臨界次元

「Virasoro 代数」で臨界次元に少し触れましたが、ここでちゃんと触れます。ついでに光円錐ゲージを使って RNS 形式でのローレンツ不変な次元を求めます。開弦だけを扱います。
「弦のゲージ固定」、「Virasoro 代数」、「世界面での超対称性」、「Supar Virasoro 代数」で求めたものを使っています。
ここでは $\alpha' = 1/2$ とし、基本的に m, n は整数、r, s は半整数です。

まずはボソン部分のみの場合を見ていきます。物理的な状態 $|\phi\rangle$ は「Virasoro 代数」で触れたように拘束条件 $T_{ab} = 0$ から、Virasoro 演算子 L_n によって

$$L_n|\phi\rangle = 0 \quad\quad n > 0 \tag{1a}$$

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = 0 \tag{1b}$$

と与えられます。Virasoro 演算子は正規積「: :」によって

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m : \alpha^\mu_{n-m}\alpha^\nu_m : \eta_{\mu\nu}$$

L_0 は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_m \alpha^\mu_{-m}\alpha^\nu_m\eta_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^\mu_{-m}\alpha^\nu_m\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{-1}\alpha^\mu_{-m}\alpha^\nu_m\eta_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0\eta_{\mu\nu} + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha^\mu_{-m}\alpha^\nu_m\eta_{\mu\nu} + D\sum_{m=1}^{\infty} m \\
&= \frac{1}{2}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0\eta_{\mu\nu} + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha^\mu_{-m}\alpha^\nu_m\eta_{\mu\nu} - a
\end{aligned}$$

から、定数部分を取り除いた

$$L_0 = \ \frac{1}{2}\sum_m : \alpha^\mu_{-m}\alpha^\nu_m : \eta_{\mu\nu}$$

となります (正規積は定数部分を取り除くようにする)。Virasoro 代数は D 次元で

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}\delta_{m+n,0}$$

となっています。
ちなみに、共変な質量演算子 M^2 も条件から求められます。運動量 p_μ によって $M^2 = -p_\mu p^\mu$ であることと、「弦のゲージ固定」で求めたように開弦では

$$\alpha^\mu_0 = p^\mu \quad\quad (\alpha' = \frac{1}{2})$$

であることから、質量演算子 M^2 は

$$M^2 = -\alpha_0^\mu \alpha_0^\nu \eta_{\mu\nu} = -2L_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^\mu \alpha_m^\nu \eta_{\mu\nu}$$

と書けます。これを物理的な状態 $|\phi\rangle$ に作用させれば、条件 (1b) から

$$M^2|\phi\rangle = -2L_0|\phi\rangle + 2\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^\mu \alpha_m^\nu \eta_{\mu\nu}|\phi\rangle = 2(-a + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^\mu \alpha_m^\nu \eta_{\mu\nu})|\phi\rangle = 2(-a+N)|\phi\rangle$$

N は粒子数演算子です。

Virasoro 拘束条件を使ってノルムが 0 になる状態を作り、そのときの a と次元 D がどの値を持つのかを見ます。物理的状態が負のノルム (ゴースト) を持たないようにするなら、その境界のノルムが 0 となる状態を見ることで a, D の制限になるからです。まず、状態 $|\psi\rangle$ として

$$(L_0 - a)|\psi\rangle = 0 \tag{2}$$

を満たし、物理的状態 $|\phi\rangle$ に直交する $\langle\phi|\psi\rangle = 0$ ものを用意します。この $|\psi\rangle$ を spurious state と呼びます。Virasoro 演算子は $\alpha_n^\mu = \alpha_{-n}^{\mu\dagger}$ から

$$L_n^\dagger = L_{-n}$$

となっているので、条件 (1a) から

$$\langle\phi|L_{-n}|\chi_n\rangle = \langle\chi_n|L_{-n}^\dagger|\phi\rangle^\dagger = \langle\chi_n|L_n|\phi\rangle^\dagger = 0 \quad (n>0)$$

つまり、$L_{-n}|\chi_n\rangle$ は $|\phi\rangle$ に直交するので、$n \geq 1$ による和の形に一般化すれば

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}|\chi_n\rangle \tag{3}$$

となります。このとき $|\chi_n\rangle$ は

$$\begin{aligned}
(L_0 - a)|\psi\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}(L_0 - a)L_{-n}|\chi_n\rangle \\
0 &= \sum_{n=1}^{\infty}([L_0, L_{-n}] + L_{-n}L_0 - aL_{-n})|\chi_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(nL_{-n} + L_{-n}L_0 - aL_{-n})|\chi_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}((L_0 - a + n)|\chi_n\rangle
\end{aligned}$$

なので

$$(L_0 - a + n)|\chi_n\rangle = 0$$

に従います。
　(3) は $n \geq 1$ の和ですが

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

を見てみると

$$[L_{-1}, L_{-2}] = L_{-3}\ ,\ [L_{-1}, L_{-3}] = 2L_{-4}\ ,\ \ldots$$

となっているので、$n \geq 3$ は L_{-1} と L_{-2} の線形結合で書けてしまいます。なので

$$|\psi\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle + L_{-2}|\chi_2\rangle$$

と出来ます。
　また、spurious state が物理的状態であるなら

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\psi|L_{-n}|\chi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\chi_n|L_{-n}^{\dagger}|\psi\rangle^{\dagger} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\chi_n|L_n|\psi\rangle^{\dagger} = 0$$

なので、spurious state が物理的ならノルムは 0 になります。
　spurious state $|\psi\rangle$ が物理的状態になっているもの (ノルムが 0 になるもの) を作り、そのとき a, D がどうなるのかを求めます。$|\psi\rangle$ が物理的であるものは L_{-1} によって

$$|\psi\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle$$

として、$|\chi_1\rangle$ は

$$(L_0 - a + 1)|\chi_1\rangle = 0\ ,\ L_m|\chi_1\rangle = 0 \quad (m > 0)$$

を満たすようにすれば作れます。このように $|\chi_1\rangle$ を取れば、$m > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
L_m|\psi\rangle &= L_mL_{-1}|\chi_1\rangle \\
&= ([L_m, L_{-1}] + L_{-1}L_m)|\chi_1\rangle \\
&= 2L_{m-1}|\chi_1\rangle + L_{-1}L_m|\chi_1\rangle \\
&= 2L_{m-1}|\chi_1\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるので

$$L_m|\psi\rangle = 0 \quad (m > 1)$$

そして、$m = 1$ では

$$L_1|\psi\rangle = L_1L_{-1}|\chi_1\rangle = 2L_0|\chi_1\rangle = (a-1)|\chi_1\rangle$$

このとき $|\psi\rangle$ が物理的状態であるためには (1a) から

$$L_1|\psi\rangle = 0$$

でなければいけないので、$a = 1$ となります。また、$|\psi\rangle$ のノルムは

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|L_{-1}|\chi_1\rangle = \langle\chi_1|L_{-1}^\dagger|\psi\rangle = \langle\chi_1|L_1|\psi\rangle = (a-1)\langle\chi_1|\chi_1\rangle = 0$$

となっているので、$a = 1$ でノルムが 0 になるのも確認できます。というわけで、ノルムが 0 になる $|\psi\rangle$ は $a = 1$ として状態 $|\chi_1\rangle$ に L_{-1} を作用させることで作ることが出来ます。
　他にもノルムを 0 にできる状態があります。今度は spurious state を

$$|\psi\rangle = (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle$$

と作り、$a = 1$ とします。γ は定数です。$|\tilde{\chi}\rangle$ は

$$L_m|\tilde{\chi}\rangle = 0 \quad (m > 0)$$

と、(2) からの

$$\begin{aligned}
(L_0 - 1)|\psi\rangle &= (L_0 - 1)(L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= L_0(L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle - (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= ([L_0, L_{-2}] + L_{-2}L_0 + \gamma([L_0, L_{-1}] + L_{-1}L_0)L_{-1})|\tilde{\chi}\rangle - (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (2L_{-2} + L_{-2}L_0 + \gamma(L_{-1} + L_{-1}L_0)L_{-1})|\tilde{\chi}\rangle - (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (2L_{-2} + L_{-2}L_0 + \gamma(L_{-1}^2 + L_{-1}([L_0, L_{-1}] + L_{-1}L_0))|\tilde{\chi}\rangle - (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (2L_{-2} + L_{-2}L_0 + \gamma(L_{-1}^2 + L_{-1}^2 + L_{-1}^2L_0))|\tilde{\chi}\rangle - (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (L_{-2} + L_{-2}L_0 + \gamma(L_{-1}^2 + L_{-1}^2L_0))|\tilde{\chi}\rangle \\
&= L_{-2}(L_0 + 1)|\tilde{\chi}\rangle + \gamma L_{-1}^2(L_0 + 1)|\tilde{\chi}\rangle
\end{aligned}$$

による

$$(L_0 + 1)|\tilde{\chi}\rangle = 0$$

に従うようにします。$|\psi\rangle$ が物理的であるための γ の値を決めます。$L_1|\psi\rangle$ を見てみると

$$\begin{aligned}
L_1L_{-1}^2 &= [L_1, L_{-1}^2] + L_{-1}^2L_1 \\
&= L_{-1}[L_1, L_{-1}] + [L_1, L_{-1}]L_{-1} + L_{-1}^2L_1 \\
&= 2L_{-1}L_0 + 2L_0L_{-1} + L_{-1}^2L_1
\end{aligned}$$

から

$$
\begin{aligned}
L_1|\psi\rangle &= L_1(L_{-2}+\gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (L_1L_{-2}+\gamma L_1L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= ([L_1,L_{-2}]+L_{-2}L_1+\gamma(2L_{-1}L_0+2L_0L_{-1}+L_{-1}^2L_1)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (3L_{-1}+L_{-2}L_1+\gamma(2L_{-1}L_0+2L_0L_{-1}+L_{-1}^2L_1))|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (3L_{-1}+\gamma(2L_0L_{-1}+2L_{-1}L_0)|\tilde{\chi}\rangle \qquad (L_1|\tilde{\chi}\rangle=0) \\
&= (3L_{-1}+\gamma(2L_0L_{-1}+2[L_{-1},L_0]+2L_0L_{-1})|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (3L_{-1}+4\gamma L_0L_{-1}-2\gamma L_{-1})|\tilde{\chi}\rangle \\
0 &= (3-2\gamma)L_{-1}|\tilde{\chi}\rangle+4\gamma L_0L_{-1}|\tilde{\chi}\rangle
\end{aligned}
$$

第二項は

$$
L_0L_{-1}|\tilde{\chi}\rangle = ([L_0,L_{-1}]+L_{-1}L_0)|\tilde{\chi}\rangle = L_{-1}(1+L_0)|\tilde{\chi}\rangle = 0
$$

なので、第一項が 0 になるためには $\gamma=3/2$ となります。$L_2|\psi\rangle$ では

$$
\begin{aligned}
L_2L_{-1}^2 &= [L_2,L_{-1}^2]+L_{-1}^2L_2 \\
&= L_{-1}[L_2,L_{-1}]+[L_2,L_{-1}]L_{-1}+L_{-1}^2L_2 \\
&= 3L_{-1}L_1+3L_1L_{-1}+L_{-1}^2L_2
\end{aligned}
$$

を使うことで

$$
\begin{aligned}
L_2|\psi\rangle &= L_2(L_{-2}+\gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (L_2L_{-2}+\gamma L_2L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= ([L_2,L_{-2}]+L_{-2}L_2+\gamma L_2L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (4L_0+\frac{D}{2}+L_{-2}L_2+\frac{9}{2}L_1L_{-1}+\frac{9}{2}L_{-1}L_1+\frac{3}{2}L_{-1}^2L_2)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (4L_0+\frac{D}{2}+\frac{9}{2}L_1L_{-1})|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (4L_0+\frac{D}{2}+\frac{9}{2}([L_1,L_{-1}]+L_{-1}L_1))|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (4L_0+\frac{D}{2}+9L_0)|\tilde{\chi}\rangle \\
&= (13(L_0+1)-13+\frac{D}{2})|\tilde{\chi}\rangle \\
0 &= (-13+\frac{D}{2})|\tilde{\chi}\rangle
\end{aligned}
$$

よって $D=26$ のときに spurious state $|\psi\rangle$ は物理的になります。$L_m|\psi\rangle$ $(m\geq 3)$ は

$$[L_m, L_{-2}] = (m+2)L_{m-2}$$

と

$$\begin{aligned}
[L_m, L_{-1}^2] &= L_{-1}[L_m, L_{-1}] + [L_m, L_{-1}]L_{-1} \\
&= (m+1)L_{-1}L_{m-1} + (m+1)L_{m-1}L_{-1} \\
&= (m+1)L_{-1}L_{m-1} + (m+1)[L_{m-1}, L_{-1}] + (m+1)L_{-1}L_{m-1} \\
&= (m+1)L_{-1}L_{m-1} + (m+1)mL_{m-2} + (m+1)L_{-1}L_{m-1}
\end{aligned}$$

から、$|\psi\rangle$ に作用させれば 0 になるので、次元 D に関する情報は出てきません。というわけで、$a=1$ と $D=26$ のときノルムを 0 にします。ノルムが 0 である場合は正のノルムと負のノルムの境界なので、$D=26$ を臨界次元（critical dimension）と呼びます。当たり前ですが、ここでは物理的状態 $|\phi\rangle$ に直交しノルムが 0 になる状態を見ただけなのでゴーストが出てこないという証明にはなっていなく、証明するためにはかなり面倒な話をしていく必要があります。

spurious state が物理的のときノルムが 0 というのを RNS 形式に当てはめて、RNS 形式での臨界次元を求めます。ここでも物理的状態は $|\phi\rangle$、spurious state は $|\psi\rangle$ と書きます。

RNS 形式での Virasoro 演算子は

$$L_n = L_n^b + L_n^f = \frac{1}{2}\sum_m :\alpha_{n-m}^\mu \alpha_m^\nu : \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum_r (r + \frac{n}{2}) : b_{-r}^\mu b_{n+r}^\nu : \eta_{\mu\nu}$$

となっています。R 境界条件では r を m、b_r^μ を d_m^μ にすればいいです (m は整数、r は半整数)。RNS 形式では拘束条件は $T_{++} = T_{--} = J_+ = J_- = 0$ なので、物理的状態は、NS 境界条件では

$$L_n|\phi\rangle = 0 \quad (n>0) \tag{4a}$$

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = 0 \tag{4b}$$

$$G_r|\phi\rangle = 0 \quad (r>0) \tag{4c}$$

R 境界条件では

$$L_n|\phi\rangle = 0 \quad (n>0) \tag{5a}$$

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = 0 \tag{5b}$$

$$F_m|\phi\rangle = 0 \quad (m \geq 0) \tag{5c}$$

ボソン部分のみの場合と同じ a を使いますが、異なっているものです。また、NS 境界条件と R 境界条件でも異なっています。G_r, F_m は

$$G_r = \sum_m \alpha_m^\mu b_{r-m}^\nu \eta_{\mu\nu}\ ,\ \ F_n = \sum_m \alpha_m^\mu d_{n-m}^\nu \eta_{\mu\nu}$$

super Virasoro 代数は、NS 境界条件では

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
&[L_m, G_r] = (-r + \frac{m}{2})G_{m+r} \\
&\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{D}{2}(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

R 境界条件では

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m^3\delta_{m+n,0} \\
&[L_m, F_n] = (-n + \frac{m}{2})F_{m+n} \\
&\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{D}{2}m^2\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

となっています。

NS 境界条件の方から見ていきます。spurious state $|\psi\rangle$ は

$$
|\psi\rangle = G_{-1/2}|\chi\rangle
$$

とすれば作れます。$|\psi\rangle$ は spurious state なので

$$
(L_0 - a)|\psi\rangle = 0
$$

という条件を持っています。この $|\psi\rangle$ は物理的状態 $|\phi\rangle$ と直交しているのは簡単に分かります。RNS 形式ではスピノールはマヨラナスピノール $\psi^\mu = \psi^{\mu *}$ なので

$$
\begin{aligned}
&\psi^\mu_\pm(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n b^\mu_n e^{-in(\tau\pm\sigma)} \\
&\psi^{\mu *}_\pm(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n b^{\mu *}_n e^{in(\tau\pm\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n b^{\mu *}_{-n} e^{-in(\tau\pm\sigma)}
\end{aligned}
$$

から $b^{\mu *}_{-n} = b^\mu_n$ となります。このため G_r は

$$
G^\dagger_r = \sum_m (\alpha^\mu_m b^\nu_{r-m})^\dagger \eta_{\mu\nu} = \sum_m \alpha^\mu_{-m} b^\nu_{-r+m}\eta_{\mu\nu} = \sum_m \alpha^\mu_m b^\nu_{-r-m}\eta_{\mu\nu} = G_{-r}
$$

という関係を持ちます。これを使うと、物理的状態 $|\phi\rangle$ とでは

$$
\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|G_{-1/2}|\chi\rangle = \langle\chi|G_{1/2}|\phi\rangle^\dagger = 0
$$

このように 0 になるのが確かめられます。

$|\chi\rangle$ は spurious state の条件から

$$
\begin{aligned}
(L_0 - a)|\psi\rangle &= (L_0 - a)G_{-1/2}|\chi\rangle \\
&= ([L_0, G_{-1/2}] + G_{-1/2}L_0 - aG_{-1/2})|\chi\rangle \\
&= (\frac{1}{2}G_{-1/2} + G_{-1/2}L_0 - aG_{-1/2})|\chi\rangle \\
0 &= G_{-1/2}(\frac{1}{2} + L_0 - a)|\chi\rangle
\end{aligned}
$$

となるので

$$
(L_0 + \frac{1}{2} - a)|\chi\rangle = 0 \tag{6}
$$

を満たすようにします。$|\psi\rangle$ が物理的のときが知りたいので、$m > 1$ として L_m を作用させて

$$
\begin{aligned}
L_m|\psi\rangle &= L_m G_{-1/2}|\chi\rangle \\
&= [L_m, G_{-1/2}] + G_{-1/2}L_m|\chi\rangle \\
0 &= (\frac{1}{2} + \frac{m}{2})G_{m-1/2}|\chi\rangle + G_{-1/2}L_m|\chi\rangle
\end{aligned}
$$

なので、$m = 1, 2$ のときに

$$
\begin{aligned}
L_1|\psi\rangle &= G_{1/2}|\chi\rangle + G_{-1/2}L_1|\chi\rangle \\
L_2|\psi\rangle &= \frac{3}{2}G_{3/2}|\chi\rangle + G_{-1/2}L_2|\chi\rangle
\end{aligned}
$$

これらから、$|\chi\rangle$ は (6) に加えて

$$
G_{1/2}|\chi\rangle = G_{3/2}|\chi\rangle = 0\ ,\ L_1|\chi\rangle = L_2|\chi\rangle = 0 \tag{7}
$$

に従うようにします。3/2 より大きい場合は

$$
G_{1+3/2} = (-\frac{3}{2} + \frac{1}{2})^{-1}[L_1, G_{3/2}]
$$

というように、3/2 に戻せるので 3/2 より大きい場合は必要ありません。また、$L_m|\chi\rangle = 0\ (m > 0)$ であることも分かります。

$|\psi\rangle$ が物理的なので、(4c) に対して (6,)(7) を使うと

$$
\begin{aligned}
G_{1/2}|\psi\rangle &= G_{1/2}G_{-1/2}|\chi\rangle \\
&= (\{G_{1/2}, G_{-1/2}\} - G_{-1/2}G_{1/2})|\chi\rangle \\
&= (2L_0 - G_{-1/2}G_{1/2})|\chi\rangle \qquad (\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{D}{2}(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{m+n,0}) \\
&= 2L_0|\chi\rangle \\
0 &= 2(\frac{1}{2} - a)|\chi\rangle
\end{aligned}
$$

よって、$a = 1/2$ となります。
　今度は

$$|\psi\rangle = (G_{-3/2} + \lambda G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle$$

とします (区別せずに $|\chi\rangle$ と書きますが条件は変更されます)。λ は定数です。これも物理的状態 $|\phi\rangle$ とは直交します。$|\psi\rangle$ が物理的だとして、

$$L_0G_{-3/2} = [L_0, G_{-3/2}] + G_{-3/2}L_0 = \frac{3}{2}G_{-3/2} + G_{-3/2}L_0$$

と

$$\begin{aligned}
L_0G_{-1/2}L_{-1} &= [L_0, G_{-1/2}]L_{-1} - G_{-1/2}L_0L_{-1} \\
&= \frac{1}{2}G_{-1/2}L_{-1} - G_{-1/2}L_0L_{-1} \\
&= \frac{1}{2}G_{-1/2}L_{-1} - G_{-1/2}([L_0, L_{-1}] + L_{-1}L_0) \\
&= \frac{1}{2}G_{-1/2}L_{-1} - G_{-1/2}(L_{-1} + L_{-1}L_0) \\
&= G_{-1/2}L_{-1}(-\frac{1}{2} - L_0)
\end{aligned}$$

を使い、$a = 1/2$ とすれば、(4b) は

$$\begin{aligned}
(L_0 - a)|\psi\rangle &= (L_0 - a)(G_{-3/2} + \lambda G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle \\
&= L_0(G_{-3/2} + \lambda G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle - a(G_{-3/2} + \lambda G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle \\
&= (\frac{3}{2}G_{-3/2} + G_{-3/2}L_0 + \lambda G_{-1/2}L_{-1}(-\frac{1}{2} - L_0))|\chi\rangle \\
&\quad - a(G_{-3/2} + \lambda G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle \\
&= G_{-3/2}(\frac{3}{2} - a + L_0)|\chi\rangle - \lambda G_{-1/2}L_{-1}(\frac{1}{2} + a + L_0))|\chi\rangle \\
&= G_{-3/2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + L_0)|\chi\rangle - \lambda G_{-1/2}L_{-1}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + L_0))|\chi\rangle \\
0 &= G_{-3/2}(1 + L_0)|\chi\rangle - \lambda G_{-1/2}L_{-1}(1 + L_0))|\chi\rangle
\end{aligned}$$

なので、$|\chi\rangle$ は

$$(L_0 + 1)|\chi\rangle = 0 \tag{8}$$

に従います。$L_1|\psi\rangle = 0$ の場合では

$$L_1G_{-3/2} = [L_1, G_{-3/2}] + G_{-3/2}L_1 = 2G_{-1/2} + G_{-3/2}L_1$$

と

$$\begin{aligned}
L_1G_{-1/2}L_{-1} &= [L_1, G_{-1/2}]L_{-1} + G_{-1/2}L_1L_{-1}\\
&= G_{1/2}L_{-1} + G_{-1/2}L_1L_{-1}\\
&= [G_{1/2}, L_{-1}] + L_{-1}G_{1/2} + G_{-1/2}([L_1, L_{-1}] + L_{-1}L_1)\\
&= G_{-1/2} + L_{-1}G_{1/2} + G_{-1/2}(2L_0 + L_{-1}L_1)\\
&= L_{-1}G_{1/2} + G_{-1/2}(1 + 2L_0 + L_{-1}L_1)
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
L_1|\psi\rangle &= L_1(G_{-3/2} + \lambda G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle\\
&= (2G_{-1/2} + G_{-3/2}L_1 + \lambda(L_{-1}G_{1/2} + G_{-1/2}(1 + 2L_0 + L_{-1}L_1))|\chi\rangle\\
0 &= G_{-1/2}(2 + \lambda(1 + 2L_0 + L_{-1}L_1))|\chi\rangle + G_{-3/2}L_1|\chi\rangle + \lambda L_{-1}G_{1/2}|\chi\rangle
\end{aligned}$$

これから $|\chi\rangle$ は

$$L_1|\chi\rangle = 0\ ,\ G_{1/2}|\chi\rangle = 0 \tag{9}$$

に従うとすることで、$\lambda = 2$ とすれば

$$(2 + 2(1 + 2L_0 + L_{-1}L_1))|\chi\rangle = 4(1 + L_0)|\chi\rangle = 0$$

と出来ます。そして、$L_2|\psi\rangle = 0$ では

$$L_2G_{-3/2} = [L_2, G_{-3/2}] + G_{-3/2}L_2 = \frac{5}{2}G_{1/2} + G_{-3/2}L_2$$

と

$$\begin{aligned}
L_2G_{-1/2}L_{-1} &= [L_2, G_{-1/2}]L_{-1} + G_{-1/2}L_2L_{-1}\\
&= \frac{3}{2}G_{3/2}L_{-1} + G_{-1/2}L_2L_{-1}\\
&= \frac{3}{2}[G_{3/2}, L_{-1}] + \frac{3}{2}L_{-1}G_{3/2} + G_{-1/2}([L_2, L_{-1}] + L_{-1}L_2)\\
&= 3G_{1/2} + \frac{3}{2}L_{-1}G_{3/2} + G_{-1/2}(3L_1 + L_{-1}L_2)
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
L_2|\psi\rangle &= L_2(G_{-3/2} + 2G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle\\
&= (\frac{5}{2}G_{1/2} + G_{-3/2}L_2 + 6G_{1/2} + 3L_{-1}G_{3/2} + 2G_{-1/2}(3L_1 + L_{-1}L_2))|\chi\rangle\\
0 &= (G_{-3/2}L_2 + 3L_{-1}G_{3/2} + 2G_{-1/2}L_{-1}L_2)|\chi\rangle
\end{aligned}$$

となるので、$|\chi\rangle$ は

$$L_2|\chi\rangle = 0 \ , \ \ G_{3/2}|\chi\rangle = 0 \tag{10}$$

に従うようにします。
　そうすると $G_{1/2}|\psi\rangle$ は

$$G_{1/2}G_{-3/2} = \{G_{1/2}, G_{-3/2}\} - G_{-3/2}G_{1/2} = 2L_{-1} - G_{-3/2}G_{1/2}$$

と

$$\begin{aligned}
G_{1/2}G_{-1/2}L_{-1} &= \{G_{1/2}, G_{-1/2}\}L_{-1} - G_{-1/2}G_{1/2}L_{-1} \\
&= 2L_0L_{-1} - G_{-1/2}G_{1/2}L_{-1} \\
&= 2L_0L_{-1} - G_{-1/2}([G_{1/2}, L_{-1}] + L_{-1}G_{1/2}) \\
&= 2L_0L_{-1} - G_{-1/2}G_{-1/2} + L_{-1}G_{1/2} \\
&= 2L_0L_{-1} - \frac{1}{2}\{G_{-1/2}, G_{-1/2}\} + L_{-1}G_{1/2} \\
&= 2L_0L_{-1} - L_{-1} + L_{-1}G_{1/2}
\end{aligned}$$

となっていることと、(8)〜(10) を使うことで

$$\begin{aligned}
G_{1/2}|\psi\rangle &= G_{1/2}(G_{-3/2} + 2G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle \\
&= (2L_{-1} - G_{-3/2}G_{1/2} + 4L_0L_{-1} - 2L_{-1} + 2L_{-1}G_{1/2})|\chi\rangle \\
&= (2L_{-1} + 4L_0L_{-1} - 2L_{-1})|\chi\rangle \\
&= 4L_0L_{-1}|\chi\rangle \\
&= 4([L_0, L_{-1}] + L_{-1}L_0)|\chi\rangle \\
&= 4(L_{-1} + L_{-1}L_0)|\chi\rangle \\
&= 4L_{-1}(1 + L_0)|\chi\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるので、(4c) を満たしています。$G_{3/2}|\psi\rangle = 0$ では

$$G_{3/2}G_{-3/2} = \{G_{3/2}, G_{-3/2}\} - G_{-3/2}G_{3/2} = 2L_0 + D - G_{-3/2}G_{3/2}$$

と

$$\begin{aligned}
G_{3/2}G_{-1/2}L_{-1} &= \{G_{3/2}, G_{-1/2}\}L_{-1} - G_{-1/2}G_{3/2}L_{-1} \\
&= 2L_1L_{-1} - G_{-1/2}G_{3/2}L_{-1} \\
&= 2L_1L_{-1} - G_{-1/2}([G_{3/2}, L_{-1}] + L_{-1}G_{3/2}) \\
&= 2L_1L_{-1} - G_{-1/2}(2G_{1/2} + L_{-1}G_{3/2})
\end{aligned}$$

から

$$
\begin{aligned}
G_{3/2}|\psi\rangle &= G_{3/2}(G_{-3/2}+2G_{-1/2}L_{-1})|\chi\rangle \\
&= (2L_0+D-G_{-3/2}G_{3/2})+4L_1L_{-1}-2G_{-1/2}(2G_{1/2}+L_{-1}G_{3/2}))|\chi\rangle \\
&= (2L_0+D+4L_1L_{-1})|\chi\rangle \\
&= (2L_0+D+4([L_1,L_{-1}]+L_{-1}L_1))|\chi\rangle \\
&= (2L_0+D+8L_0|\chi\rangle \\
&= (10L_0+D)|\chi\rangle \\
0 &= 10(L_0+\frac{D}{10})|\chi\rangle
\end{aligned}
$$

なので、$D=10$ のとき $(L_0+1)|\chi\rangle=0$ となります。というわけで、臨界次元は $a=1/2$ で $D=10$ となります。
R 境界条件の方も見ていきます。R 境界条件では spurious state を使わなくても a が決まります。F_0^2 は

$$
\begin{aligned}
\{F_0,F_0\} &= 2L_0 \\
F_0^2 &= L_0
\end{aligned}
$$

となっているので、(5c) から

$$
0=F_0^2|\phi\rangle=L_0|\phi\rangle
$$

となり、$a=0$ となります。
また、F_0 は

$$
\begin{aligned}
F_0=\sum_m \alpha_m^\mu d_{-m}^\nu\eta_{\mu\nu} &= \alpha_0^\mu d_0^\nu\eta_{\mu\nu}+\sum_{m>0}\alpha_m^\mu d_{-m}^\nu\eta_{\mu\nu}+\sum_{m<0}\alpha_m^\mu d_{-m}^\nu\eta_{\mu\nu} \\
&= \alpha_0^\mu d_0^\nu\eta_{\mu\nu}+\sum_{m>0}\alpha_m^\mu d_{-m}^\nu\eta_{\mu\nu}+\sum_{m>0}\alpha_{-m}^\mu d_m^\nu\eta_{\mu\nu} \\
&= \alpha_0^\mu d_0^\nu\eta_{\mu\nu}+\sum_{m>0}(\alpha_m^\mu d_{-m}^\nu+\alpha_{-m}^\mu d_m^\nu)\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

d_0^μ の反交換関係は

$$
\{d_0^\mu,d_0^\nu\}=\eta^{\mu\nu}
$$

となっていますが、これはガンマ行列の

$$
\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=-2\eta^{\mu\nu}
$$

と同じ形をしているために、d_0^μ は γ^μ 行列と同じ代数を構成します。なので、d_0^μ は

$$
d_0^\mu=\frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^\mu
$$

として、$\alpha_0^\mu = p^\mu$ とすれば

$$F_0 = \frac{-i}{\sqrt{2}} p^\mu \Gamma^\nu \eta_{\mu\nu} + \sum_{m>0} (\alpha_m^\mu d_{-m}^\nu + \alpha_{-m}^\mu d_m^\nu)\eta_{\mu\nu}$$

これと条件 (5c) から

$$\begin{aligned}F_0|\phi\rangle = 0\\ \eta_{\mu\nu}(p^\mu \Gamma^\nu + i\sqrt{2}\sum_{m>0}(d_{-m}^\nu \alpha_m^\mu + \alpha_{-m}^\mu d_m^\nu))|\phi\rangle = 0\end{aligned}$$

これは $p^\mu \Gamma^\nu$ がディラック方程式と同じなのでディラック方程式の一般化と考えられて、Dirac-Ramond 方程式と呼ばれます。

spurious state として

$$|\psi\rangle = F_0 F_{-1}|\chi\rangle$$

を作ります。F_n もマヨラナスピノールであることから

$$F_n^\dagger = \sum_m (\alpha_m^\mu d_{n-m}^\nu)^* \eta_{\mu\nu} = \sum_m \alpha_{-m}^\mu d_{-n+m}^\nu \eta_{\mu\nu} = \sum_m \alpha_m^\mu d_{-n-m}^\nu \eta_{\mu\nu} = F_{-n}$$

となっているので

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|F_0 F_{-1}|\chi\rangle = \langle\chi|F_{-1}^\dagger F_0^\dagger|\phi\rangle = 0$$

このように物理的状態と直交します。$|\psi\rangle$ が物理的な場合を見ます。

$L_m|\psi\rangle$ は

$$\begin{aligned}L_m|\psi\rangle &= L_m F_0 F_{-1}|\chi\rangle\\ &= ([L_m, F_0] + F_0 L_m)F_{-1}|\chi\rangle\\ &= \frac{m}{2} F_m F_{-1}|\chi\rangle + F_0 L_m F_{-1}|\chi\rangle\\ &= \frac{m}{2} F_m F_{-1}|\chi\rangle + F_0([L_m, F_{-1}] + F_{-1}L_m)|\chi\rangle\\ &= \frac{m}{2} F_m F_{-1}|\chi\rangle + F_0((1+\frac{m}{2})F_{m-1} + F_{-1}L_m)|\chi\rangle\\ &= \frac{m}{2} F_m F_{-1}|\chi\rangle + (1+\frac{m}{2})F_0 F_{m-1}|\chi\rangle + F_0 F_{-1} L_m|\chi\rangle\end{aligned}$$

$m = 0$ のとき

$$0 = F_0 F_{-1}(1 + L_0)|\chi\rangle$$

なので、spurious state の条件から

$$(L_0+1)|\chi\rangle = 0 \tag{11}$$

$m=1$ のときは

$$
\begin{aligned}
L_1|\psi\rangle &= \frac{1}{2}F_1F_{-1}|\chi\rangle + \frac{3}{2}F_0F_0|\chi\rangle + F_0F_{-1}L_1|\chi\rangle \\
&= \frac{1}{2}F_1F_{-1}|\chi\rangle + \frac{3}{4}\{F_0, F_0\}|\chi\rangle + F_0F_{-1}L_1|\chi\rangle \\
&= \frac{1}{2}F_1F_{-1}|\chi\rangle + \frac{3}{2}L_0|\chi\rangle + F_0F_{-1}L_1|\chi\rangle \\
&= \frac{1}{2}F_1F_{-1}|\chi\rangle + \frac{3}{2}L_0|\chi\rangle + F_0F_{-1}L_1|\chi\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\{F_1, F_{-1}\} - F_{-1}F_1)|\chi\rangle + \frac{3}{2}L_0|\chi\rangle\rangle + F_0F_{-1}L_1|\chi\rangle \\
&= \frac{1}{2}(2L_0 + \frac{D}{2} - F_{-1}F_1)|\chi\rangle + \frac{3}{2}L_0|\chi\rangle + F_0F_{-1}L_1|\chi\rangle \\
0 &= \frac{1}{2}(5L_0 + \frac{D}{2} - F_{-1}F_1)|\chi\rangle + F_0F_{-1}L_1|\chi\rangle
\end{aligned} \tag{12}
$$

これだけだとはっきりしないので、F_m を作用させた方も見ておきます。
$F_0|\psi\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
F_0|\psi\rangle &= F_0F_0F_{-1}|\chi\rangle \\
&= L_0F_{-1}|\chi\rangle \\
&= ([L_0, F_{-1}] + F_{-1}L_0)|\chi\rangle \\
&= (F_{-1} + F_{-1}L_0)|\chi\rangle \\
0 &= F_{-1}(1+L_0)|\chi\rangle
\end{aligned}
$$

なので、(11) と同じものが出てくるだけです。F_1 では

$$
\begin{aligned}
F_1|\psi\rangle &= F_1F_0F_{-1}|\chi\rangle \\
&= (\{F_1, F_0\} - F_0F_1)F_{-1}|\chi\rangle \\
&= 2L_1F_{-1}|\chi\rangle - F_0F_1F_{-1}|\chi\rangle \\
&= 2([L_1, F_{-1}] + F_{-1}L_1)|\chi\rangle - F_0(\{F_1, F_{-1}\} - F_{-1}F_1)|\chi\rangle \\
&= 2(\frac{3}{2}F_0 + F_{-1}L_1)|\chi\rangle - F_0(2L_0 + \frac{D}{2} - F_{-1}F_1)|\chi\rangle
\end{aligned} \tag{13}
$$

となるので、(12) と比べて

$$L_1|\chi\rangle = 0\ ,\ \ F_1|\chi\rangle = 0$$

とすることで、(11) によって (12) は

$$0 = \frac{1}{2}(5L_0 + \frac{D}{2})|\chi\rangle = \frac{1}{4}(-10 + D)|\chi\rangle$$

(13) は

$$0 = F_0(3 - (2L_0 + \frac{D}{2}))|\chi\rangle = \frac{1}{2}F_0(6 + 4 - D)|\chi\rangle = \frac{1}{2}F_0(10 - D)|\chi\rangle$$

よって、R 境界条件では臨界次元は $a = 0$ で $D = 10$ となります。このように、a は境界条件に依存しますが、次元 D は境界条件に依存せずに 10 です。

ボソンの場合では臨界次元が光円錐ゲージでのローレンツ不変な次元になっているので、RNS 形式でも同じになっているのが予想できます。これを実際に確かめます。「世界面での超対称性」と「Supar Virasoro 代数」での記号を使っています。

光円錐座標の計量は

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

として、$\mu = +, -, 2, 3, \ldots, D-1$ で、$I = 2, 3, \ldots, D-1$ とします。I 成分の内積は $\eta_{IJ}a^Ib^J = a^Ib^I$ と書きます。ボソンのみでの光円錐ゲージは X^+ に対して

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau \quad (X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1))$$

とすることで与えられます。「世界面での超対称性」でフェルミオンを加えるときに、共形ゲージをすでに取っているので同じように ψ^+ に条件を与えることが出来ます。しかし、フェルミオンがいることによって作用は超対称性変換

$$\delta_s X^\mu = \bar{\epsilon}\psi^\mu$$

$$\delta_s \psi^\mu = -i\rho^a\partial_a X^\mu \epsilon$$

$$\delta_s \overline{\psi}^\mu = i\bar{\epsilon}\rho^a(\partial_a X^\mu)$$

による不変性を持っています (ϵ は超対称性のパラメータでグラスマン数。$\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger\rho^0$)。このときに X^+ の選び方による影響を受けないようにするために

$$\psi^+ = 0 \quad (\psi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^0 \pm \psi^1))$$

と選びます。こうすれば $\delta_s X^+ = \bar{\epsilon}\psi^+ = 0$ になるので、X^+ の選び方の影響を受けなくなります。これが NRS 形式での光円錐ゲージとなります。

この条件によって $J_\pm$ は $(\psi^\mu = (\psi^\mu_-, \psi^\mu_+))$

$$J_+ = (\partial_+ X^\mu)\psi^\nu_+\eta_{\mu\nu} = -(\partial_+ X^+)\psi^-_+ - (\partial_+ X^-)\psi^+_+ + (\partial_+ X^I)\psi^I_+ = -\frac{1}{2}p^+\psi^-_+ + (\partial_+ X^I)\psi^I_+$$

$$J_- = (\partial_- X^\mu)\psi^\nu_-\eta_{\mu\nu} = -(\partial_- X^+)\psi^-_- - (\partial_- X^-)\psi^+_- + (\partial_- X^I)\psi^I_- = -\frac{1}{2}p^+\psi^-_- + (\partial_- X^I)\psi^I_-$$

T_{++} は

$$
\begin{aligned}
T_{++} &= \partial_+ X^\mu \partial_+ X^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} i\psi_+ \partial_+ \psi_+ \\
&= -\partial_+ X^+ \partial_+ X^- - \partial_+ X^- \partial_+ X^+ + \partial_+ X^I \partial_+ X^I - \frac{1}{2} i\psi_+^+ \partial_+ \psi_+^- - \frac{1}{2} i\psi_+^- \partial_+ \psi_+^+ + \frac{1}{2} i\psi_+^I \partial_+ \psi_+^I \\
&= -p^+ \partial_+ X^- + \partial_+ X^I \partial_+ X^I + \frac{1}{2} i\psi_+^I \partial_+ \psi_+^I
\end{aligned}
$$

T_{--} は

$$
\begin{aligned}
T_{--} &= \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{1}{2} i\psi_- \partial_- \psi_- \\
&= -\partial_- X^+ \partial_- X^- - \partial_- X^- \partial_- X^+ + \partial_- X^I \partial_- X^I - \frac{1}{2} i\psi_-^+ \partial_- \psi_-^- - \frac{1}{2} i\psi_-^- \partial_- \psi_-^+ + \frac{1}{2} i\psi_-^I \partial_- \psi_-^I \\
&= -p^+ \partial_- X^- + \partial_- X^I \partial_- X^I + \frac{1}{2} i\psi_-^I \partial_- \psi_-^I
\end{aligned}
$$

$\partial_\pm$ は

$$
\partial_\pm = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} \pm \frac{\partial}{\partial\sigma})
$$

と定義しています。というわけで、拘束条件 $T_{ab} = J_a = 0$ は

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2} p^+ \psi_\pm^- + (\partial_+ X^I)\psi_\pm^I \\
0 &= -p^+ \partial_\pm X^- + \partial_\pm X^I \partial_\pm X^I + \frac{1}{2} i\psi_\pm^I \partial_\pm \psi_\pm^I
\end{aligned}
$$

これから分かるように ψ^- は ψ^I によって書けるので、必要な自由度は I 成分です。なので、物理的状態は生成演算子の I 成分によって作られます。これはボソンと同じ状況です。
α_n^μ, b_r^μ を使った形にするなら

$$
\begin{aligned}
X^\mu(\tau,\sigma) &= x_0^\mu + p^\mu \tau + i\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}) \\
\psi_+^\mu(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_r b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\partial_+ X^\mu &= \frac{1}{2}p^\mu + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} = \frac{1}{2}\sum_n \alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \qquad (\alpha_0^\mu = p^\mu) \\
\partial_+ \psi_+^\mu &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\sum_r r b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}
\end{aligned}
$$

であることを使えばいいです。そうすると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}p^+\psi_+^- &= (\partial_+ X^I)\psi_+^I \\
\frac{p^+}{2\sqrt{2}}\sum_r b_r^- e^{-ir(\tau+\sigma)} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_n\sum_r \alpha_n^I b_r^I e^{-i(n+r)(\tau+\sigma)} \\
p^+\sum_r b_r^- e^{-i(r-s)(\tau+\sigma)} &= \sum_n\sum_r \alpha_n^I b_r^I e^{-i(n+r-s)(\tau+\sigma)} \\
p^+\sum_r b_r^- \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ e^{-i(r-s)(\tau+\sigma)} &= \sum_n\sum_r \alpha_n^I b_r^I \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ e^{-i(n+r-s)(\tau+\sigma)} \\
p^+\sum_r b_r^- \delta_{r-s,0} e^{-i(r-s)\tau} &= \sum_n\sum_r \alpha_n^I b_r^I \delta_{n+r-s,0} e^{-i(n+r-s)\tau} \\
b_s^- &= \frac{1}{p^+}\sum_r \alpha_{s-r}^I b_r^I
\end{aligned}
$$

もう片方は

$$
\begin{aligned}
p^+\partial_+ X^- &= \partial_+ X^I \partial_+ X^I + \frac{1}{2} i\psi_+^I \partial_+ \psi_+^I \\
\frac{p^+}{2}\sum_n \alpha_n^- e^{-in(\tau+\sigma)} &= \frac{1}{4}\sum_{m,n} \alpha_m^I \alpha_n^I e^{-i(m+n)(\tau+\sigma)} + \frac{1}{4}\sum_{r,s} r b_s^I b_r^I e^{-i(r+s)(\tau+\sigma)} \\
\frac{p^+}{2}\sum_n \alpha_n^- \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{-i(n-l)(\tau+\sigma)} &= \frac{1}{4}\sum_{m,n} \alpha_m^I \alpha_n^I \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{-i(m+n-l)(\tau+\sigma)} \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{r,s} r b_s^I b_r^I \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{-i(r+s-l)(\tau+\sigma)} \\
\frac{p^+}{2}\sum_n \alpha_n^- \delta_{n-l,0} e^{-i(n-l)\tau} &= \frac{1}{4}\sum_{m,n} \alpha_m^I \alpha_n^I \delta_{m+n-l,0} e^{-i(m+n-l)\tau} + \frac{1}{4}\sum_{r,s} r b_s^I b_r^I \delta_{r+s-l} e^{-i(r+s-l)\tau} \\
\alpha_l^- &= \frac{1}{2p^+}(\sum_n \alpha_{l-n}^I \alpha_n^I + \sum_r r b_{l-r}^I b_r^I) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となります。

このように I 成分によって物理的状態は作られるので、質量演算子も I 成分のみのボソン、フェルミオンの粒子数演算子 N_b, N_f と定数 a によって書けます。作用させる基底状態は α_m^I、b_r^I, d_m^I それぞれに対して

$$
\begin{aligned}
&|p^+, \boldsymbol{p}\rangle\ ,\ |0\rangle_{NS}\ ,\ |0\rangle_R \\
&\alpha_m^I|p^+, \boldsymbol{p}\rangle = 0 \\
&\alpha_m^I|0\rangle_{NS} = b_r^I|0\rangle_{NS} = 0 \quad (m, r > 0) \\
&\alpha_m^I|0\rangle_R = d_n^I|0\rangle_R = 0 \quad (m, n > 0)
\end{aligned}
$$

とします。α_m^I が作用する基底状態は「ボソン弦の状態」と同じです。全体の基底状態は直積によって

$$|0;p^\mu\rangle_{NS} = |0\rangle_{NS} \otimes |p^+,\boldsymbol{p}\rangle \ , \ |0;p^\mu\rangle_R = |0\rangle_R \otimes |p^+,\boldsymbol{p}\rangle$$

と書き、これに作用させます。

最初に少し触れたように、「ボソン弦の状態」で質量演算子 M_B^2 が粒子数演算子

$$N_B = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I$$

によって

$$\frac{1}{2}M_B^2 = N_B - a_B$$

と書けたことを今の状況に適用します (左辺の 1/2 は α' です)。つまり、フェルミオン部分の粒子数演算子を加えます。

フェルミオン部分の粒子数演算子は NS,R 境界条件それぞれに対して

$$N_F = \sum_r r b_{-r}^I b_r^I \ , \ N_F = \sum_n n d_{-n}^I d_n^I$$

となっています。実際に、フェルミオンの反交換関係が

$$\begin{aligned}
\{b_r^\mu, b_s^\nu\} &= \eta^{\mu\nu}\delta_{r+s,0} \\
\{d_n^\mu, d_m^\nu\} &= \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}
\end{aligned}$$

であることから、NS 境界条件なら (R 境界条件でも全く同じ)

$$\begin{aligned}
N_F b_{-s}^I|0\rangle_{NS} = \sum_r r b_{-r}^J b_r^J b_{-s}^I|0\rangle_{NS} &= \sum_r r b_{-r}^J(\{b_r^J, b_{-s}^I\} - b_{-s}^I b_r^J)|0\rangle_{NS} \\
&= \sum_r r b_{-r}^J \eta^{IJ}\delta_{r-s,0}|0\rangle_{NS} \\
&= s b_{-s}^I|0\rangle_{NS}
\end{aligned}$$

となるので、N_F は粒子数演算子です。N_F では r,n がいるのは、N_B は

$$\begin{gathered}
N_B = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m^{I\dagger} a_m^I \\
[a_m^I, (a_n^J)^\dagger] = \eta^{IJ}\delta_{mn} \\
(\alpha_n^I = a_n^I\sqrt{n} \ , \ \alpha_{-n}^I = (a_n^I)^\dagger\sqrt{n} \quad (n \geq 1))
\end{gathered}$$

となっていることに対応しているだけです。というわけで、質量演算子は

$$M^2 = N_B + N_F - a$$

a は $a = a_B + a_F$ $(a_F = a_{NS}, a_R)$ としています。a_B は正規積で無視した定数部分で

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_m \alpha^I_{-m}\alpha^I_m &= \frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0 + \frac{1}{2}\sum_{m\neq 0}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m \\
&= \frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m + \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{-1}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m \\
&= \frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_m\alpha^I_{-m} \\
&= \frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}([\alpha^I_m, \alpha^I_{-m}] + \alpha^I_{-m}\alpha^I_m) \\
&= \frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m + \frac{1}{2}\eta^{II}\sum_{m=1}^{\infty} m
\end{aligned}
$$

での

$$
a_B = -\frac{1}{2}\eta^{II}\sum_{m=1}^{\infty} m = -\frac{1}{2}(D-2)\sum_{m=1}^{\infty} m
$$

のことです。なので、フェルミオン部分でも同様にして、NS 境界条件において（R 境界条件でも同様）

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_r r b^I_{-r}b^I_r &= \frac{1}{2}\sum_{r>0} r b^I_{-r}b^I_r + \eta_{\mu\nu}\frac{1}{2}\sum_{r<0} r b^I_{-r}b^I_r \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r>0} r b^I_{-r}b^I_r - \frac{1}{2}\sum_{r>0} r b^I_r b^I_{-r} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r>0} r b^I_{-r}b^I_r - \frac{1}{2}\sum_{r>0} r(\{b^I_r, b^I_{-r}\} - b^I_{-r}b^I_r) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r>0} r b^I_{-r}b^I_r - \frac{1}{2}\eta^{II}\sum_{r>0} r + \frac{1}{2}\sum_{r>0} r b^I_{-r}b^I_r \\
&= \sum_{r>0} r b^I_{-r}b^I_r - \frac{1}{2}\eta^{II}\sum_{r>0} r
\end{aligned}
$$

と変形することで、a_F は NS,R 境界条件において

$$
a_{NS} = \frac{1}{2}\eta^{II}\sum_{r>0} r \ , \ a_R = \frac{1}{2}\eta^{II}\sum_{m>0} m
$$

となります。R 境界条件では

$$
a = a_B + a_R = -\frac{1}{2}\eta^{II}\sum_{m>0} m + \frac{1}{2}\eta^{II}\sum_{m>0} m = 0
$$

このように、$a = 0$ となっているのがすぐに分かります。a_{NS} も複雑なことなしで計算できます。a_{NS} は

$$a_{NS} = \frac{1}{2}(D-2)\sum_{r>0} r = \frac{1}{2}(D-2)\frac{1}{2}(1+3+5+\cdots) = \frac{1}{2}(D-2)\frac{1}{2}\frac{1}{12} = \frac{1}{48}(D-2)$$

このときに使った奇数の無限個の和は簡単に求められます。これは偶数の無限個の和は

$$2+4+6+\cdots = 2(1+2+3+\cdots) = 2\sum_{m=1}^{\infty}$$

と書けることを利用することで

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} n &= \sum_{odd} n + \sum_{even} n \\
&= \sum_{odd} n + 2\sum_{m=1}^{\infty} n \\
\sum_{odd} n &= -\sum_{m=1}^{\infty} n \\
&= \frac{1}{12} \quad \left(\sum_{m=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}\right)
\end{aligned}$$

と求められます (odd は奇数、$even$ は偶数の和)。
　よって、質量演算子は

$$\begin{aligned}
&N_B = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^I_{-m}\alpha^I_m \ , \ N_F = \sum_{r>0} r b^I_{-r} b^I_r \\
&\mathrm{NS}: \ a = a_B + a_{NS} \ , \ a_{NS} = \frac{1}{2}(D-2)\sum_{r>0} r = \frac{1}{48}(D-2) \\
&\mathrm{R}: \ a = a_B + a_R = 0 \ , \ a_R = \frac{1}{2}(D-2)\sum_{m>0} m = -\frac{1}{24}(D-2) \\
&a_B = -\frac{1}{2}(D-2)\sum_{m>0} m = \frac{1}{24}(D-2)
\end{aligned}$$

による

$$\frac{1}{2}M^2 = N_B + N_F - a$$

となります。
　R 境界条件では $a=0$ なので NS 境界条件として、$b^{\mu}_{-1/2}$ を基底状態に作用させた励起状態を見てみます。これは

$$N_F b^I_{-1/2}|0;p^{\mu}\rangle_{NS} = \frac{1}{2} b^I_{-1/2}|0;p^{\mu}\rangle_{NS}$$

今は $I=2,3,\dots,D-1$ であるために、状態は $D-2$ 個あります。なので、「Virasoro 代数」での $D-2$ 個の成分を持つベクトルのローレンツ不変性の要求

$$M^2 b^I_{-1/2}|0;p^\mu\rangle_{NS}=0$$

が与えられます (この状態はベクトルボソン)。そうすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M^2 b^I_{-1/2}|0;p^\mu\rangle_{NS} &= 2(N_B+N_F+a)b^I_{-1/2}|0;p^\mu\rangle_{NS}\\ &= 2(0+\frac{1}{2}-a)b^I_{-1/2}|0;p^\mu\rangle_{NS}\\ &= 0\end{aligned}$$

であることから $a=1/2$ となります。途中で

$$\begin{aligned}N_F b^J_{-1/2} &= \sum_{r>0} r b^I_{-r} b^I_r b^J_{-1/2}\\ &= \sum_{r>0} r b^I_{-r}(\{b^I_r, b^J_{-1/2}\} - b^J_{-1/2} b^I_r)\\ &= \sum_{r>0} r b^I_{-r}(\eta^{IJ}\delta_{r-1/2.0} - b^J_{-1/2} b^I_r)\\ &= \frac{1}{2}b^J_{-1/2} - \sum_{r>0} r b^I_{-r} b^J_{-1/2} b^I_r\end{aligned}$$

を使っています。よって

$$\frac{1}{2}=a_B+a_{NS}=\frac{1}{24}(D-2)+\frac{1}{48}(D-2)=\frac{1}{16}(D-2)$$

が成立する次元は $D=10$ です。というわけで、NS 境界条件でのローレンツ不変な次元は $a=1/2, D=10$ となります。これは臨界次元と等しくなっています。

また、求められた a を入れてみると基底状態は

$$\frac{1}{2}M^2|0;p^\mu\rangle_{NS}=(N_b+N_f-\frac{1}{2})|0;p^\mu\rangle_{NS}=-\frac{1}{2}|0;p^\mu\rangle_{NS}$$

となるので、明らかにタキオンです。というわけで、RNS 形式での NS 境界条件にはタキオンがいます。しかし、除去する方法があります。そのために、演算子として

$$G=(-1)^{f+1}\qquad (f=\sum_r b^I_{-r}b^I_r)$$

というのを作ります。これは G パリティと呼ばれます。f は世界面上でのフェルミオンの粒子数に対応するので、G の符号はフェルミオンの数によって決まります。これを使って、G が正となる状態だけを残すことを GSO 射影 (GSO projection) と言います。GSO は Gliozzi, Scherk, Olive からです。

$|0;p^\mu\rangle_{NS}$ では $f=0$ なので

$$G|0;p^\mu\rangle_{NS}=-|0;p^\mu\rangle_{NS}$$

となり、-1 なのでこれは除く状態です。$|0;p^\mu\rangle_{NS}$ はタキオンの状態なので、これでタキオンの状態がなくなります。次の励起状態 $b^I_{-1/2}|0;p^\mu\rangle_{NS}$ は $f=1$ なので

$$Gb^I_{-1/2}|0;p^\mu\rangle_{NS}=b^I_{-1/2}|0;p^\mu\rangle_{NS}$$

となり、$+1$ なので除去されずに残ります。これによって、質量 0 のベクトルボソンの状態である $b^I_{-1/2}|0;p^\mu\rangle_{NS}$ が新しい基底状態となります。このようにして、NS 境界条件ではフェルミオンの数が奇数である状態だけを残すようにします。これは勝手につけた制限のように見えますが、この制限がないと超対称性を含んだ理論を矛盾なく作ることが出来ません。

R 境界条件では $a=0$ なので、同じ方法からは次元 D を求めることは出来ない上に、NS 境界条件に比べて複雑な構造を持っています。これは、d^μ_0 は質量演算子 M^2 と反交換し、R 境界条件での基底状態 $|0\rangle_R$ は

$$d^\mu_0|0\rangle_R\neq 0$$

であるためです。このために真空が縮退しています。さらに、上でも触れたように d^μ_0 の反交換関係がガンマ行列と同じ代数 (クリフォード代数) を構成しているために、$|0\rangle_R$ がスピノールになります。

・補足

光円錐ゲージでの質量演算子は別の方法からも求められます。Virasoro 演算子 L_m は

$$L_m=L^b_m+L^f_m$$

$$L^b_m=\frac{1}{2}\sum_n :\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_{m+n}:\eta_{\mu\nu}\ ,\ L^f_m=\frac{1}{2}\sum_r(r+\frac{m}{2}):b^\mu_{-r}b^\nu_{m+r}:\eta_{\mu\nu}$$

NS 境界条件の b^μ_r を使いますが、R 境界条件でも同じです。このときの正規積部分は $m=0$ のとき、上で求めたのと同じで

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_n \alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_r rb^\mu_{-r}b^\nu_r\\
&=\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^\infty\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=-1}^{-\infty}\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n\\
&\quad+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{r>0}rb^\mu_{-r}b^\nu_r+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{r<0}rb^\mu_{-r}b^\nu_r\\
&=\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^\infty\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^\mu_{n}\alpha^\nu_{-n}\\
&\quad+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{r>0}rb^\mu_{-r}b^\nu_r-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{r>0}rb^\mu_{r}b^\nu_{-r}\\
&=\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^\infty\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}([\alpha^\mu_{n},\alpha^\nu_{-n}]+\alpha^\nu_{-n}\alpha^\mu_n)\\
&\quad+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{r>0}rb^\mu_{-r}b^\nu_r-\eta_{\mu\nu}\frac{1}{2}\sum_{r>0}r([b^\mu_{r},b^\nu_{-r}]-b^\nu_{-r}b^\mu_r)\\
&=\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^\infty\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}n\eta^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^\infty\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n\\
&\quad+\eta_{\mu\nu}\frac{1}{2}\sum_{r>0}rb^\mu_{-r}b^\nu_r-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\sum_{r>0}r+\eta_{\mu\nu}\frac{1}{2}\sum_{r>0}rb^\nu_{-r}b^\mu_r\\
&=\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0+\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^\infty\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n+\eta_{\mu\nu}\sum_{r>0}rb^\mu_{-r}b^\nu_r\\
&\quad+\frac{D}{2}\sum_{n=1}^\infty n-\frac{D}{2}\sum_{r>0}r
\end{aligned}
$$

での定数部分を除いたものになります。ここで出てきた定数を

$$a=a_B+a_{NS}\ ,\ a=a_B+a_R$$

$$a_B=-\frac{D}{2}\sum_{n=1}^\infty n\ ,\ a_{NS}=\frac{D}{2}\sum_{r>0}r\ ,\ a_R=\frac{D}{2}\sum_{m>0}m$$

とします。上で実際に見たように光円錐座標では D は $D-2$ に置き換わります ($\eta^{II}=D-2$)。というわけで、L_0 は

$$L_0=\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_0\alpha^\nu_0+\eta_{\mu\nu}\sum_{n=1}^\infty\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n+\eta_{\mu\nu}\sum_{r>0}rb^\mu_{-r}b^\nu_r$$

質量演算子は基底状態に作用させるとして、質量殻条件 $M^2=-p^2$ で与えます。光円錐ゲージにするので、運動量は光円錐座標での

$$M^2=p^+p^-+p^-p^+-p^Ip^I$$

とします。運動量 p^μ はボソン部分なので、「弦のゲージ固定」で求めた関係 $\alpha_0^\mu = p^\mu$ を今の拘束条件 (14) に合わせることで

$$
\begin{aligned}
p^- &= \alpha_0^- \\
&= \frac{1}{p^+}(\frac{1}{2}\sum_m \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \frac{1}{2}\sum_r r b_{-r}^I b_r^I) \\
&= \frac{1}{p^+}(\frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \sum_{r>0} r b_{-r}^I b_r^I - a) \\
p^- p^+ &= (L_0 - a)
\end{aligned}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
M^2 &= 2(L_0 - a) - p^I p^I \\
&= 2(\frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \sum_{r>0} r b_{-r}^I b_r^I - a) - p^I p^I \\
&= 2(\frac{1}{2}p^I p^I + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \sum_{r>0} r b_{-r}^I b_r^I - a) - p^I p^I \\
&= 2\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + 2\sum_{r>0} r b_{-r}^I b_r^I - 2a \\
\frac{1}{2}M^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \sum_{r>0} r b_{-r}^I b_r^I - a \\
&= N_b + N_f - a
\end{aligned}
$$

と書け、上での形と同じになります。