

弦理論と共形場理論

弦理論には世界面の記述において2つのパラメータが導入されているので、2次元の構造を持っています。このため2次元の共形場理論を用いることができます。ここではその触りの部分を見ていきます。ここで出てくる共形場理論に関する部分は場の量子論での「共形変換」を見てください。後半は共形場理論を弦理論に適用する例を手っ取り早く示すことを目的にしているので、かなり雑な話をしています。

まず、ポリヤコフ作用を持ち出します。ポリヤコフ作用は

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int d\sigma \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

$\eta_{\mu\nu}$ は時空のミンコフスキー計量、パラメータの計量 g_{ij} は

$$g_{ij} = g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とします。このパラメータ τ, σ に対する計量の形をユークリッド空間での $(+1, +1)$ の形に持って行きます。そのためにはパラメータ空間においてウィック回転をすればいいので

$$\tau \Rightarrow \tau' = i\tau$$

とします。そうするとパラメータ空間での線素 ds^2 は

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\sigma^2 \Rightarrow ds^2 = d\tau'^2 + d\sigma^2$$

となり、ユークリッド空間での線素になり、計量はクロネッカーデルタ δ_{ij} となります (添え字の上付き下付きの区別がなくなる)。ユークリッド空間での添え字は $a = 1, 2$ として $a = 1$ が τ 、 $b = 2$ が σ だとします。

ポリヤコフ作用において計量 g^{ij} をユークリッド空間の計量 δ^{ab} のものだとすれば、 $\sqrt{-g}$ は $\sqrt{|g|}$ に置き換わるので (計量がミンコフスキー時空と違い $+, +, \dots$ だから)

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int d\sigma \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} \\ \Rightarrow S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} (-i) \int d\tau' \int d\sigma \sqrt{|g|} (\delta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu) \eta_{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{4\pi\alpha'} \int d\tau' \int d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau'} X^\mu \frac{\partial}{\partial \tau'} X^\nu + \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\nu \right) \eta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

となります。 τ' は実数です (場の量子論「経路積分」参照)。そして、経路積分でのユークリッド化の置き換え

$$e^{iS} \Leftrightarrow e^{-S_E}$$

との対応から、ユークリッド空間でのポリヤコフ作用と言った時には

$$S_E = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau' \int d\sigma \delta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} X^\mu \frac{\partial}{\partial \tau} X^\nu + \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\nu \right) \eta_{\mu\nu}$$

の形を指します (τ' を τ にしています)。

2つの実数のパラメータ τ, σ を使って複素数として (「共形変換」での定義と逆にしています)

$$w = \tau - i\sigma, \bar{w} = \tau + i\sigma$$

というのを定義し (\bar{w} は複素共役)、パラメータ変換によってユークリッド空間でのポリヤコフ作用を w, \bar{w} を使った形にします (ポリヤコフ作用はパラメータ変換に対して不変)。 τ, σ は

$$\tau = \frac{1}{2}(w + \bar{w}), \sigma = \frac{i}{2}(w - \bar{w})$$

なので w, \bar{w} の微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} &= \frac{\partial \tau}{\partial w} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial w} \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{w}} &= \frac{\partial \tau}{\partial \bar{w}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{w}} \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

変換後の計量 \tilde{g}_{ab} は w, \bar{w} に対するもの ($\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{ww}, \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{w\bar{w}}, \tilde{g}_{21} = \tilde{g}_{\bar{w}w}, \tilde{g}_{22} = \tilde{g}_{\bar{w}\bar{w}}$) なので、計量の変換則

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$$

から

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= \frac{\partial x^1}{\partial w} \frac{\partial x^1}{\partial w} \delta_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial w} \frac{\partial x^2}{\partial w} \delta_{22} = \frac{\partial \tau}{\partial w} \frac{\partial \tau}{\partial w} + \frac{\partial \sigma}{\partial w} \frac{\partial \sigma}{\partial w} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\ \tilde{g}_{12} &= \frac{\partial x^1}{\partial w} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{w}} \delta_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial w} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{w}} \delta_{22} = \frac{\partial \tau}{\partial w} \frac{\partial \tau}{\partial \bar{w}} + \frac{\partial \sigma}{\partial w} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

同様にすれば $\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22}, \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{21}$ であることが分かるので計量は

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tilde{g}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となります。そして、 $\sqrt{-g}d\tau d\sigma$ のパラメータ変換は2次元の座標変換と同じなので体積要素の変換 (一般相対性理論の「共変微分」参照)

$$\sqrt{-g}d^D x = \sqrt{-g'}d^D x'$$

を使い、ユークリッド空間なのでルート内部には絶対値を入れることで、 $\sqrt{|-g|}d\tau d\sigma$ と $\sqrt{|-\tilde{g}|}dw d\bar{w}$ は

$$d\tau d\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}}dw d\bar{w}$$

よって、 w, \bar{w} を使うとポリヤコフ作用はパラメータ変換によって

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int d\sigma (\delta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu) \eta_{\mu\nu} \\
&\Rightarrow \frac{1}{4\pi\alpha'} \int dw d\bar{w} \frac{1}{2} (\dot{g}^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu) \eta_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int dw d\bar{w} \frac{1}{2} (2\partial_w X^\mu \partial_{\bar{w}} X^\nu + 2\partial_{\bar{w}} X^\mu \partial_w X^\nu) \eta_{\mu\nu} \quad (\partial_w = \frac{\partial}{\partial w}, \partial_{\bar{w}} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}}) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dw d\bar{w} \partial_w X^\mu(w, \bar{w}) \partial_{\bar{w}} X^\nu(w, \bar{w}) \eta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

記号を簡略化するために

$$\partial_w = \partial, \quad \partial_{\bar{w}} = \bar{\partial}$$

とします。この作用から出てくる運動方程式を求めるために変分 δX^μ を加えて

$$\begin{aligned}
S + \delta S &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dw d\bar{w} (\partial(X^\mu + \delta X^\mu) \bar{\partial} X_\mu + \partial X^\mu \bar{\partial}(X_\mu + \delta X_\mu)) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dw d\bar{w} (\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \partial \delta X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \partial X^\mu \bar{\partial} \delta X_\mu)
\end{aligned}$$

この δS 部分は

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dw d\bar{w} (\partial \delta X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \partial X^\mu \bar{\partial} \delta X_\mu) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dw d\bar{w} (-\delta X^\mu \partial \bar{\partial} X_\mu - \delta X_\mu \bar{\partial} \partial X^\mu) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dw d\bar{w} \delta X^\mu (2\partial \bar{\partial} X_\mu)
\end{aligned}$$

2行目に行くときに変分 δX^μ は w, \bar{w} の範囲の端で消えるとしています。よって δS が0になるということから運動方程式は

$$\partial \bar{\partial} X_\mu(w, \bar{w}) = 0$$

この方程式の一般解は

$$X_\mu(w, \bar{w}) = X_\mu(w) + X_\mu(\bar{w})$$

と与えられることが式の形から分かります。複素関数の定義から、 $X_\mu(w)$ は正則関数 (holomorphic function)、 $X_\mu(\bar{w})$ は反正則関数 (anti-holomorphic function) です。また、弦の進行方向との対応から、 $X_\mu(w) = X_\mu(\tau - i\sigma)$ を right moving、 $X_\mu(\bar{w}) = X_\mu(\tau + i\sigma)$ を left moving と呼びます (ウィック回転は $\tau \pm i\sigma \rightarrow -i(\tau \pm i\sigma)$)。 w と \bar{w} の定義が逆になっていると right と left が逆になります。

パラメータ τ, σ が複素数 w, \bar{w} になったことで X^μ がどうなるのか見ていきます。その前に w を置き換えます。新しく z として

$$z = e^w = e^{\tau - i\sigma}, \quad \bar{z} = e^{\bar{w}} = e^{\tau + i\sigma}$$

この変換によって、閉弦では τ と σ が複素平面 z 上で円を描きます。閉弦は σ に周期性 $\sigma = \sigma + 2\pi$ を持っているため、 τ ($-\infty < \tau < \infty$) と σ で円筒を作れます (σ は 2π で戻ってくるので円とし、高さとして τ を与えることで円筒)。この円筒を複素平面 z に持って行きます。 σ は 2π で元に戻るので、複素平面上でも同様に円を描き、角度として扱えます。 z の絶対値は

$$|z| = e^\tau$$

このため複素平面上の動径は e^τ になるので、 τ の増加によって複素平面上の点の位置は原点から遠ざかります ($\tau = -\infty$ で原点)。よって、例えば円筒において $\tau = \tau_1$ で切ったとすれば、複素平面 z 上では半径 e^{τ_1} の円となります。複素平面に持っていくことで、 τ の平行移動 $\tau + a$ は

$$\tau + a \Rightarrow e^a e^{\tau - i\sigma} = e^a z$$

となるのでスケール変換になり、 σ の平行移動 $\sigma + b$ は

$$\sigma + b \Rightarrow e^{-ib} e^{\tau - i\sigma} = e^{-ib} z$$

となるので複素平面での回転変換になります。

開弦でも同様の変換によって z に持っていけますが、開弦では σ は $0 \sim l$ のように境界が与えられているので、複素平面上での半円となります。 $z = e^{\tau + i\sigma}$ とすれば上半円、 $-i\sigma$ なら下半円になり、通常は上半円の定義が使われます。

ここからは閉弦を扱っていきます。閉弦での $X_\mu(\tau, \sigma)$ を

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$$

として周期的境界条件 $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ を使って波動方程式を解いたとき

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{\alpha'}{2}p^\mu(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}$$

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{\alpha'}{2}p^\mu(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)}$$

となっています。これはユークリッド化して複素数 w で書くと

$$X_L^\mu(\bar{w} = \tau + i\sigma) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{\alpha'}{2}p^\mu(-i\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(-i\tau + \sigma)}$$

$$= \frac{1}{2}x_0^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu(\tau + i\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-n(\tau + i\sigma)}$$

$$= \frac{1}{2}x_0^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \bar{w} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-n\bar{w}}$$

そして、 $\bar{z} = e^{\bar{w}}$ に持っていくと

$$X_L^\mu(\bar{z}) = \frac{1}{2}x_0^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \log \bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu \bar{z}^{-n}$$

同様に X_R^μ は

$$X_R^\mu(z) = \frac{1}{2}x_0^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \log z + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu z^{-n}$$

これで 2 次元の共形場理論で使われる複素数の形が入ったので、具体的な量を計算してみます。

記述が簡単なので光円錐ゲージでなく共変な形で行います。このときの交換関係は開弦のときと同じように時空の添え字を μ に置き換えればよくて

$$[x_0^\mu, p^\nu] = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} [x_0^\mu, \alpha_0^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}$$

$\eta^{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量です。「光円錐ゲージでの閉弦の量子化」で求めたように、 $\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_n^\mu$ は $n \geq 1$ での

$$\alpha_n^\mu = \sqrt{n}a_n^\mu, \quad \bar{\alpha}_n^\mu = \sqrt{n}\bar{a}_n^\mu$$

$$\alpha_{-n}^\mu = \sqrt{n}(a_n^\mu)^\dagger, \quad \bar{\alpha}_{-n}^\mu = \sqrt{n}(\bar{a}_n^\mu)^\dagger$$

から、 $\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_n^\mu$ が消滅演算子として作用することが分るので、真空 $|0\rangle$ は

$$\alpha_n^\mu |0\rangle = \bar{\alpha}_n^\mu |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \alpha_{-n}^\mu = \langle 0| \bar{\alpha}_{-n}^\mu = 0 \quad (n \geq 1)$$

て定義されます。 p^μ は運動量演算子なので真空中に作用すると $p^\mu |0\rangle = 0$ です。

X^μ を演算子化して 2 点相関関数 (伝播関数) G を求めます。ここでの時間順序は $X(\tau_1, \sigma_1), X(\tau_2, \sigma_2)$ での τ_1, τ_2 の大小に対して考えます。ウィックの定理での縮約部分を 2 点相関関数と定義すれば (理由は省いて定義としてしまします)、時間順序積と正規積によって

$$T(X^\mu(\tau_1, \sigma_1)X^\nu(\tau_2, \sigma_2)) = :X^\mu(\tau_1, \sigma_1)X^\nu(\tau_2, \sigma_2): + G(\tau_1, \sigma_1; \tau_2, \sigma_2)$$

T は時間順序積、「 $::$ 」は正規積です。この式から 2 点相関関数は

$$G(\tau_1, \sigma_1; \tau_2, \sigma_2) = T(X^\mu(\tau_1, \sigma_1)X^\nu(\tau_2, \sigma_2)) - :X^\mu(\tau_1, \sigma_1)X^\nu(\tau_2, \sigma_2):$$

という時間順序積と正規積の差になっています。 τ, σ を z, \bar{z} に変換すれば

$$G(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) = T(X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2)) - :X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2): \quad (1)$$

これを計算するために、 $\tau_1 > \tau_2$ とします。 z_1, z_2 の大小は τ による動径の長さで決まるので、 $|z_1| > |z_2|$ です。時間順序積と正規積の差が c 数の 2 点相関関数になっているので、 c 数を取り出すために真空中で挟みます。 $\tau_1 > \tau_2$ ($|z_1| > |z_2|$) での右辺第一項を真空中で挟んで

$$\langle 0|X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2)|0\rangle$$

を計算します。 X^μ を $X_L^\mu + X_R^\mu$ にして

$$\begin{aligned}
X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) &= (X_L^\mu(\bar{z}_1) + X_R^\mu(z_1))(X_L^\nu(\bar{z}_2) + X_R^\nu(z_2)) \\
&= (X_L^\mu(\bar{z}_1)X_L^\nu(\bar{z}_2) + X_R^\mu(z_1)X_R^\nu(z_2) + X_L^\mu(\bar{z}_1)X_R^\nu(z_2) + X_R^\mu(z_1)X_L^\nu(\bar{z}_2))
\end{aligned} \tag{2}$$

$X_L^\mu(\bar{z}_1)X_L^\nu(\bar{z}_2)$ を真空で挟むと

$$\begin{aligned}
&\langle 0|X_L^\mu(\bar{z}_1)X_L^\nu(\bar{z}_2)|0\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'^2}{4}\log \bar{z}_1 \log \bar{z}_2 \langle 0|p^\mu p^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{2}\sum_{m,n \neq 0} \frac{1}{mn} \bar{z}_1^{-n} \bar{z}_2^{-m} \langle 0|\bar{\alpha}_n^\mu \bar{\alpha}_m^\nu|0\rangle \\
&\quad - i\frac{\alpha'}{4}\log \bar{z}_2 \langle 0|x_0^\mu p^\nu|0\rangle + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \bar{z}_2^{-m} \langle 0|x_0^\mu \bar{\alpha}_m^\nu|0\rangle \\
&\quad - i\frac{\alpha'}{4}\log \bar{z}_1 \langle 0|p^\mu x_0^\nu|0\rangle + \frac{\alpha'}{2}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \bar{z}_2^{-m} \langle 0|p^\mu \bar{\alpha}_m^\nu|0\rangle \\
&\quad + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{z}_1^{-n} \langle 0|\bar{\alpha}_n^\mu x_0^\nu|0\rangle + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{z}_1^{-n} \langle 0|\bar{\alpha}_n^\mu p^\nu|0\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{2}\sum_{m,n \neq 0} \frac{1}{mn} \bar{z}_1^{-n} \bar{z}_2^{-m} \langle 0|\bar{\alpha}_n^\mu \bar{\alpha}_m^\nu|0\rangle - i\frac{\alpha'}{4}\log \bar{z}_1 \langle 0|p^\mu x_0^\nu|0\rangle
\end{aligned} \tag{3}$$

x_0, p^μ は $\bar{\alpha}_n$ と交換するので真空に作用して消えます ($\bar{\alpha}_n$ は $n > 0$ では右の真空、 $n < 0$ では左の真空に作用して消える)。 $\langle 0|\bar{\alpha}_n^\mu \bar{\alpha}_m^\nu|0\rangle$ の項で真空に作用しても消えずに残るのは

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n \neq 0} \frac{1}{mn} \bar{z}_1^{-n} \bar{z}_2^{-m} \langle 0|\bar{\alpha}_n^\mu \bar{\alpha}_m^\nu|0\rangle &= -\sum_{n \neq 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \bar{z}_1^{-n} \bar{z}_2^m \langle 0|\bar{\alpha}_n^\mu \bar{\alpha}_{-m}^\nu|0\rangle \\
&= -\sum_{n \neq 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \bar{z}_1^{-n} \bar{z}_2^m \langle 0|([\bar{\alpha}_n^\mu, \bar{\alpha}_{-m}^\nu] + \bar{\alpha}_{-m}^\nu \bar{\alpha}_n^\mu)|0\rangle \\
&= -\sum_{n \neq 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \bar{z}_1^{-n} \bar{z}_2^m n \eta^{\mu\nu} \delta_{n-m,0} \quad (\langle 0|0\rangle = 1) \\
&= -\eta^{\mu\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{z}_1^{-n} \bar{z}_2^n
\end{aligned}$$

$n - m = 0$ から n の範囲は $n \geq 1$ になります。 $\langle 0|p^\mu x_0^\nu|0\rangle$ でも交換関係を使うことで

$$\langle 0|p^\mu x_0^\nu|0\rangle = \langle 0|([p^\mu, x_0^\nu] + x_0^\nu p^\mu)|0\rangle = \langle 0|(-i\eta^{\mu\nu})|0\rangle = -i\eta^{\mu\nu}$$

よって

$$\langle 0|X_L^\mu(\bar{z}_1)X_L^\nu(\bar{z}_2)|0\rangle = \frac{1}{4}\langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{4}\eta^{\mu\nu} \log \bar{z}_1 + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}\right)^n \tag{4}$$

$X_R^\mu(z_1)X_R^\nu(z_2)$ は \bar{z} が z になるだけなので

$$\langle 0|X_R^\mu(z_1)X_R^\nu(z_2)|0\rangle = \frac{1}{4}\langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{4}\eta^{\mu\nu}\log z_1 + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n \quad (5)$$

$X_L^\mu(\bar{z}_1)X_R^\nu(z_2)$ では $\langle 0|\bar{\alpha}_n^\mu\alpha_m^\nu|0\rangle$ の項が $\bar{\alpha}_n^\mu\alpha_m^\nu$ となって出てきますが、 $\bar{\alpha}_n^\mu$ と α_m^ν が交換するために真空中に作用して消えます。なので、消えずに残るのは $x_0^\mu x_0^\nu$ と $x_0^\mu p^\nu$ の項だけになって

$$\begin{aligned} \langle 0|X_L^\mu(\bar{z}_1)X_R^\nu(z_2)|0\rangle &= \frac{1}{4}\langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - i\frac{\alpha'}{4}\log \bar{z}_1\langle 0|x_0^\mu p^\nu|0\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{4}\eta^{\mu\nu}\log \bar{z}_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$X_R^\mu(z_1)X_L^\nu(\bar{z}_2)$ も同じなので

$$\langle 0|X_R^\mu(z_1)X_L^\nu(\bar{z}_2)|0\rangle = \frac{1}{4}\langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{4}\eta^{\mu\nu}\log z_1 \quad (7)$$

(2) に (4) ~ (7) をいれることで

$$\begin{aligned} \langle 0|X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2)|0\rangle &= \langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{4}\eta^{\mu\nu}\log \bar{z}_1 + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}\right)^n \\ &\quad - \frac{\alpha'}{4}\eta^{\mu\nu}\log z_1 + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n \\ &\quad - \frac{\alpha'}{4}\eta^{\mu\nu}\log \bar{z}_1 - \frac{\alpha'}{4}\eta^{\mu\nu}\log z_1 \\ &= \langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log \bar{z}_1 - \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log z_1 + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}\right)^n + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n \end{aligned}$$

さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\log[1-x]$$

を使うと

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n = -\log\left[1-\frac{z_2}{z_1}\right] = -\log\frac{1}{z_1}[z_1-z_2] = \log z_1 - \log[z_1-z_2]$$

となるので

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log\bar{z}_1 - \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log z_1 + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}\right)^n + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n \\
& = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log\bar{z}_1 - \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log z_1 + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}(\log\bar{z}_1 - \log[\bar{z}_1 - \bar{z}_2]) + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}(\log z_1 - \log[z_1 - z_2]) \\
& = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log[\bar{z}_1 - \bar{z}_2] - \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log[z_1 - z_2]
\end{aligned}$$

よって $\langle 0|X^\mu X^\nu|0\rangle$ は

$$\langle 0|X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2)|0\rangle = \langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle - \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log[(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_2)] \quad (8)$$

これを見ても、 z_1, z_2 (τ_1, τ_2) の大小に関係なくこの形になることが分かるので (μ, ν の入れ替え、 z_1, z_2 の入れ替えで変化しない)

$$\langle 0|X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2)|0\rangle = \langle 0|X^\nu(z_2, \bar{z}_2)X^\mu(z_1, \bar{z}_1)|0\rangle$$

というわけで、(8) が (1) の右辺の第一項の真空期待値になります。

(1) の右辺の第二項は正規積なので

$$:p^\mu x_0^\nu := x_0^\nu p^\mu, \quad : \alpha_m \alpha_{-n} := \alpha_{-n} \alpha_m, \quad : \bar{\alpha}_m \bar{\alpha}_{-n} := \bar{\alpha}_{-n} \bar{\alpha}_m \quad (m, n \geq 1)$$

というように移動するために、(3) において真空で挟むと演算子を含まない $\langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle$ だけが生き残ります。これは他の場合でも同じなので、(8) の第一項だけが残って

$$\langle 0 : X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) : |0\rangle = \langle 0|x_0^\mu x_0^\nu|0\rangle$$

というわけで、時間順序積と正規積の真空期待値の差が

$$\begin{aligned}
\langle 0|X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2)|0\rangle - \langle 0 : X^\mu(z_1, \bar{z}_1)X^\nu(z_2, \bar{z}_2) : |0\rangle & = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log[(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_2)] \\
& = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log|z_1 - z_2|^2
\end{aligned}$$

と求まります。これは演算子を含んでいないので、真空期待値を外してもこのままになっています。よって、2点相関関数は

$$G(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log[(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_2)] = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\log|z_1 - z_2|^2 \quad (9)$$

となります。後のために z_1 と z_2 で微分した場合も求めておきます。(9) を z_1, z_2 で微分すればいいだけなので

$$\begin{aligned}
\partial_{z_1}\partial_{z_2}G(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) & = \langle \partial_{z_1}X^\mu(z_1, \bar{z}_1)\partial_{z_2}X^\nu(z_2, \bar{z}_2) \rangle \\
& = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{z_2}\frac{1}{z_1 - z_2} \\
& = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{1}{(z_1 - z_2)^2}
\end{aligned}$$

2点相関関数は $X(z_1, \bar{z}_1)X(z_2, \bar{z}_2)$ で作られているので、 $\partial_{z_1}X(z_1, \bar{z}_1)$ と $\partial_{z_2}X(z_2, \bar{z}_2)$ によって構成されます ((8) から直接分かります)。この結果を共形場理論の話と絡めます。

ここまでの弦理論の話は一旦置いて、共形場理論の話に簡単にします (数学的な話は省きます)。まず言葉の定義を与えます。複素数 z のスケール変換 $z \Rightarrow \lambda z$ で場 $\phi(z, \bar{z})$ が

$$\phi(z, \bar{z}) \Rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \lambda^h \bar{\lambda}^{\bar{h}} \phi(\lambda z, \lambda \bar{z})$$

と変換したときに出てくる h, \bar{h} は共形次元 (conformal dimension) と呼ばれます (\bar{h} は h の複素共役である必要はないです)。これは面積 $A = ab$ が $a \Rightarrow \lambda a, b \Rightarrow \bar{\lambda} b$ と変換されたときに $A \Rightarrow \lambda \bar{\lambda} A$ となるのと同じです。そして、共形変換 $z \Rightarrow f(z)$ に対して

$$\phi(z, \bar{z}) \Rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (10)$$

と変換する場を導入し、この場は primary field と呼ばれます。見て分かるように ϕ をテンソルのように変換させています。primary field には quasi-primary field として区別されるものがあります。この定義を与えるために、2次元の共形変換の生成子を見ます。場の量子論の「共形変換」の最後に示したように、共形変換

$$z' = z + \sum_n \epsilon_n (-z^{n+1}), \quad \bar{z}' = \bar{z} + \sum_n \bar{\epsilon}_n (-\bar{z}^{n+1})$$

に対する生成子は

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}$$

という形をしています。 z^{n+1} のために $z=0$ と $z=\infty$ において、 n の値によって発散を起こします (特異点がある)。しかし、 $n \geq -1$ なら $z=0$ でも特異点を持たないです。 $z=\infty$ では $z=-1/v$ としてみると

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial v} = v^2 \frac{\partial}{\partial v}$$

なので

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z = -\left(-\frac{1}{v}\right)^{n+1} \left(-\frac{1}{v}\right)^{-2} \partial_v = -\left(-\frac{1}{v}\right)^{n-1} \partial_v$$

$z=\infty$ に対応する $v \rightarrow 0$ にしてみると、 $n \leq +1$ のときに特異点を持たないことが分かります。よって、 l_n は l_{-1}, l_0, l_{+1} で定義されます。このように特異点のない範囲内で定義される生成子 $l_{-1}, l_0, l_{+1}, \bar{l}_{-1}, \bar{l}_0, \bar{l}_{+1}$ による共形変換は大局的な (globally) 共形変換と呼ばれます。この大局的な共形変換によって与えられる primary field を quasi-primary field と呼びます。この話は数学的な部分を相当無視しています。

2つの primary field $\phi_1(u), \phi_2(v)$ を用意し (u, v は複素数)、これによって2点相関関数 $\langle \phi_1(u) \phi_2(v) \rangle$ が作られているとします。これに対する共形変換を考えます。 $n=-1$ の変換である平行移動

$$u' = u + \epsilon_{-1} = u + a, \quad v = v + a$$

を考えると

$$\langle \phi_1(u) \phi_2(v) \rangle \Rightarrow \langle \phi_1(u+a) \phi_2(v+a) \rangle$$

となり、この変換に対して $\langle \phi_1(u) \phi_2(v) \rangle$ が不変であるためには並進不変であればいいです。なので

$$D(u, v) = \langle \phi_1(u)\phi_2(v) \rangle$$

と定義して

$$D(u, v) = D(u - v)$$

とします。今度は $n = 0$ の変換であるスケール変換

$$u' = u + \epsilon_0(-u) = \lambda u, \quad v' = \lambda v$$

をしてみると、primary field の変換則から

$$\langle \phi_1(u)\phi_2(v) \rangle \Rightarrow \langle \lambda^{h_1}\phi_1(\lambda u)\lambda^{h_2}\phi_2(\lambda v) \rangle = \lambda^{h_1+h_2}\langle \phi_1(\lambda u)\phi_2(\lambda v) \rangle$$

並進不変性を入れると

$$\lambda^{h_1+h_2}\langle \phi_1(\lambda u)\phi_2(\lambda v) \rangle = \lambda^{h_1+h_2}D(\lambda(u - v))$$

よってスケール変換に対して不変であるためには

$$\lambda^{h_1+h_2}D(\lambda(u - v)) = D(u - v)$$

であればいいです。このことから $D(u - v)$ は

$$D(u - v) = \frac{d_{12}}{(u - v)^{h_1+h_2}} \tag{11}$$

$$\left(\frac{1}{(\lambda u - \lambda v)^{h_1+h_2}} = \lambda^{-(h_1+h_2)} \frac{1}{(u - v)^{h_1+h_2}} \right)$$

という形になっていればいいことが分ります。 d_{12} はここからは決まらない定数で構造定数と呼ばれます。
 $n = +1$ の変換は特殊共形変換で

$$u' = u + \epsilon_{+1}(-u^2) = (1 - cu)u, \quad v' = (1 - cv)v$$

特殊共形変換は反転 ($x \rightarrow 1/x$) させたものを平行移動する変換なので

$$u' = -\frac{1}{u}, \quad v' = -\frac{1}{v}$$

という変換だと考えれば

$$D(u - v) = \langle \phi_1(u)\phi_2(v) \rangle \Rightarrow D\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) = \langle \phi_1\left(-\frac{1}{u}\right)\phi_2\left(-\frac{1}{v}\right) \rangle = \langle \phi_1\left(-\frac{1}{u^2}u\right)\phi_2\left(-\frac{1}{v^2}v\right) \rangle$$

$$= \frac{1}{u^{2h_1}} \frac{1}{v^{2h_2}} \langle \phi_1\left(-\frac{1}{u}\right)\phi_2\left(-\frac{1}{v}\right) \rangle$$

これに (11) を使えば

$$\frac{1}{u^{2h_1}} \frac{1}{v^{2h_2}} \langle \phi_1(-\frac{1}{u}) \phi_2(-\frac{1}{v}) \rangle = \frac{1}{u^{2h_1}} \frac{1}{v^{2h_2}} \frac{d_{12}}{(-\frac{1}{u} + \frac{1}{v})^{h_1+h_2}}$$

この特殊共形変換で不変であるなら

$$D(u-v) = D(\frac{1}{u} - \frac{1}{v})$$

$$\frac{d_{12}}{(u-v)^{h_1+h_2}} = \frac{1}{u^{2h_1}} \frac{1}{v^{2h_2}} \frac{d_{12}}{(-\frac{1}{u} + \frac{1}{v})^{h_1+h_2}}$$

これは $h = h_1 = h_2$ なら

$$\frac{1}{u^{2h}} \frac{1}{v^{2h}} \frac{d_{12}}{(-\frac{1}{u} + \frac{1}{v})^{2h}} = \frac{1}{u^{2h}} \frac{1}{v^{2h}} \frac{d_{12}}{(u-v/uv)^{2h}} = \frac{d_{12}}{(u-v)^{2h}}$$

となって一致します。

まとめると、 $n = -1, 0, +1$ の変換

$$u' = u + a, \quad v' = v + a$$

$$u' = \lambda u, \quad v' = \lambda v$$

$$u' = (1 - cu)u, \quad v' = (1 - cv)v$$

に対して $\langle \phi_1(u) \phi_2(v) \rangle$ が不変であるためには

$$\langle \phi_1(u) \phi_2(v) \rangle = \frac{d_{12}}{(u-v)^{2h}}$$

となっていればよいということになります。これは l_{-1}, l_0, l_{+1} の生成子の変換なので、この形になるのは場が quasi-primary field のときです。ちなみに、この3つの変換はメビウス変換 (Möbius transformation)

$$z \Rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - cb = 1, \quad (1 - cz)z \simeq \frac{z}{cz + 1})$$

を構成しています。

この話を閉弦の2点相関関数に当てはめます。上で求めたように閉弦の2点相関関数は

$$G(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) = \langle X^\mu(z_1, \bar{z}_1) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \log[(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_2)]$$

となっているので、 $X^\mu(z, \bar{z})$ は (quasi)-primary field ではなく、変換則 (10) を持っていません。しかし、微分した $\partial_z X^\mu$ は

$$\langle \partial_{z_1} X^\mu(z_1, \bar{z}_1) \partial_{z_2} X^\nu(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}$$

となっているので、 $\partial_z X^\mu(z, \bar{z})$ は primary field の変換則 (10) を持っています。かなり雑に見てきましたが、このように2次元の共形場理論を弦理論に適用することができます。