11}=\frac{\partial X_\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}=X'^2$$

としてしまい、今の g_{ij} は対角成分の和が 0、非対角成分が 0 という性質を使うことで、$g_{00}+g_{11}=0$ から (4b)、$g_{12}=g_{21}=0$ から (4a) が出てきます。

拘束条件を導くパラメータの条件を求めます。ここで、ある定ベクトル n_μ を用意します。これを (3) にかけると

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(n\cdot P^\tau)+\frac{\partial}{\partial\sigma}(n\cdot P^\sigma)=0$$

このため、$n\cdot P^\tau$ は τ 独立、$n\cdot P^\sigma$ は σ 独立です。また、自由端条件

$$P^\tau_\mu(\tau,0)=P^\sigma_\mu(\tau,\sigma_1)=0$$

での保存量 p_μ の

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}=\int_0^{\sigma_1}d\sigma\ \frac{\partial}{\partial\tau}P^\tau_\mu=-\int_0^{\sigma_1}d\sigma\ \frac{\partial}{\partial\sigma}P^\sigma_\mu=P^\sigma_\mu|_0^{\sigma_1}$$

から、$n\cdot P^\sigma$ は弦の端 $\sigma=0,\sigma_1$ で 0 になっている必要があります。つまり、σ に依存していなく、弦の端で 0 になるということから

$$n\cdot P^\sigma=0$$

となります。この式は

$$0=n\cdot P^\sigma=\frac{(\dot{X}\cdot X')(n\cdot\dot{X})-\dot{X}^2(n\cdot X')}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-\dot{X}^2X'^2}}=\frac{(\dot{X}\cdot X')(\partial(n\cdot X)/\partial\tau)-\dot{X}^2(\partial(n\cdot X)/\partial\sigma)}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-\dot{X}^2X'^2}}\tag{6}$$

これに拘束条件 $\dot{X}\cdot X'=0$ を使うと、式が成立するためには

$$\frac{\partial(n\cdot X)}{\partial\sigma}=0$$
$$n\cdot X=C(\tau)$$

であればいいことが分かります。右辺の $C(\tau)$ を $\lambda\tau$ だとして

$$n\cdot X=\lambda\tau \tag{7}$$

これが τ に対する条件式となります。というわけで、拘束条件 (4a) はパラメータの条件 (7) から出てきます。
(4a) と (7) を使って P^τ_μ の方を見てみると

$$\begin{aligned}P^\tau_\mu=&-T_0\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu-X'^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-\dot{X}^2X'^2}}\\ =&\,T_0\frac{X'^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2X'^2}}\\ n\cdot P^\tau=&\,T_0\frac{X'^2n\cdot\dot{X}}{\sqrt{-\dot{X}^2X'^2}}\end{aligned}$$

(7) を τ 微分したものを入れると

$$n\cdot P^\tau=T_0\frac{X'^2\lambda}{\sqrt{-\dot{X}^2X'^2}}$$

このとき、$n\cdot P^\tau$ は τ に依存しないので、τ に依存しない任意の λ の形を

$$n\cdot P^\tau=\lambda T_0 \tag{8}$$

と与えてやれば

$$-\dot{X}^2X'^2=X'^4$$
$$\dot{X}^2+X'^2=0$$

このように (7) は (4a) に対応し、λ を (8) とすればもう 1 つの拘束条件 (4b) も出てきます。
(8) での $n\cdot P^\tau$ より良い性質を持った保存量 p_μ を使った形にするために、σ に対する条件を

$$(n\cdot p)\sigma=\pi\int_0^\sigma d\sigma'\ n\cdot P^\tau(\tau,\sigma')$$

とします (σ の範囲は $0\sim\sigma_1$)。これの積分を外すと

$$n\cdot p=\pi(n\cdot P^\tau)$$

この関係から、(8) での P^τ_μ を保存量 p_μ に置き換えられて

$$\lambda = \frac{1}{\pi T_0}(n \cdot p) \tag{9}$$

というわけで、τ と σ に対して

$$n \cdot X = \frac{1}{\pi T_0}(n \cdot p)\tau \tag{10a}$$

$$(n \cdot p)\sigma = \pi \int_0^\sigma d\sigma' \ (n \cdot P^\tau(\tau, \sigma')) \tag{10b}$$

という制限を課すことになります。

　また、σ の条件は σ の範囲を決めています。(10b) の積分の上限を σ_1 に取ると p_μ の定義になって

$$\int_0^{\sigma_1} d\sigma' P^\tau_\mu = p_\mu$$

これを (10b) に入れると

$$(n \cdot p)\sigma_1 = \pi(n \cdot p)$$

よって $\sigma_1 = \pi$ となるので、σ の範囲は $0 \sim \pi$ となります。これは開弦の場合です。閉弦では

$$n \cdot X = \frac{1}{2\pi T_0}(n \cdot p)\tau$$

$$(n \cdot p)\sigma = 2\pi \int_0^\sigma d\sigma' \ (n \cdot P^\tau(\tau, \sigma'))$$

とします。閉弦なので、$X_\mu(\tau, 0) = X_\mu(\tau, \sigma_1)$ です。2π にしているのは σ_1 を 2π にして σ の範囲を $0 \sim 2\pi$ にするためで、それによって (10a) の方を $1/2$ しています ((9) を成立させるために)。開弦、閉弦を一緒にするなら

$$n \cdot X = \frac{\beta}{2\pi T_0}(n \cdot p)\tau$$

$$(n \cdot p)\sigma = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\sigma' \ (n \cdot P^\tau(\tau, \sigma'))$$

として、開弦で $\beta = 2$、閉弦で $\beta = 1$ とすればいいです。

　これでパラメータの条件を与えましたが、ゲージは固定しきれていません。$n \cdot p$ は τ, σ 独立な定数で、X_μ は世界面上の位置なので、τ を与えたとき世界面上の $X_\mu(P)$ と $X_\mu(P')$ の 2 点 (同じ τ で与えられる) において $n \cdot (X(P) - X(P')) = 0$ となることから、τ が与えられた弦は n_μ に直交する面上にいます (n_μ はその面の法線ベクトル)。このため、n_μ によって座標系を指定する必要があります。言い換えると、パラメータの条件から出てくる拘束条件は $\dot{X}_\mu$ と X'_μ が直交している座標系を選べと言っているだけなので、どの直交座標系にすればいいかはまだ決まっていないということです。なので、座標系を指定することでゲージは固定されます。これは最後に回します。

　また、上の話の中で X'_μ は空間的だとしたことから、n_μ に制限がかかっています。X'_μ と n_μ が直交しているために、一般相対性理論の「事象の地平面と無限赤方偏移面」でやったように、X'_μ が必ず空間的であるためには n_μ がヌル ($n_\mu n^\mu = 0$) か時間的 ($n_\mu n^\mu < 0$) である必要があります (n_μ が空間的だと X'_μ は時間的になれる)。

ここでは拘束条件を先に作ってから自由端条件を使ってパラメータの条件を出していますが、自由端条件のない閉弦でも同じパラメータの条件になる理由を簡単に言っておきます。開弦では自由端条件を使うことで

$$n\cdot P^{\sigma}=0$$

として、パラメータの条件 (7) を出しました。しかし、閉弦に対しては周期的境界条件 $X_{\mu}(\tau,0)=X_{\mu}(\tau,\sigma_1)$ なので、σ のどこかの値が 0 になっていると言えません。なので、拘束条件からパラメータ τ の条件が出てきません。しかし、$\sigma=0$ での曲線上で $\dot{X}_{\mu}$ と X'_{μ} が直交していること ($\dot{X}\cdot X'=0$) が示せます。このため、先にパラメータ τ の条件 (7) を要求すれば、(6) で $n\cdot P^{\sigma}=0$ が $\sigma=0=\sigma_1$ で成立し、$n\cdot P^{\sigma}$ が σ 独立であることから σ と無関係に $n\cdot P^{\sigma}=0$ になります。そうすると $\dot{X}\cdot X'=0$ も σ と無関係に成立していることになります。というわけで、パラメータ τ の条件 (7) を開弦、閉弦の両方に要求すれば、開弦と閉弦で同じ拘束条件が出てきます。ただし、閉弦の場合 $\sigma=0$ と見なせる場所を任意に取れるので、この条件では σ を完全に固定しきれていません。

パラメータの話を終わりにして運動方程式に戻って、開弦の境界条件から運動方程式を解きます。余計なことを気にしなければ単に波動方程式を解くだけです。開弦だとして、$\sigma=0\sim\pi$ にして自由端条件を考えます。ついでに張力 T_0 を

$$T_0=\frac{1}{2\pi\alpha'}$$

に置き換えます。運動方程式は波動方程式の形なので、解の一般的な形は

$$X^{\mu}(\tau,\sigma)=f^{\mu}(\tau+\sigma)+h^{\mu}(\tau-\sigma) \tag{11}$$

$f^{\mu}(\tau+\sigma)$ と $h^{\mu}(\tau-\sigma)$ は任意関数です。これに対して自由端条件

$$P^{\tau}_{\mu}(\tau,\sigma)=P^{\sigma}_{\mu}(\tau,\sigma)=0 \quad (\sigma=0,\pi)$$

は (5b) から X_{μ} に対して

$$X'_{\mu}=\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\sigma}=0 \quad (\sigma=0,\pi)$$

という条件を与えています。

X'_{μ} は

$$X'^{\mu}(\tau,\sigma)=\frac{\partial f^{\mu}(\tau+\sigma)}{\partial\sigma}-\frac{\partial h^{\mu}(\tau-\sigma)}{\partial\sigma}=f'^{\mu}(\tau+\sigma)-h'^{\mu}(\tau-\sigma)$$

これは $\sigma=0$ のとき

$$X'^{\mu}(\tau,0)=f'^{\mu}(\tau)-h'^{\mu}(\tau)=0\ \Rightarrow\ f'^{\mu}(\tau)=h'^{\mu}(\tau)$$

f_{μ} と h_{μ} は σ で微分すると一致することから、定数 c^{μ} を使って $h^{\mu}=f^{\mu}+c^{\mu}$ とできます。f^{μ} と h^{μ} は定数しか異なっていないので、定数のずれを f^{μ} を定義しなおして消してやれば

$$X^{\mu}(\tau,\sigma)=f^{\mu}(\tau+\sigma)+f^{\mu}(\tau-\sigma)$$

となります。今度は $\sigma=\pi$ の方を見てみると

$$X'^{\mu}(\tau,\pi)=f'^{\mu}(\tau+\pi)-f'^{\mu}(\tau-\pi)=0\ \Rightarrow\ f'^{\mu}(\tau+\pi)=f'^{\mu}(\tau-\pi)$$

つまり、f'^{μ} は 2π の周期を持っています。周期を持っているためにフーリエ展開することができて

$$f'^{\mu}(u) = F^{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty}(v_n^{\mu}\cos(nu) + w_n^{\mu}\sin(nu))$$

F^{μ} は定数です。これを積分して

$$\begin{aligned} f^{\mu}(u) &= F^{\mu}u + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}v_n^{\mu}\sin(nu) - \frac{1}{n}w_n^{\mu}\cos(nu)) + C \\ &= F_0^{\mu} + F^{\mu}u + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{\mu}\cos(nu) + B_n^{\mu}\sin(nu)) \end{aligned}$$

F_0^{μ} は定数で、積分定数 C は定数部分に入れています。これを X^{μ} に入れると $(u_{\pm} = \tau \pm \sigma)$

$$\begin{aligned} X^{\mu}(\tau,\sigma) &= f^{\mu}(\tau+\sigma) + f^{\mu}(\tau-\sigma) \\ &= F_0^{\mu} + F^{\mu}u_+ + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{\mu}\cos(nu_+) + B_n^{\mu}\sin(nu_+)) \\ &\quad + F_0^{\mu} + F^{\mu}u_- + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{\mu}\cos(nu_-) + B_n^{\mu}\sin(nu_-)) \\ &= 2F_0^{\mu} + 2F^{\mu}\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n^{\mu}\big(\cos(nu_+) + \cos(nu_-)\big) + B_n^{\mu}\big(\sin(nu_+) + \sin(nu_-)\big)\big) \\ &= 2F_0^{\mu} + 2F^{\mu}\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\big(2A_n^{\mu}\cos(n\frac{u_+ + u_-}{2})\cos(n\frac{u_+ - u_-}{2}) + 2B_n^{\mu}\sin(n\frac{u_+ + u_-}{2})\cos(n\frac{u_+ - u_-}{2})\big) \\ &= 2F_0^{\mu} + 2F^{\mu}\tau + 2\sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n^{\mu}\cos(n\tau) + B_n^{\mu}\sin(n\tau)\big)\cos(n\sigma) \\ &= F_0^{\mu} + F^{\mu}\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n^{\mu}\cos(n\tau) + B_n^{\mu}\sin(n\tau)\big)\cos(n\sigma) \end{aligned}$$

係数の 2 はどうでもいいので消しています。これがフーリエ展開したときの基本的な形になります。

F_{μ} は決めることが出来ます。(5a) にこれをいれると

$$P_{\mu}^{\tau} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\tau} = \frac{1}{2\pi\alpha'}F^{\mu} + \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{\mu}\cos(n\tau) + B_n^{\mu}\sin(n\tau))\cos(n\sigma)$$

σ の全範囲 $0 \sim \pi$ で積分すると、$\cos n\sigma$ の項は消えて

$$\int_0^{\pi} d\sigma P_{\mu}^{\tau} = \frac{1}{2\alpha'}F_{\mu}$$

この積分は p_{μ} の定義そのものなので、F_{μ} は

$$F_{\mu} = 2\alpha' p_{\mu}$$

となっています。
　これで境界条件から求められるものは求まったので、もっと見やすい形に持っていきます。三角関数の部分を指数の形にするために

$$C_n^\mu = B_n^\mu - iA_n^\mu$$

と置き換えると

$$\begin{aligned} C_n^\mu e^{-in\tau} &= (B_n^\mu - iA_n^\mu)\cos(n\tau) - i(B_n^\mu - iA_n^\mu)\sin(n\tau) \\ &= B_n^\mu \cos(n\tau) - A_n^\mu \sin(n\tau) - i(A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) \end{aligned}$$

複素共役を取ると

$$(C_n^\mu e^{-in\tau})^* = B_n^\mu \cos(n\tau) - A_n^\mu \sin(n\tau) + i(A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau))$$

これらから

$$A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) = -\frac{i}{2}((C_n^\mu e^{-in\tau})^* - C_n^\mu e^{-in\tau})$$

α' を導入して C_n^μ を無次元の展開係数 a_n^μ に書き換えて

$$\frac{i}{2}(C_n^\mu e^{-in\tau} - C_n^{\mu *} e^{in\tau}) = i\frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}}(a_n^\mu e^{-in\tau} - a_n^{\mu *} e^{in\tau})$$

X^μ は長さの次元で、α' は長さの 2 乗なので a_n^μ は無次元です ($\sqrt{n}$ は後のために入れています)。さらに

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}\ ,\ \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu *}\sqrt{n} \quad (n \geq 1)$$

というように、a_n の複素共役が n の符号を反転したものに等しい α_n^μ を導入すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(a_n^\mu e^{-in\tau} - a_n^{\mu *} e^{in\tau}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^\mu e^{in\tau}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau} - \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau} \\ &= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau} \end{aligned}$$

和は $n=0$ を除いた $-\infty \sim +\infty$ です。というわけで、まとめると $X^\mu(\tau,\sigma)$ は

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau,\sigma) &= F_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(a_n^\mu e^{-in\tau} - a_n^{\mu *} e^{in\tau})\cos(n\sigma) \\ &= F_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\cos(n\sigma) \end{aligned} \tag{12}$$

$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu$ としています。こう書くと α_n の α_0 が分離している形になっています。
　解は出たので、次の話に移ります。ゲージを固定するために、ここまでの話を光円錐座標 (light-cone coordinate) に持っていきます。$d+1$ 次元での光円錐座標は

$$x^\mu = \Big(x^+ = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}},\ x^- = \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}},\ x^2,\ x^3,\ \ldots, x^d\Big)$$

によって与えられます (一般相対性理論の「シュバルツシルト解〜クルスカル座標〜」の補足参照)。$x^2, x^3, \ldots, x^d$ を x^I $(I = 2, 3, \ldots, d)$ とします。このとき時空の計量は

$$2dx^+dx^- = (dx^0 + dx^1)(dx^0 - dx^1) = (dx^0)^2 - (dx^1)^2$$

から

$$-ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \cdots + (dx^d)^2 = \overline{\eta}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (\mu = +, -, 2, \ldots, d)$$

となっているので、

$$\overline{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

これから光円錐座標での内積は

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = -a^- b^+ - a^+ b^- + a^2 b^2 + \cdots + a^d b^d$$

添え字の上げ下げは

$$a_+ = \eta_{+\mu}a^\mu = \eta_{++}a^+ + \eta_{+-}a^- + \eta_{+I}a^I = \eta_{+-}a^- = -a^-$$

のように

$$a_+ = -a^- \ ,\ a_- = -a^+ \ ,\ a_I = a^I$$

X^μ に対しても同じです。
　定ベクトル n_μ を

$$n_\mu = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \ldots, 0)$$

と選ぶと

$$n_\mu X^\mu = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+ \ ,\ n_\mu p^\mu = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+$$

となって、パラメータの条件に

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau \tag{13a}$$

$$p^+ \sigma = \pi \int_0^\sigma d\sigma' P^{\tau +}(\tau, \sigma') \tag{13b}$$

このように光円錐座標が入ってきます。これを光円錐ゲージ (light-cone gauge) と呼び、これによってゲージが固定されます (余計な自由度がなくなる)。

X^+ を微分したものは

$$\dot{X}^+ = 2\alpha' p^+ \tag{14a}$$

$$X^{+\prime} = 0 \tag{14b}$$

これを拘束条件に入れると光円錐座標での条件は

$$\dot{X}^2 + X'^2 = (\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2 - 2\dot{X}^+\dot{X}^- - 2X^{+\prime}X^{-\prime} = (\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2 - 4\alpha' p^+ \dot{X}^- = 0$$

$$\dot{X} \cdot X' = -\dot{X}^+ X^{-\prime} - \dot{X}^- X^{+\prime} + \dot{X}^I \cdot X^{I\prime} = -2\alpha' p^+ X^{-\prime} + \dot{X}^I \cdot X^{I\prime} = 0$$

から

$$4\alpha' p^+ \dot{X}^- = (\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2$$

$$2\alpha' p^+ X^{-\prime} = \dot{X}^I \cdot X^{I\prime}$$

もしくは

$$\begin{aligned}
0 &= (\dot{X} \pm X')^2 \\
&= (\dot{X} \pm X')_\mu (\dot{X} \pm X')^\mu \\
&= -2(\dot{X} \pm X')^+ (\dot{X} \pm X')^- + (\dot{X} \pm X')_I (\dot{X} \pm X')^I \\
0 &= -2(\dot{X}^+ \pm X^{+\prime})(\dot{X}^- \pm X^{-\prime})^- + (\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2
\end{aligned}$$

これに (14a),(14b) を入れれば、拘束条件は

$$4\alpha' p^+ (\dot{X}^- \pm X^{-\prime}) = (\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2$$

$$\dot{X}^- \pm X^{-\prime} = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2 \tag{15}$$

とも書けます。

このときの解の形を求めます。X^+ は (13a) によって与えられています。X^μ の I 成分は単に ($\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$)

$$X^I(\tau, \sigma) = F_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma)$$

X^- は定義から X^0 と X^1 の線形結合なので、解の形は元のと同じものが使えて ($\alpha_0^- = p^-$)

$$X^-(\tau,\sigma) = F_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^- e^{-in\tau}\cos(n\sigma)$$

拘束条件を使うことで X^- は X^I の式で書けます。これを $\dot{X}^- \pm X^{-\prime}$ に入れて計算すると

$$\begin{aligned}
\dot{X}^- \pm X^{-\prime} &= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^- e^{-in\tau}\cos(n\sigma) \pm (-i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^- e^{-in\tau}\sin(n\sigma)) \\
&= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^- e^{-in\tau}(\cos(n\sigma) \mp i\sin(n\sigma)) \\
&= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^- e^{-in\tau}e^{\mp in\sigma} \\
&= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^- e^{-in(\tau\pm\sigma)} \\
&= \sqrt{2\alpha'}\sum_{n}\alpha_n^- e^{-in(\tau\pm\sigma)}
\end{aligned}$$

最後に α_0^- を和の中に入れています。I 成分も同じで

$$\dot{X}^I \pm X^{I\prime} = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n^I e^{-in(\tau\pm\sigma)}$$

これらを (15) に入れると

$$\begin{aligned}
\dot{X}^- \pm X^{-\prime} &= \frac{1}{4\alpha' p^+}(\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2 \\
\sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n^- e^{-in(\tau\pm\sigma)} &= \frac{1}{4\alpha' p^+}2\alpha'\sum_{m,n}\alpha_m^I\alpha_n^I e^{-i(m+n)(\tau\pm\sigma)} \\
&= \frac{1}{2p^+}\sum_{l,m}\alpha_{l-m}^I\alpha_m^I e^{-im(\tau\pm\sigma)} \\
&= \frac{1}{2p^+}\sum_{l}(\sum_m \alpha_{l-m}^I\alpha_m^I)e^{-il(\tau\pm\sigma)} \\
&= \frac{1}{2p^+}\sum_{n}(\sum_m \alpha_{n-m}^I\alpha_m^I)e^{-in(\tau\pm\sigma)} \\
\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- &= \frac{1}{2p^+}\sum_m \alpha_{n-m}^I\alpha_m^I \\
&= \frac{1}{p^+}L_n
\end{aligned}$$

特に $n=0$ のとき

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+}L_0$$

なので

$$\frac{1}{\alpha'}L_0 = 2p^+p^-$$

X_μ を展開したことから予想できるように、この結果を使って量子化を行います。