空洞放射

量子論の必要性の理由の例として必ず出てくる空洞放射についてみていきます。ちなみに、空洞放射は黒体放射 (黒体からの放射) を現実的な状況で再現したものです (黒体放射は理想化されたもので、それに近い状況としての空洞放射)。
ここでは「カノニカルアンサンブル」での調和振動子の結果を使います。

まず、電磁波を完全に遮断する壁に囲まれた空洞を用意し、これの壁に非常に小さな穴を開ければ準備するものの完成です。この空洞内に電磁波が存在しているなら、壁で反射を繰り返していることになります。そして、壁の温度を一定に保ってしまえば空洞内の電磁波は熱平衡状態にあると考えられます。この時に穴が小さければ穴による平衡状態の乱れを無視でき、またそこから電磁波が出て行くのには十分な時間がかかるので、この穴から出てくる電磁波を観測すれば熱平衡状態の様子を知ることができるというわけです。これが空洞放射 (cavity radiation) のあらましで、この熱平衡状態における様子を見ていきます。それによって空洞内の光のエネルギー、つまり実験的な光の強度と振動数の分布を得られます。

最初に電磁波は電磁場の振動によるものという点を考えます。結論を言ってしまえば、空洞内の異なった角振動数を持つ電磁波はそれぞれ独立して振舞うとされ、それらは調和振動子 (正弦波の運動をしている物体) として扱われます。これは、マクスウェル方程式が波の振動の方程式で、それが線形の形で表されているために重ね合わせができると言っているだけです。なので、異なる振動数を持つ調和振動子の独立な系が複数集まることで全体の系を作っています。つまり、存在しえる振動数を持つ調和振動子全ての平均エネルギーの和を取ればいいとなります。よって、必要なものは箱の中の電磁波の状態密度と各振動での調和振動子のエネルギーです。調和振動子のエネルギーはすでに「カノニカルサンサンブル」での量子論での調和振動子で求めてあるので、ここでは状態密度を求めるだけです。振動数 ω に対する状態密度 $D(\omega)$ が求まれば、それに対応する振動数の調和振動子のエネルギーをかけて積分を取ることで、系全体のエネルギーを求められます

することは、「ミクロカノニカルアンサンブル」と同じです。空洞を一辺 L の立方体とおいてやり、これによる周期的境界条件を組み込みます。L は十分大きいとします。これは 1 次元自由粒子の結果から、1 次元での波数 k_0 は

$$k_0 = \frac{2\pi}{L}n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

となり、$2\pi/L$ の間隔で k は並んでいます。言い換えれば、$2\pi/L$ ごとに 1 個の状態がいます (波数 k の 1 次元空間での長さ $2\pi/L$)。波数は L が十分大きければ連続的とみなせます。今はこれを 3 次元にすればいいので、$V = L^3$ を空洞の体積とすれば、波数による 3 次元空間 (k_1, k_2, k_3) での体積 $(2\pi)^3/V$ に 1 個の状態がいます。なので、体積 $d^3k = dk_1dk_2dk_3$ 内での可能な状態の数は

$$\frac{V}{(2\pi)^3}d^3k$$

状態密度が欲しいので、半径 $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ の球を考え、$k \sim k + dk$ の範囲で積分して

$$\int_\Omega d^3k \frac{V}{(2\pi)^3}$$

これが調和振動子の状態 (波数) の数です。Ω は積分範囲

$$k \leq \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \leq k + dk$$

を表します。この積分領域は半径 k と半径 $k + dk$ の球の間の体積のことなので、$4\pi k^2 dk$ となり

$$\int_\Omega d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int_\Omega d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk$$

と計算できます。状態密度 $D(k)$ を使えば、$k \sim k + dk$ 内の状態数は $D(k)dk$ なので

$$D(k)dk = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk$$

$$D(k) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2$$

となります。

しかし、今回は電磁波ということで少し特殊な事情があります。それは、電磁波ではある 1 つの振動に対して２つの独立な状態が存在しているという点です。これは、電場と磁場の振動方向には電磁波の進行方向に垂直でお互いに直交していればいいという条件しかないので、方向が完全に決まりきってなく、電場 (磁場) は垂直成分として 2 つ選べるということです (電磁気の「電磁波」参照)。

よって、2 をかけて

$$D(k)dk = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk$$

としたものが今の状態密度となります。これは電磁波における角振動数 ω と波数 k と光速 c の関係

$$ck = \omega$$

を使って、ω〜$\omega + d\omega$ の間でのものに書き換えれば

$$\frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \ \Rightarrow \ \frac{8\pi V\omega^2}{(2\pi)^3 c^3} d\omega = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad (dk = \frac{d\omega}{c})$$

というわけで、状態密度 $D(\omega)$ は

$$D(\omega)d\omega = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

$$D(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

積分して

$$\int_0^{\omega'} D(\omega)d\omega$$

とすれば、角振動数 ω' 以下の状態数になります。

これで箱の中の電磁波の状態密度が求まりました。振動 ω での 1 個の量子的な調和振動子の平均エネルギーはカノニカルアンサンブルから

$$\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$$

後は含まれている調和振動子全ての ω について足しあげれば、系全体の電磁波の平均エネルギーになります。というわけで、各振動を ω_i とすれば全体の平均エネルギー E は

$$E=\sum_i(\frac{\hbar\omega_i}{2}+\frac{\hbar\omega_i}{e^{\hbar\omega_i/k_BT}-1})$$

今は V が十分大きいとして連続的にしているので、和を積分にします。V が十分大きければ、$k_n=2\pi n/L$ から

$$\frac{1}{V}\sum_i f(\omega(\boldsymbol{k}_i))=\frac{1}{(2\pi)^3}(\frac{2\pi}{L})^3\sum_i f(\boldsymbol{k}_i)\ \Rightarrow\ \frac{1}{(2\pi)^3}\int dk_1dk_2dk_3\ f(\omega(\boldsymbol{k}))$$

として、和を積分に置き換えられます ($\boldsymbol{k}_i$ は離散的、$\boldsymbol{k}$ は連続)。この積分は 3 次元の全空間積分なので

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\ f(\omega(\boldsymbol{k}))=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\ k^2f(\omega(\boldsymbol{k}))$$

k 積分を ω にすると

$$\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\ k^2f(\omega(\boldsymbol{k}))=\frac{1}{2\pi^2c^3}\int_0^\infty d\omega\ \omega^2f(\omega)=\frac{1}{2V}\int_0^\infty d\omega\ D(\omega)f(\omega)$$

これを使うことで系全体の平均エネルギー E は

$$\frac{E}{V}=\frac{2}{V}\sum_i(\frac{\hbar\omega_i}{2}+\frac{\hbar\omega_i}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1})\ \Rightarrow\ \frac{E}{V}=\frac{1}{V}\int_0^\infty d\omega\ D(\omega)(\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1})$$

2 は電磁場なので 1 つの ω に 2 つの状態が対応するからです。そして、零点エネルギー $\hbar\omega/2$ を基準にした平均エネルギーは

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}D(\omega)d\omega \\
&= \frac{V}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT}-1}d\omega
\end{aligned}
$$

k_B はボルツマン定数です。単純に言えば、状態密度に個々の平均エネルギーをかけて積分することで全体の平均エネルギーを出したということです。

今回の場合、振動数の範囲は $0\sim\infty$ に取れるので積分範囲も $0\sim\infty$ になっています。これをもし古典論で考えたとしたら、比熱 (熱容量) は調和振動子 1 個当たりに k_B なので、全ての振動子 (無限個) を含めた比熱は無限大になってしまい、熱平衡状態を保つことができなくなってしまいます。これを回避するためにいきなり何の断りもなしに量子論の結論を用いました。後で触れますが、量子論によって低温領域での制限が加えられることで、比熱を有限の値に落ち着かせられます。また、零点エネルギーを基準にするのは零点エネルギーのときが電磁場の存在しない真空であるとしているからです。これは、零点エネルギを含めて積分すると、零点エネルギーの項は発散するという問題を回避するためです。なので、零点エネルギーを基準として、そこからの差としてエネルギーを与えています。

積分を抜かして

$$
\epsilon(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}d\omega
$$

としたものをプランクの放射公式 (Planck's radiation formula) と言います。これは $\epsilon(\omega)d\omega$ とすれば $\omega\sim\omega+d\omega$ の間にあるエネルギー密度にあたります。角振動数を使っていますが、振動数 $\nu(\omega=2\pi\nu)$ を使えば

$$
\epsilon(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}\nu^3d\nu
$$

実際に上の積分を実行すれば

$$
x = \frac{\hbar\omega}{k_BT}\ ,\ dx = \frac{\hbar}{k_BT}d\omega
$$

から

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{V}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}d\omega \\
&= \frac{V(k_BT)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx \\
&= \frac{V(k_BT)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\frac{1}{15}\pi^4 \\
&= \frac{\pi^2V(k_BT)^4}{15c^3\hbar^3}
\end{aligned}
$$

積分は公式扱いにしています。これから、比熱 C は

$$C=\frac{\partial E}{\partial T}=\frac{4\pi^2 Vk_B^4}{15c^3\hbar^3}T^3$$

となり、比熱は T^3 に比例します。このため、絶対零度で 0 になるという熱力学の第三法則を満たしています。また、体積に対するエネルギー密度 E/V は

$$\frac{E}{V}=\frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^4=\sigma T^4$$

として、T^4 に比例することをステファン・ボルツマンの法則（Stefan-Boltzmann law）と言います。このときの σ は

$$\sigma=\frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}=5.67\times 10^{-8}\ [\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-4}]$$

と与えられ、ステファン-ボルツマン定数（Stefan-Boltzmann constant）と呼ばれます。
　ちなみに、プランクの放射公式の波長 λ $(\lambda=2\pi c/\omega)$ での形は

$$\epsilon(\omega)d\omega\ \Rightarrow\ \epsilon(\lambda)d\lambda$$

として、波長 $\lambda\sim\lambda+d\lambda$ の範囲に書き換えてやればいいので

$$d\omega=-\frac{2\boldsymbol{\pi}c}{\lambda^2}d\lambda$$

このとき、積分範囲 $0\sim\infty$ が $\infty\sim 0$ になるので符合はプラスに戻せます。よって、波長を使うと

$$\frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5}\frac{1}{e^{2\pi\hbar c/\lambda k_B T}-1}$$

これに波長が長い（振動数が小）という極限

$$\exp[\frac{2\pi\hbar c}{\lambda k_B T}]-1\simeq\frac{2\pi\hbar c}{\lambda k_B T}\qquad(\lambda\gg\frac{2\pi\hbar c}{k_B T})$$

をとることで

$$\frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5}\frac{\lambda k_B T}{2\pi\hbar c}=\frac{8\pi k_B T}{\lambda^4}$$

もしくは、振動数にすれば

$$\epsilon(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\nu^2 d\nu$$

となって、レイリー・ジーンズの放射公式 (Rayleigh・Jeans' radiation formula) になります。この公式は ν^2 に比例しているために、単調増加し続けます。実験と比較すると、レイリー・ジーンズの公式は振動数が低いところでだけ実験値と一致することがわかります。レイリー・ジーンズの公式はもともと古典的な考えに素直に従うことで求められた公式で (等分配の法則に従って各固有振動にエネルギー kT が振り分けられているとして求められた)、古典的では空洞放射を説明できないという問題を引き起こしたものです。

逆に短い波長（振動数が大）なら

$$\exp[\frac{2\pi\hbar c}{\lambda k_B T}] - 1 \simeq \exp[\frac{2\pi\hbar c}{\lambda k_B T}] \quad (\lambda \ll \frac{2\pi\hbar c}{k_B T})$$

なので

$$\epsilon(\lambda)d\lambda = \frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5}\exp[-\frac{2\pi\hbar c}{\lambda k_B T}]d\lambda$$

もしくは

$$\epsilon(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\exp[-\frac{2\pi\hbar\nu}{k_B T}]\nu^3 d\nu$$

となってウィーンの公式 (Wien's formula) になります。この公式は、レイリー・ジーンズの公式の問題点は等分配の法則が成り立っているとしたことと考え、$k_B T$ に相当する部分を適当な関数に置き換えて求められたものです。簡単にその流れを示すます。

まず、その関数を

$$F(x) = k_B \beta e^{-\beta x}$$

と仮定します (β は適当な定数)。また、断熱過程では ϵ/ν は不変量であることから、関数 $F(x)$ を $F(\frac{\nu}{T})$ としてみると

$$\frac{\epsilon}{\nu} = F(\frac{\nu}{T})$$

このようにできるはずで、これが等分配の法則を考えないときの各固有振動へのエネルギー分配の形になるはずです。これをレイリー・ジーンズの公式の $k_B T$ に代入することで

$$\epsilon(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B \beta}{c^3}e^{-\frac{\beta\nu}{T}}\nu^3 d\nu$$

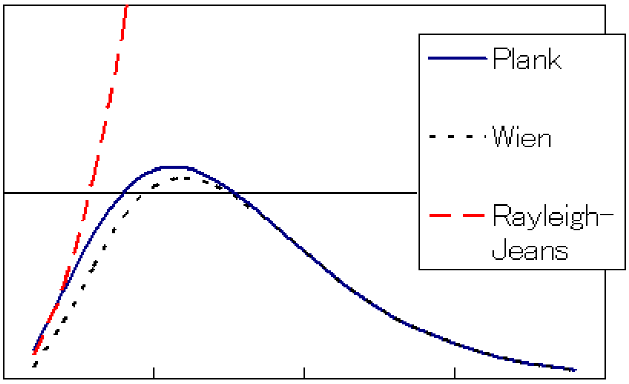

図 1: 横軸:振動数　縦軸:強度

このようにウィーンの公式になります。この公式は β を実験に合わせて決定することで、レイリー・ジーンズと違い振動数を大きくしていっても無限大に大きくなるということは起きませんし、振動数が大きなところ ($\nu/T \geq 10^{11}$) で実験と一致します。しかし、低い振動数のところでは実験と一致させることはできません。3 つの公式を概略的に示したのが上の図です。

実験結果と比較すると、レイリー・ジーンズの放射公式は長波長の部分においては測定値と一致しますが、それ以外は全くあわなく、ウィーンの公式は短波長の領域においても測定値とある程度一致しています。で、プランクの放射公式はこの両方の相補完的なものになっており、測定値との一致はかなり高いです。相補完的というのも、そもそもプランクの公式は他の 2 つの公式を組み合わせることで求められたものだからです。それも見ておきます。

レイリー・ジーンズを $E_{RJ}(\nu)$、ウィーンを $E_W(\nu)$ として

$$E_{RJ}(\nu) = \alpha T, \quad E_W(\nu) = ae^{-\frac{b}{T}}$$

としておきます。熱力学での関係 $dS/dE = 1/T$ を持ち込みます。$S(E, V)$ はエントロピーで、体積 V は固定されているとして常微分にしています。これから

$$\frac{dS}{dE_{RJ}} = \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{E_{RJ}}$$

$$\frac{dS}{dE_W} = \frac{1}{T} = \frac{1}{b}\log a - \frac{1}{b}\log E_W \qquad (\log E_W = \log a - \frac{b}{T})$$

さらにもう 1 回微分することで

$$\frac{d^2S}{dE_{RJ}^2} = \frac{d}{dE_{RJ}}\frac{\alpha}{E_{RJ}} = -\frac{\alpha}{E_{RJ}^2}$$

$$\frac{d^2S}{dE_W^2} = \frac{d}{dE_W}(\frac{1}{b}\log a - \frac{1}{b}\log E_W) = -\frac{1}{b}\frac{1}{E_W}$$

この 2 つを無理やりくっつけて

$$
\begin{aligned}
(\frac{d^2S}{dE^2})^{-1} &= (\frac{d^2S}{dE_{RJ}^2})^{-1} + (\frac{d^2S}{dE_W^2})^{-1} \\
&= -\frac{E^2}{\alpha} - bE \\
&= -\frac{E^2 + b\alpha E}{\alpha} \\
\frac{d^2S}{dE^2} &= -\frac{\alpha}{E^2 + b\alpha E} \\
&= -\frac{1}{b}\Big(\frac{1}{E} - \frac{1}{E + b\alpha}\Big)
\end{aligned}
$$

という新しいエネルギー $E(\nu)$ による関係を仮定します。これを積分して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} &= \int dE\Big[-\frac{1}{b}\Big(\frac{1}{E} - \frac{1}{E + b\alpha}\Big)\Big] \\
&= -\frac{1}{b}(\log E - \log[E + b\alpha]) + C \\
&= -\frac{1}{b}\log\frac{E}{E + b\alpha} + C
\end{aligned}
$$

温度 T が無限大ならエネルギー E も無限大になるために第 1 項は 0 になるので、積分定数 C は 0 とします。これを変形させて

$$
E(\nu) = \frac{\alpha b}{e^{b/T} - 1}
$$

係数はそれぞれ、$\alpha = \dfrac{8\pi k_B}{c^3}\nu^2,\ b = \beta\nu$、また β は一般的に $\beta = h/k_B$(h はプランク定数) と書くので

$$
E(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT} - 1}\nu^3 d\nu
$$

これはプランクの公式と一致します。この形をプランクは最初に導き、ここから量子論的な考えへ発展していきました。

なぜ量子論によって古典論での問題を解決できるのか言っておきます。そもそも古典論で問題だったのは空洞のエネルギーが無限大になってしまうことで、これは言い換えれば比熱が無限大になるということです。こんなことは実際に起こらないですが、古典的に考える限りそうなってしまいます。これに対して量子論での比熱は、「カノニカルアンサンブル」の調和振動子で求めたように

$$
C = k_B(\frac{\hbar\omega}{2k_BT})^2\frac{1}{\sinh^2(\frac{\beta\hbar\omega}{2})}
$$

これの $\hbar\omega \ll k_BT$ の極限を見ると、$C \simeq 0$ と分かります ($\hbar\omega$ は調和振動子 1 個のエネルギーに対応した量)。このような量子的な影響の強い極限での振る舞いによって比熱が無限大になることを防いでいます。また、$\hbar\omega \gg k_BT$

の極限を取ってみると、$C \simeq k_B$ なので古典論と一致します (「カノニカルアンサンブル」参照)。また、等分配の法則の視点から見ると、$\hbar\omega \ll k_BT$ の場合ではエネルギーを連続的に見れるので (k_BT に比べて十分小さいために連続値とできる)、k_BT より $\hbar\omega$ が十分小さいところでは成り立っていると考えられます。一方、$\hbar\omega \gg k_BT$ では、簡単に言ってしまえば、エネルギーが k_BT を超えてしまっているためにそこにエネルギーは分配されなく (もしくはされづらく) なり法則は成り立たなくなっています (確率は「カノニカルアンサンブル」で見たように $\exp(-E/k_BT)$ なので、$\hbar\omega \gg k_BT$ では確率が小さくなる)。このことは、k_BT がある $\hbar\omega$ より小さいとその振動数による効果はほとんど実現されないというのを表していると考えられるので、これによって振動数を大きくしていってもそこにはエネルギーは分配されなくなり、無限大に大きくなることが防がれます。このような理由から、量子論によって自然と制限が加えられ、プランクの公式にたどり着きます。

最後に、空洞放射に関する初期の頃の話を簡単にしておきます。これは古典的な力学と電磁気での話です。

加速運動する荷電粒子は電磁波としてエネルギーを放出するので (電磁気学の「放射」参照)、それが空洞放射のエネルギーを与えると考ます。ラーモアの公式から、加速している荷電粒子の放射によるエネルギー E の減少は

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3}\frac{\alpha Q^2}{c^3}|\boldsymbol{a}|^2$$

t は時間、$\boldsymbol{a}$ は加速度、Q は電荷、α はクーロン力の比例定数 (単位系が SI なら $\alpha = 1/4\pi\epsilon_0$) です。これが荷電粒子の振動によって起きるとします。そして、空洞放射の箱内部では、放射したエネルギーは壁で反射してまた荷電粒子に戻ってくると考えます (摩擦では熱エネルギーとなり、粒子に戻ってこない)。荷電粒子は振動でエネルギーを失い、その後にそのエネルギーに対応する外力を受けてまた振動をするということです。このように設定したとき、振動からのエネルギーがどう分布するのか求めます。

減衰と外力がある場合が必要なので、バネ定数を k として、振動の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F \quad (\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}) \tag{1}$$

b は定数、x は振動している質量 m の粒子の位置、外力 F は

$$F = F_0 e^{i\omega t}$$

と与えます。F_0 は定数です。振動を単純にするために、減衰の寄与は十分小さいとします ($b \ll 1$)。エネルギー放出時の振動は、外力に合わせて角振動数 ω で振動するとして

$$x = |X_0|\cos\omega t$$

$|X_0|$ は初期位置です。減衰振動部分を含まないようにするために、初期位置は (1) の特解

$$x_p = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + ib'\omega}e^{i\omega t} \quad (b' = \frac{b}{m})$$

での $t = 0$ から

$$X_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+ib'\omega}\ ,\ |X_0|^2 = \frac{F_0^2}{m^2}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+b'^2\omega^2}$$

とします。加速度 a は

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = |X_0|\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) = -|X_0|\omega^2\sin(\omega t)$$

この加速度での放射によるエネルギー損失は

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3}\frac{\alpha Q^2}{c^3}\omega^4|X_0|^2\sin^2(\omega t)$$

三角関数の周期 $\tau = 2\pi/\omega$ で平均します。これは、積分では

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt$$

とすることなので

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\sin^2(\omega t) &= \frac{1}{\omega\tau}\int_0^{\tau'} dt'\sin^2 t' \qquad (t'=\omega t\ ,\ dt'=\omega dt)\\ &= \frac{1}{\omega\tau}\big[\frac{1}{2}t'-\frac{1}{4}\sin 2t'\big]_0^{\tau'}\\ &= \frac{1}{\omega\tau}(\frac{1}{2}\omega_0\tau-\frac{1}{4}\sin(2\omega\tau))\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

から

$$-\langle\frac{dE}{dt}\rangle = \frac{1}{3}\frac{\alpha Q^2}{c^3}\omega^4|X_0|^2$$

1 周期の平均を $<>$ で表記しています。

外力 F は放射したエネルギーによる力なので、クーロン力として電場 $\mathcal{E}$ から

$$F = F_0e^{i\omega t} = Q\mathcal{E} = Qa_0e^{i\omega t}$$

と与えます。a_0 は電場の振幅です。これを入れれば

$$-\langle\frac{dE}{dt}\rangle=\frac{1}{3}\frac{\alpha Q^4}{c^3}\frac{|a_0|^2}{m^2}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+b'^2\omega^2}$$

a_0 は電場のエネルギー密度 u とは

$$u=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\alpha}|\mathcal{E}|^2=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\alpha}|a_0|^2$$

u は角振動数に依存しているとして、角振動数 ω と $\omega+\Delta\omega$ の間では $u=f(\omega)\Delta\omega$ になるとして

$$-\langle\frac{dE}{dt}\rangle=\frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{c^3}\frac{Q^4}{m^2}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+b'^2\omega^2}f(\omega)\Delta\omega$$

各角振動数での寄与を合わせたいので、角振動数で積分します。しかし、このままでは積分ができないので、近似します。$f(\omega)$ を除いた ω の依存部分は

$$I(\omega)=\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+b'^2\omega^2}$$

これは b' が十分小さいなら ω_0 を中心とする鋭い形になります。このため、$\omega\simeq\omega_0$ としても全体的な振る舞いはほぼ変わらないので

$$I(\omega)\simeq\frac{\omega_0^4}{4\omega_0^2(\omega_0-\omega)^2+b'^2\omega_0^2}\qquad((\omega_0^2-\omega^2)=(\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega)\simeq2\omega_0(\omega_0-\omega))$$

と近似します。さらに、ω_0 から離れると $I(\omega)$ は急激に減少するので、$f(\omega)$ は急激に変化しない関数と仮定して、$f(\omega_0)$ だけを使うことにします。このように近似して

$$-\langle\frac{dE}{dt}\rangle\simeq\frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{c^3}\frac{Q^4}{m^2}\frac{1}{4\omega_0^2}\frac{f(\omega_0)\omega_0^4}{(\omega_0-\omega)^2+b'^2/4}\Delta\omega=\frac{2\pi}{3}\frac{\alpha^2}{c^3}\frac{Q^4}{m^2}\frac{f(\omega_0)\omega_0^2}{(\omega_0-\omega)^2+b'^2/4}\Delta\omega$$

ω を 0 から ∞ で積分して

$$-\langle\frac{dE}{dt}\rangle_{\rm all}=\frac{2\pi}{3}\frac{\alpha^2}{c^3}\frac{Q^4}{m^2}f(\omega_0)\omega_0^4\int_0^\infty d\omega\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+b'^2/4}$$

ω_0 から離れた地点の値はほぼ 0 になるので、0 以下の領域からの寄与も加えて積分することにして

$$
\begin{aligned}
-\langle\frac{dE}{dt}\rangle_{\rm all} &= \frac{2\pi}{3}\frac{\alpha^2}{c^3}\frac{Q^4}{m^2}f(\omega_0)\omega_0^4\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+b'^2/4} \\
&= \frac{8\pi}{12}\frac{\alpha^2Q^4}{m^2c^3}f(\omega_0)\omega_0^2\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\frac{1}{\omega'^2+b'^2/4} \qquad (\omega'=\omega_0-\omega\ ,\ d\omega'=-d\omega) \\
&= \frac{8\pi}{12}\frac{\alpha^2Q^4}{m^2c^3}f(\omega_0)\omega_0^2\Big[\frac{2}{b'}\arctan\frac{2\omega'}{b'}\Big]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{8\pi}{12}\frac{\alpha^2Q^4}{m^2c^3}f(\omega_0)\omega_0^2\frac{2\pi}{b'} \qquad (\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{4\pi^2}{3}\frac{c\omega_0^2R^2}{b'}f(\omega_0) \qquad (R=\frac{\alpha Q^2}{mc^2}) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

これだと減衰の係数 b' が不明なので、単振動の力学的エネルギーと関係づけます。ちなみに、R は Q を素電荷、m を電子の質量とすれば古典電子半径です。

振動の減衰による力学的エネルギーの減少を与えます。減衰の寄与は十分小さく、振動は単振動で近似できるとします。なので、瞬間的な力学的エネルギーは単振動の場合を使って

$$E_s=\frac{1}{2}mv_s^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x_s^2$$

単振動の力学的エネルギーは定数ですが、振動の減衰によってエネルギーは減少するとして時間微分を

$$\frac{dE_s}{dt}=\frac{1}{dt}(\frac{1}{2}mv_s^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x_s^2)=mv_s\frac{dv_s}{dt}+m\omega_0^2x_s\frac{dx_s}{dt}=m\frac{dx_s}{dt}\frac{d^2x_s}{dt^2}+m\omega_0^2x_s\frac{dx_s}{dt}=(m\frac{d^2x_s}{dt^2}+m\omega_0^2x_s)\frac{dx_s}{dt}\neq 0$$

振動のエネルギーの減少は減衰によるので、(1) での $F=0$ の減衰振動の運動方程式から

$$\frac{dE_s}{dt}=-b(\frac{dx_s}{dt})^2$$

とできるとします。角振動数 ω_0 での振動は $|c|$ を初期位置として

$$x_s=|c|\cos(\omega_0t)\ ,\ v_s=-|c|\omega_0\sin(\omega_0t)$$

と与えることにして

$$\frac{dE_s}{dt}=-b(\frac{dx_s}{dt})^2=-b|c|^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0t)$$

一方で、放射のエネルギー損失は

$$a_s=-|c|\omega_0^2\cos(\omega_0t)$$

から

$$-\frac{dE_0}{dt}=\frac{2}{3}\frac{\alpha Q^2}{c^3}\omega_0^4|c|^2\cos^2(\omega_0 t)=\gamma m\omega_0^2|c|^2\cos^2(\omega_0 t)\qquad(\gamma=\frac{2}{3}\frac{\alpha Q^2}{c^3}\frac{\omega_0^2}{m})$$
$$=\gamma m\omega_0^2|c|^2\cos^2(\omega_0 t)$$

E_s は

$$E_s=\frac{1}{2}mv_s^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x_s^2=\frac{1}{2}m|c|^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)+\frac{1}{2}m\omega_0^2|c|^2\cos^2(\omega_0 t)=\frac{1}{2}m|c|^2\omega_0^2$$

なので

$$-\frac{dE_0}{dt}=2\gamma mE_s\cos^2(\omega_0 t)$$

E_s では

$$-\frac{dE_s}{dt}=2\frac{b}{m}E_s\sin^2(\omega_0 t)$$

どちらも 1 周期で平均を取ると、$\sin,\cos$ の 1 周期の積分は同じなので

$$-\langle\frac{dE_0}{dt}\rangle=\gamma E_s\ ,\ -\langle\frac{dE_s}{dt}\rangle=\frac{b}{m}E_s$$

放射のエネルギーと力学的エネルギーの減少が等しいとすれば、b と γ は

$$\gamma=\frac{b}{m}$$

と関連付けられます。

(2) でも同様に対応させます。力学的エネルギーには単振動している粒子 (調和振動子) の熱的な平均エネルギー k_BT を使うことにして

$$-\langle\frac{dE}{dt}\rangle_{\rm all}=\gamma k_BT$$
$$\frac{4\pi^2}{3}\frac{c\omega_0^2R^2}{\gamma}f(\omega_0)=\gamma k_BT\qquad(\gamma=b'=\frac{2}{3}\frac{\alpha Q^2}{c^3}\frac{\omega_0^2}{m}=\frac{2}{3}\frac{R}{c}\omega_0^2)$$
$$f(\omega_0)=\frac{3}{4\pi^2}\frac{\gamma^2}{c\omega_0^2R^2}k_BT$$
$$=\frac{3}{4\pi^2}\frac{1}{c\omega_0^2R^2}\frac{4}{9}\frac{R^2}{c^2}\omega_0^4k_BT$$
$$=\frac{1}{3\pi^2}\frac{\omega_0^2}{c^3}k_BT$$

振動数 $\nu = \omega/2\pi$ に変えると

$$\begin{aligned} f(\omega_0)\Delta\omega &= \frac{1}{3\pi^2}\frac{\omega_0^2}{c^3}k_BT\Delta\omega \\ &= \frac{1}{3\pi^2}\frac{(2\pi\nu_0)^2}{c^3}k_BT(2\pi\Delta\nu) \\ &= \frac{8\pi}{3}\frac{\nu_0^2}{c^3}k_BT\Delta\nu \end{aligned}$$

となるので、左辺を振動数のエネルギー密度 $\epsilon(\nu_0)$ とすれば

$$\epsilon(\nu_0)\Delta\nu = \frac{8\pi}{3}\frac{\nu_0^2}{c^3}k_BT\Delta\nu$$

これはレイリー・ジーンズの公式から 1/3 ずれてますが、今は x 軸方向のみだったので、y, z 軸方向の単振動も合わせる必要があると考えて 3 倍すれば一致します。