

イジングモデルの平均場近似

イジングモデルを近似を使って解きます。使う近似は平均場近似と呼ばれるもので、わりと広範囲に使われている近似です。

相転移が出てきますが、相転移そのものの話はしていません。

イジングモデルの特徴は、外部磁場がないときに、磁気モーメントを持つ状態と、磁気モーメントを持たない状態とに対する相転移があることです。簡単に言えば、低温では磁石、高温では磁石でなくなるという性質のことです。この性質を近似計算から導きます。

この手の話で出てくる単語を並べておきます。磁化という単語があり、これは磁気モーメントの平均に単位体積あたりの粒子数をかけたものとして定義されます。しかし、これから見ていけば分かるように、磁気モーメントの平均はスピン平均に定数をかけたものでしかありません。なので、磁化をスピン平均として定義することが多く、ここでもスピン平均を磁化として使っていきます。

外部磁場なしで磁化が存在する性質は強磁性 (ferromagnetism) と呼ばれます。磁化が発生しない場合は常磁性 (paramagnetism) と言います。なので、強磁性であった状態が温度の上昇によって常磁性に変わることを示すこととなります。強磁性、常磁性はそれぞれ異なった相 (phase) なので、異なった相への相転移 (phase transition) の現象です。相転移のおこる温度を臨界温度 (critical temperature) と言います。

外部磁場があり、スピン間に相互作用がない場合を先に見ておきます。スピンを持った粒子があり、そこに z 軸方向に沿った外部磁場 H があるとします。このときの磁気モーメント μ はスピン角運動量 s によって

$$\mu = g\mu_B s$$

と書け (g は g 因子、 μ_B はボーア磁子)、エネルギーは

$$E_0 = -g\mu_B \mathbf{s} \cdot \mathbf{H} = -g\mu_B s_z H$$

となります (H は H の大きさ)。スピン S の粒子とすれば、 s_z が取れる値は、 $-S$ から $+S$ までの値なので、それを

$$\sigma = -S, -S+1, \dots, S-1, S$$

とすれば

$$E_\sigma = -g\mu_B H \sigma$$

のように、可能なエネルギーは区別されます。これによって、今の分配関数は

$$Z_0 = \sum_{\sigma=-S}^S e^{-\beta E_\sigma} = \sum_{\sigma=-S}^S \exp[\beta g\mu_B H \sigma] = \sum_{\sigma=-S}^S \exp[\lambda \sigma] \quad (1)$$

これを使って、磁気モーメントの z 成分 $\mu = g\mu_B \sigma$ の平均は

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{Z_0} \sum_{\sigma=-S}^S g\mu_B \sigma \exp[\beta g\mu_B H \sigma] = \frac{1}{Z_0} \sum_{\sigma=-S}^S \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \exp[\beta g\mu_B H \sigma]$$

と求められるので、磁気モーメントの平均は

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial H} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \log Z_0$$

として分配関数から求められます。磁気モーメントはスピンの $g\mu_B$ をかけたものなので、スピン平均を出せば磁気モーメントの平均も求められます。スピン平均を磁化と呼んでいきます。

分配関数は等比数列の和

$$\sum_{\sigma=1}^N r^{(\sigma-1)} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = \frac{1 - r^N}{1 - r}$$

から

$$\begin{aligned} Z_0 &= e^{-\lambda S} + e^{-\lambda(S-1)} + \dots + e^0 + \dots + e^{\lambda(S-1)} + e^{\lambda S} \\ &= e^{-\lambda S} + e^{-\lambda(S-1)} + \dots + e^{-\lambda} + 1 + 1 + e^{\lambda} + \dots + e^{\lambda(S-1)} + e^{\lambda S} - 1 \\ &= e^{-\lambda S} + \sum_{m=1}^S e^{-\lambda(m-1)} + \sum_{m=1}^S e^{\lambda(m-1)} + e^{\lambda S} - 1 \\ &= e^{-\lambda S} + \frac{1 - e^{-\lambda S}}{1 - e^{-\lambda}} + \frac{1 - e^{\lambda S}}{1 - e^{\lambda}} + e^{\lambda S} - 1 \\ &= \frac{e^{-\lambda S} - e^{-\lambda(S-1)}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda(S-1)}}{1 - e^{-\lambda}} + \frac{1 - e^{\lambda S}}{1 - e^{\lambda}} + \frac{e^{\lambda S} - e^{\lambda(S+1)}}{1 - e^{\lambda}} - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 - e^{\lambda}} \\ &= \frac{e^{-\lambda S} - e^{\lambda(S+1)}}{1 - e^{\lambda}} \\ &= e^{-\lambda/2} \frac{e^{-\lambda S} - e^{\lambda(S+1)}}{e^{-\lambda/2} - e^{\lambda/2}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(S+1/2)} - e^{\lambda(S+1/2)}}{e^{-\lambda/2} - e^{\lambda/2}} \\ &= \frac{\sinh[\lambda(S + 1/2)]}{\sinh \frac{\lambda}{2}} \quad (\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}) \end{aligned}$$

これから磁気モーメントの平均は

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \log Z_0 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} (\log[\sinh[\lambda(S + \frac{1}{2})]] - \log[\sinh \frac{\lambda}{2}]) \\ &= g\mu_B ((S + \frac{1}{2}) \frac{\cosh[\lambda(S + 1/2)]}{\sinh[\lambda(S + 1/2)]} - \frac{1}{2} \frac{\cosh \frac{\lambda}{2}}{\sinh \frac{\lambda}{2}}) \\ &= g\mu_B S B(S, \lambda) \end{aligned} \quad (2)$$

$B(S, \lambda)$ はブリルアン (Brillouin) 関数と呼ばれます。

1次元イジングモデルは厳密に解けているので、近似なしで見えていきます。外部磁場 H が z 軸方向に作用して、 N 個のスピン $1/2$ を持つ粒子が並んでいる1次元イジングモデルは

$$E_1 = -h \sum_{i=1}^N \sigma'_i - J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma'_i \sigma'_{i+1} \quad (h = g\mu_B H/2)$$

$J > 0$ とし、 $\sigma'_i = \pm 1$ としています ((8) では h, J を h', J' としています)。 $J > 0$ なので隣り合ったスピンの向きを揃えるように相互作用は働いています。これを境界条件 $\sigma'_{N+1} = \sigma'_1$ によって解くと

$$Z_1 = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta E_1} = \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \cosh(\beta h) \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}$$

となります。 E_1 を見れば分かるように $\sum \sigma'_i$ の平均は

$$\langle \sum_{i=1}^N \sigma'_i \rangle = \frac{1}{Z_1} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \left(\sum_{i=1}^N \sigma'_i \right) e^{-\beta E_1} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial h} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} \log Z_1$$

として求まり、これが1次元イジングモデルでの磁化となります。外部磁場がない極限 $h \rightarrow 0$ を取ると、 $\sigma'_i = \pm 1$ なので磁化は消えます。このため、外部磁場がなければ、磁化は温度とは無関係にないままという結果になります。なので、強磁性と常磁性との間の相転移は存在しません。ただし、温度ゼロの極限において、 h に対して離散的な磁化を持ちます。ここでは関係のない話ですが見ておきます

Z_1 に対して熱力学的極限 $N \rightarrow \infty$ をとると、 $\lambda_+^N + \lambda_-^N$ から λ_+ の項が効いてくることとなります。なので、 λ_+ の項を取り出して

$$\log Z_1 = \log \lambda_+^N = N \log [e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}]$$

ついでに、1つのスピンに対してとするために N で割り

$$\frac{1}{N} \log Z_1 = \log [e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}]$$

h で微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \log Z_1 &= \frac{1}{e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}} \\ &\quad \times (\beta e^{\beta J} \sinh(\beta h) + \beta e^{2\beta J} \sinh(\beta h) \cosh(\beta h) (e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J})^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{A}} \frac{\beta e^{\beta J} \sqrt{A} \sinh(\beta h) + \beta e^{2\beta J} \sinh(\beta h) \cosh(\beta h)}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{1}{e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{A}} \frac{\beta e^{\beta J} (\sqrt{A} + e^{\beta J} \cosh(\beta h)) \sinh(\beta h)}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{\beta e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{\beta e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}} \end{aligned}$$

よって、スピン1個あたりの磁化は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma'_i \rangle = \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}}$$

$h = 0$ にすればこれは消えるので、これからも磁化がないことが分かります。しかし、 $h > 0$ で $\beta \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}} = 1$$

となります。このため、 $T = 0$ では、 $h > 0$ で磁化は 1、 $h = 0$ で磁化は 0、 $h < 0$ で磁化は -1 として現れます。

2次元以上のイジングモデルを扱うのは大変なので近似を使うことにします。イジングモデルの前に、Weiss によるモデルを使って近似の仕方を見ます。

D 次元空間 ($D = 2, 3$) において N 個の点があり、それらが格子状に並んでいるとします。各点は格子点 (lattice sites) と呼ぶことにし、格子点上にスピン S を持った粒子がいるとします。このとき、隣り合った粒子にはスピン間相互作用 (交換相互作用) が働くとして、外部磁場 H が z 軸方向に作用しているとします。

ここまでは、イジングモデルと同じ設定です。ここで、1つの粒子とそれに隣り合っている粒子だけを取り出して考えます。つまり、系のエネルギーは、その粒子のスピンと外部磁場によるエネルギーと、隣り合った粒子とのスピン間相互作用によるエネルギーとで与えます。

というわけで、ある格子点にいる粒子のスピンを σ 、それと隣り合っているスピンを σ_i とすればエネルギーは

$$E_W = -g\mu_B H \sigma - J \sigma \sum_{i=1}^z \sigma_i \quad (3)$$

σ, σ_i は $-S, -S+1, \dots, S-1, S$ 、 z は隣り合っている格子点の数で 2次元なら $z = 4$ 、3次元なら $z = 6$ です。これに近似を行います。第一項の和が定数 C によって

$$-J \sigma \sum_{i=1}^z \sigma_i \Rightarrow -JC \sigma$$

と書けると仮定します。他のスピンは C に押し込めることで、スピン間相互作用がない形にしています。

C を与えます。 C にはスピンを押し込めているので、スピン平均 m から作ります。 σ_i は平均 m からのずれ $\delta\sigma_i$ によって、 $\sigma_i = m + \delta\sigma_i$ と書けます。そうすると

$$\sigma \sigma_i = \sigma(m + \delta\sigma_i)$$

なので

$$-J \sigma \sum_{i=1}^z \sigma_i = -J \sum_{i=1}^z \sigma(m + \delta\sigma_i) = -zJm\sigma - J \sigma \sum_{i=1}^z \delta\sigma_i$$

平均からのずれ $\delta\sigma_i$ が第一項に比べて無視できるほど小さいとすれば

$$-J \sigma \sum_{i=1}^z \sigma_i \simeq -zJm\sigma = -JC\sigma \quad (4)$$

となり、 C は $C = zm$ とスピン平均で書けます。直接的には、これは

$$\sum_{i=1}^z \sigma_i \simeq \langle \sum_{i=1}^z \sigma_i \rangle = zm$$

と近似していることに対応します。(3),(4) を見てみると、

$$Jzm = g\mu_B H_1$$

として、外部磁場に見えるような H_1 を導入することで

$$E_W \simeq -g\mu_B(H + H_1)\sigma = -\frac{1}{\beta}\eta\sigma$$

となり、新しい外部磁場 $H' = H + H_1$ とスピンの相互作用しているだけの形で書けます。そうすると、(1),(2) から磁気モーメントの平均は

$$\langle \mu \rangle = g\mu_B \langle \sigma \rangle = g\mu_B SB(S, \eta) \quad (5)$$

となります。

このように、平均を使い、平均からのずれが小さいとする近似を平均場近似 (mean field approximation) と言います。平均場近似で重要なのは、先にスピンの平均 m を使いましたが、それによって求められた分配関数を使ってスピンの平均 $\langle \sigma \rangle$ が求められる点です。つまり、元々の近似による

$$J \langle \sum_{i=1}^z \sigma_i \rangle = g\mu_B H_1 \quad (g\mu_B H_1 = Jzm)$$

と、その近似から求められた (5) による

$$J \langle \sum_{i=1}^z \sigma_i \rangle = JzSB(S, \eta)$$

とが一致している必要があります。なので、近似が矛盾なく成立するための条件として

$$g\mu_B H_1 = JzSB(S, \eta)$$

が出てきます。このような方程式を自己無撞着方程式 (self-consistent equation) と言います。自己無撞着 (自己矛盾しない) は先に仮定した m が、その仮定から求まる m と一致しなくてはならないことからです (η, H_1 は m を含むために両辺に m があるので、 m が m 自身に依存している)。

スピンを $S = 1/2$ とします。このときは

$$\begin{aligned} SB(S, \eta) &= \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, \eta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh \eta}{\sinh \eta} - \frac{1}{2} \frac{\cosh \frac{\eta}{2}}{\sinh \frac{\eta}{2}}\right) \\ &= \frac{\cosh^2 \frac{\eta}{2} + \sinh^2 \frac{\eta}{2}}{2 \sinh \frac{\eta}{2} \cosh \frac{\eta}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\cosh \frac{\eta}{2}}{\sinh \frac{\eta}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cosh^2 \frac{\eta}{2} + \sinh^2 \frac{\eta}{2}}{\sinh \frac{\eta}{2} \cosh \frac{\eta}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\cosh^2 \frac{\eta}{2}}{\sinh \frac{\eta}{2} \cosh \frac{\eta}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \tanh \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} g\mu_B H_1 &= JzSB(S, \eta) \\ Jzm &= Jz \frac{1}{2} \tanh \frac{\eta}{2} \\ 2m &= \tanh\left(\beta \frac{Jzm + h}{2}\right) \end{aligned}$$

これがスピン 1/2 での自己無撞着方程式です。
 ちなみに、この結果は最初からスピン 1/2 とした

$$E_W^{(1/2)} = -\frac{h}{2}\sigma' - \frac{J}{4}\sigma' \sum_{i=1}^z \sigma'_i = -h'\sigma' - J'\sigma' \sum_{i=1}^z \sigma'_i$$

から始めると簡単に求まります。1/2 を外に出して、 σ', σ'_i は ± 1 にしています。これに同じ近似を使えば、分配関数はすぐに

$$\begin{aligned} Z_W^{(1/2)} &= \sum_{\sigma'=\pm 1} e^{-\beta E_W^{(1/2)}} \simeq \sum_{\sigma'=\pm 1} \exp[\beta(J'C + h')\sigma'] = e^{\beta(J'C+h')} + e^{-\beta(J'C+h')} \\ &= 2 \cosh[\beta(J'C + h')] \end{aligned}$$

近似による $E_W^{(1/2)}$ は

$$E_W^{(1/2)} \simeq -(h' + zJ'm')\sigma' \quad (-J'\sigma' \sum_{i=1}^z \sigma'_i \simeq -zJ'm'\sigma' = -J'C\sigma') \quad (6)$$

m' は $\sigma'_i = \pm 1$ の平均です。
 これから σ' の平均は

$$\begin{aligned} \langle \sigma' \rangle &= \frac{1}{Z_W^{(1/2)}} \sum_{\sigma'=\pm 1} \sigma' e^{-\beta E_W^{(1/2)}} = \frac{1}{Z_W^{(1/2)}} \sum_{\sigma'=\pm 1} \sigma' \exp[\beta(zJ'm' + h')\sigma'] \\ &= \frac{1}{Z_W^{(1/2)}} (e^{\beta(zJ'm'+h')} - e^{-\beta(zJ'm'+h')}) \\ &= \tanh[\beta(zJ'm' + h')] \end{aligned}$$

よって、 $\langle \sigma' \rangle = m'$ となるべきなので

$$m' = \tanh[\beta(zJ'm' + h')] \quad (7)$$

$m' = 2m, j' = J/4, h' = h/2$ なので、同じ結果です。

本題の D 次元イジングモデルに平均場近似を使ってみます。 D 次元イジングモデルは、今の表記に合わせれば

$$E = -g\mu_B H \sum_{i=1}^N \sigma_i - J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j = -g\mu_B \frac{H}{2} \sum_{i=1}^N \sigma'_i - \frac{J}{4} \sum_{(i,j)} \sigma'_i \sigma'_j = -h' \sum_{i=1}^N \sigma'_i - J' \sum_{(i,j)} \sigma'_i \sigma'_j \quad (8)$$

第二項の (i, j) は隣り合ったスピンに対して和を取ることを意味しています。2次元なら4個、3次元なら6個の格子点が隣り合っています。 (i, j) の和において現れる $\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1$ のような項は同じなので、片方だけを拾うようにして二重に和を取らないようにします。なので、第二項は N 個の粒子 (格子点) に対して、2次元なら $4N/2$ 個、3次元なら $6N/2$ 個の項を持ちます。もしくは、隣り合った全ての和として、係数に $1/2$ をつける場合もあります。また、見ている系は十分大きく、端の寄与は無視できると考えてしまいます (端の格子点の境界条件を考慮しない)。

面倒なので、 J', h', σ'_i は J, h, σ_i と書いていきます。平均場近似を同様に行います。スピン σ_i の平均を m 、そこからのズレを $\delta\sigma_i$ とすれば、 $\sigma_i\sigma_j$ は

$$\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_j &= (m + \delta\sigma_i)(m + \delta\sigma_j) = m^2 + m(\delta\sigma_i + \delta\sigma_j) + \delta\sigma_i \delta\sigma_j \\
&= m^2 + m(\sigma_i - m + \sigma_j - m) + \delta\sigma_i \delta\sigma_j \\
&= -m^2 + m(\sigma_i + \sigma_j) + \delta\sigma_i \delta\sigma_j
\end{aligned}$$

ここで $\delta\sigma_i$ が十分小さいとして、第三項を無視します。この近似によって

$$-J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j \Rightarrow -J \sum_{(i,j)} (-m^2 + m(\sigma_i + \sigma_j)) = \frac{1}{2} z N J m^2 - \frac{1}{2} 2z J m \sum_{i=1}^N \sigma_i = \frac{1}{2} z N J m^2 - z J m \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

1/2 は隣り合った i, j の和から 2 重に出てくる項をなくすためです。 z は隣り合った格子点の数です (i, j の和の項の数は $zN/2$)。1 つの σ_i と隣り合っているのは z 個なので $\sum_{(i,j)} \sigma_i$ での j の和から z が出てき、残った i の和は N 個の格子点の和となります。

よって、平均場近似によるエネルギーは

$$E \simeq \frac{1}{2} z N J m^2 - \sum_{i=1}^N (h - z J m) \sigma_i$$

となります。これは (6) に、定数の第一項と第二項での和が新しく出てきただけです。なので簡単に計算出来て

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta E} \\
&\simeq e^{-\beta z N J m^2 / 2} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp[\beta \sum_{i=1}^N (h + z J m) \sigma_i] \\
&= e^{-\beta z N J m^2 / 2} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \exp[\beta (h + z J m) \sigma_1] \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp[\beta (h + z J m) \sigma_N] \\
&= e^{-\beta z N J m^2 / 2} (2 \cosh \beta (z J m + h))^N
\end{aligned}$$

スピン平均は

$$\langle \sum_{i=1}^N \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right) e^{-\beta z N J m^2 / 2} \exp[\beta \sum_{j=1}^N (h + z J m) \sigma_j]$$

と与えられるので、この場合も h で $\log Z$ を微分することで

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{i=1}^N \sigma_i \rangle &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} \log Z = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} \log [e^{-\beta z N J m^2 / 2} (2 \cosh \beta (z J m + h))^N] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} z N J m^2 + N \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} \log [2 \cosh \beta (z J m + h)] \\
&= N \tanh \beta (z J m + h)
\end{aligned}$$

ここでの m はスピン 1 個の平均なので、 N で割って (格子点上のスピンに特別なスピンはないので平均は単純に N 倍され、 $\langle \sum \sigma_i \rangle / N = \langle \sigma_i \rangle$)

$$m = \frac{1}{N} \langle \sum_{i=1}^N \sigma_i \rangle = \tanh \beta(zJm + h)$$

これは、(7)と同じ自己無撞着方程式です。というわけで、イジングモデルでも扱う方程式は同じです。

自己無撞着方程式 (7) を見ていきます。 $m = 0$ が解になっているのはすぐに分かります。 $m = 0$ では H_1 も 0 になり、磁化も 0 になります。しかし、 $m \neq 0$ の解も存在しています。自己無撞着方程式の解を解析的に求める方法がないので数値的に解を見つけます。これは簡単です。横軸を m 、縦軸を y とするグラフにおいて

$$y = m, \quad y = \tanh(\beta z J m)$$

これらの線の交点が解となります。 $y = m$ は傾き 1 の直線で、 \tanh は原点を通り $\pm\pi/2$ に向かっていく曲線です。なので、 β の値を変えて (z, J は固定されている)、 $y = m$ の直線と交差させることができれば、それが $m = 0$ 以外の解となります。 \tanh のグラフから分かるように、 $m = 0$ での傾きが 1 を超えていれば、直線 $y = m$ と交差します。そして、 $\tanh x$ は $\pm x$ で符号が反転した値を持つので、片方の交点を $m = +m_0$ とすればもう片方は $-m_0$ となります。というわけで、 $m = 0$ の傾きを求めてみると

$$\left. \frac{d}{dm} \tanh(\beta z J m) \right|_{m=0} = \left. \frac{\beta z J}{\cosh^2(\beta z J m)} \right|_{m=0} = \beta z J$$

なので、 $\beta J z > 1$ なら $m = 0, \pm m_0$ の 3 つの解を持ち、 $\beta J z < 1$ なら $m = 0$ のみの解となります。 $\beta J z > 1$ では $m \neq 0$ となるために、外部磁場なしで磁化が現れます。外部磁場なしで現れる磁化は自発磁化 (spontaneous magnetization) と呼ばれます。というわけで、 $\beta J z > 1$ で強磁性、 $\beta J z < 1$ で常磁性になっています。このことから、強磁性の状態と常磁性の状態との間の相転移を平均場近似でのイジングモデルによって記述出来たこととなります。

$\beta z J$ は $zJ/k_B T$ なので、境目となる温度 T_c は

$$T_c = \frac{zJ}{k_B}$$

と与えられます。なので、温度 T が $T < T_c$ なら $\pm m_0$ の解を持ち、 $T > T_c$ なら $m = 0$ のみの解となります。このときの臨界温度 T_c はキュリー温度 (Curie temperature) と呼ばれます。よって、低温では磁化を持ち、高温では磁化がなくなるという結果が導かれたこととなります。

ただし、この結果から分かるように平均場近似を使うと 1 次元でも相転移が存在しますが (1 次元でも $z \neq 0$)、すでに見たように近似なしの 1 次元イジングモデルには相転移がありません。なので、平均場近似による 1 次元の結果は間違いです。2 次元ではオンサーガーによって厳密解が求められていて、 $k_B T_c / J \simeq 2.27$ です。平均場近似では $z = 4$ なので $k_B T_c / J = 4$ となっていて、それなりにズレています。

強磁性と常磁性の相転移を出せましたが、ついでに求められた $\pm m_0$ が自由エネルギーのどの地点に対応するかを求めます。平均場近似での自由エネルギーは

$$F = -\frac{1}{\beta N} \log Z = \frac{J z m^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log [2 \cosh(\beta z J m)]$$

N で割ってスピン 1 個に対する自由エネルギーにしています。これを m で微分してみると

$$\frac{\partial F}{\partial m} = J z m - J z \frac{\sinh(\beta J z m)}{\cosh(\beta J z m)}$$

これが 0 になるとすれば

$$m = \tanh(\beta J z m)$$

となり、自己無撞着方程式になります。つまり、自己無撞着方程式の解は自由エネルギーの極値を与えます。もう一回微分してみれば

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m^2} = Jz - \frac{\beta J^2 z^2}{\cosh^2(\beta Jz m)} = Jz \left(1 - \frac{\beta Jz}{\cosh^2(\beta Jz m)} \right)$$

$m = 0$ のとき $\cosh(0) = 1$ なので、 $\beta Jz < 1$ ($T > T_c$) ならこれはプラスになり、 $m = 0$ は極小値を与えることが分かります。よって、 $\beta Jz < 1$ では $m = 0$ で自由エネルギーは最小値となります。一方で、 $\beta Jz > 1$ ($T < T_c$) ではマイナスになるので $m = 0$ の地点は極大値です。このことから、 $\beta Jz > 1$ のとき $m = 0$ は自由エネルギーの最小値になっていなく、安定した状態を与えません (逆 U 字形のポテンシャルで言えばより低いエネルギーに向かって落ちていける)。そして、自由エネルギーをグラフにしてみれば分かりますが、 $\beta Jz > 1$ では $m = \pm m_0$ の地点で最小値になります (ワインボトル型)。

このような最小値の変化とそれによる自発磁化の発生は、対称性の視点から、自発的対称性の破れとして説明されます。今のハミルトニアン (エネルギー) (8) は、 $h = 0$ のとき σ_i を $-\sigma_i$ としても変化しません。常磁性では $m = 0$ なので磁化も変化しません。一方で、強磁性では $m \neq 0$ なので符号が変わります。しかし、ハミルトニアンは系の情報を持っているので、そのハミルトニアンで記述される系はその性質が維持されるはずで、このように、元々のハミルトニアンが持っていた性質 (対称性) が、ハミルトニアンの変更なしでなくなることを自発的対称性の破れと言います。