分布関数

カノニカルアンサンブルとグランドカノニカルアンサンブルに量子論における粒子の性質を加えます。量子論では同じ粒子 (同種粒子) は区別できないとするので、知りたいのは最初から粒子が区別できないとしたとき、分配関数と大分配関数がどのように計算されるかです。
ここでは具体的な量の計算はせずに分布関数を出すだけです。
量子論での粒子の話は完全に飛ばして、必要な部分だけを使います。

まず、量子論のことは無視してみていきます。扱う状況として、同じ粒子が沢山ある系を用意し、それぞれの粒子が独立に運動しているとします。言い換えれば粒子間に相互作用がないということなので、理想気体による系です (もっと単純にしたければ自由粒子の集まりだと思えばいい)。こうすることで、1 つの粒子が取れる状態 (1 粒子状態) によって系の可能な状態を決められます。

系の可能な状態は、各粒子が可能な 1 粒子状態を a_i とし、粒子に番号を付けることで、粒子 1 は 1 粒子状態 a_1、粒子 2 は 1 粒子状態 a_2、というようにして指定することができます。同じ粒子の集まりを扱っているので 1 粒子状態 a は共通で、それのうちのどれかという意味で $a_1, a_2, \ldots$ としています。これを全粒子に対して指定すれば、系の可能な状態の 1 つとなるので、系の可能な状態は

系の状態 1：粒子 1 は 1 粒子状態 a_1、粒子 2 は 1 粒子状態 a_2、粒子 3 は 1 粒子状態 a_3、$\cdots$

系の状態 2：粒子 1 は 1 粒子状態 a_2、粒子 2 は 1 粒子状態 a_4、粒子 3 は 1 粒子状態 a_1、$\cdots$

として指定できます。1 粒子状態はエネルギーとして $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ のエネルギーが取れるとすれば、系の状態はその組み合わせによる可能な全エネルギー E_i によって区別されます。

ここで、粒子に番号がつけられない場合を考えます。番号がつけられないというのは、粒子が区別できないということです。そうすると今のように、粒子 1 の状態は a_1 という指定ができなくなります (区別できるボールを配置する問題と区別できないボールを配置する問題の違いと同じ)。ギブスの補正は、区別できるとしてから区別できない場合に切り替えるなんてことをしているので、ここでは最初から区別できないとして考えていきます。

というわけで、1 つの状態に何個の粒子が入っているかを数えることで系の状態を指定する方法を使います。例えば、1 粒子状態 a_1 には n_1 個の粒子、a_2 には n_2 個の粒子、というように粒子が配置されているとします。そうすれば、粒子の状態を $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ のエネルギーで指定されるとすることで、系の全エネルギー E_i は

$$E_1 = \epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \cdots$$

$$E_2 = \epsilon_1 n'_1 + \epsilon_2 n'_2 + \cdots$$

として与えることができます。このように、各粒子の可能なエネルギーに何個の粒子がいるかによって系の状態をエネルギー E_i で指定できます。これで粒子が区別できなくても系の可能なエネルギーを作ることが出来ました。

準備ができたので、カノニカルアンサンブルとグランドカノニカルアンサンブルに適用します。どちらのアンサンブルも系の可能な状態に対して和を取ることで、分配関数 Z と大分配関数 Ξ が

$$Z(T, N) = \sum_i \exp[-\beta E_i]$$

$$\Xi(T, \mu) = \sum_i \exp[-\beta(E_i - \mu N_i)]$$

と与えられています。E_i は系が可能なエネルギー、μ は化学ポテンシャル、N_i は粒子数です (系の体積 V もありますが $Z(T, V, N), \Xi(T, V, \mu)$ と書かないで省いています)。問題になるのが、可能な状態の和は粒子が区別できないときどうなるのかです。

まず、分配関数の方で行ってみます。カノニカルアンサンブルでは粒子数 N が与えられているので、各 1 粒子状態 ϵ_i にいる粒子数 n_i には

$$N = n_1 + n_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} n_i$$

という制限が入ります (ϵ_1 に n_1 個、ϵ_2 に n_2 個、…としている)。系のエネルギーは

$$E_i = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j n_j \tag{1}$$

となります。系の可能なエネルギー E_i は各 1 粒子状態に何個の粒子がいるかで決まるので、各 1 粒子状態 ϵ_i になれる (入れる) 粒子の個数 n_i の可能な値に対して和を取れば、系が可能な全ての状態の和になります。1 つの状態に入れる粒子数に制限はないはずなので、1 粒子状態に入れる粒子の個数は 0 から無限個だとします。つまり、1 粒子状態 ϵ_1 には 0 から無限個のどれか、1 粒子状態 ϵ_2 には 0 から無限個のどれか、というようになっていると考えることで、全ての可能な状態の和は

$$Z(T,N) = \sum_i \exp[-\beta E_i] = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \exp[-\beta \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i n_i]$$

構造は和をばらせばはっきりしていて、簡単のために ϵ_1, ϵ_2 しかないとすれば

$$\begin{aligned}\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \exp[-\beta \sum_{i=1}^{2} \epsilon_i n_i] =& \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2)] \\ =& \sum_{n_2 \neq 1}^{\infty} \big(\exp[-\beta(0+\epsilon_2)] + \exp[-\beta(\epsilon_1+\epsilon_2)] + \exp[-\beta(2\epsilon_1+\epsilon_2)] + \cdots \big)\end{aligned} \tag{2}$$

のようになっています (n_1 の和を取るときに $n_2 = 1$ の場合を取り出していて、この意味で $n_2 \neq 1$ と書いている)。これは確かに、$e^{-\beta E_i}$ の可能なエネルギーに対する和になっています。

しかし、この和の展開は間違っています。今は全粒子数 N が固定されているので、本当は

$$\begin{aligned}&\sum_{n_1=0} \sum_{n_2=0} \exp[-\beta \sum_{i=1}^{2} \epsilon_i n_i] \\ &= \sum_{n_2 \neq 1} \big(\exp[-\beta(0+N\epsilon_2)] + \exp[-\beta(\epsilon_1+(N-1)\epsilon_2)] + \exp[-\beta(2\epsilon_1+(N-2)\epsilon_2)] + \cdots \big)\end{aligned}$$

となっている必要があります (和の上限は粒子数の制限に従う必要があり、それは省いて書いています)。粒子数が決まっているので、ϵ_1 に 0 個なら ϵ_2 には N 個、ϵ_1 に 1 個なら ϵ_2 には $N-1$ 個です。これが厄介な点で

$$Z(T,N) = \sum_{n_1=0} \sum_{n_2=0} \cdots \exp[-\beta \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i n_i] \quad (N = \sum_{i=1}^{\infty} n_i)$$

と書くことは出来ても、和が常に計算できるとは限らないです。これを変形して

$$Z(T,N) = \sum_{n_1=0} \sum_{n_2=0} \cdots \prod_{i=1}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_i n_i} = \sum_{n_1=0} e^{-\beta \epsilon_1 n_1} \sum_{n_2=0} \cdots \prod_{i=2}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_i n_i}$$

とすれば n_1 の和が計算できるので、n_2 以降も同様に行っていけばいいように思えます。しかし、

$$N = n_1 + n_2 + \cdots$$

の制限があるために、n_2 以降の和をとるときに n_1 を含んだ

$$\sum_{j=2}^{\infty} n_j = N - n_1$$

を考慮しなくてはいけません。なので、個別に和を取っていくのもよほど状況を限定しない限りできません。というわけで、カノニカルアンサンブルで粒子が区別できない場合を計算するのは難しいことが分かりました。

次にグランドカノニカルアンサンブルに行きます。グランドカノニカルでの粒子数が固定されていないというのが役に立ちます。つまり、粒子数に対する制限が存在していません。なので、(2) の展開の仕方が正しくなります。よって、大分配関数では

$$E_i = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j n_j \ , \ N_i = \sum_{j=1}^{\infty} n_j$$

から

$$\Xi(T, \mu) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \exp[-\beta \sum_{i=1}^{\infty} (\epsilon_i n_i - \mu n_i)] \tag{3}$$

これは

$$\begin{aligned} \Xi(T, \mu) = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \prod_{i=1}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_i - \mu) n_i] \\ = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_1 - \mu) n_1] \sum_{n_2=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_2 - \mu) n_2] \cdots \end{aligned}$$

という変形において、粒子数の制限がないために各 n_i の和は独立に実行できます。この和は、公比 $e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}$ の等比数列の和なので

$$\sum_{k=0}^{n} a r^k = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} \quad (r \neq 1 \ , \ -1 < r < 1)$$

から

$$\begin{aligned} \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu) n_i] &= e^0 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} + e^{-2\beta(\epsilon_j - \mu)} + \cdots \\ &= 1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} + e^{-2\beta(\epsilon_j - \mu)} + \cdots \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - e^{-n\beta(\epsilon_j - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} \end{aligned}$$

よって大分配関数は

$$\Xi(T,\mu)=\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_1-\mu)}}\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_2-\mu)}}\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)}}$$

となります。というわけで、最初から粒子が区別できないとした大分配関数が求まりました (ただし、粒子間に相互作用がない場合)。ここで量子論からの性質をはっきりさせて見直します。

まず、量子論での粒子のエネルギーが求められるかですが、これはシュレーディンガー方程式が解ければ求まります。なので、シュレーディンガー方程式からエネルギー固有状態 (固有関数) とエネルギー固有値が求まっているとし、それが状態 ϵ_i に対応するとします。

次に量子論での粒子の性質を与えます。同じ粒子は区別できないというのに加えて、状態に何個の粒子が入れるかで区別されます。簡単に言えば、状態にいくらでも入れるとした場合の粒子がボソンです。今求められた結果がそのままボソンの場合になります。量子論ではもう 1 つ別の性質を持った粒子があって、それはフェルミオンです。フェルミオンでは 1 つの状態に 1 個の粒子しか入れないという性質があります。そうすると、和の取り方が

$$\Xi_f(T,\mu)=\sum_{n_1=0}^{1}\sum_{n_2=0}^{1}\cdots\exp[-\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)]$$

となります。これは単に 1 つの状態に 0 から無限個のどれかが入れるとしていたボソンの場合を、1 つの状態に 1 個までしか入れないとして書き換えたものです。このときも和は計算できます。n_i を分けると

$$\Xi_f(T,\mu)=\sum_{n_1=0}^{1}\exp[-\beta(\epsilon_1-\mu)n_1]\sum_{n_2=0}^{1}\exp[-\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\epsilon_2-\mu)n_2]\cdots$$

となり、各和は

$$\sum_{n_i=0}^{1}\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)n_i]=1+\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)]$$

でしかないので

$$\Xi_f(T,\mu)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)])$$

よって、量子論を考慮することで、粒子間に相互作用のないボソンの大分配関数 $\Xi_b(T,\mu)$ とフェルミオンの大分配関数 $\Xi_f(T,\mu)$ として

$$\Xi_b(T,\mu)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)}}=\prod_{i=1}^{\infty}\Xi_b^{(i)}(T,\mu)$$

$$\Xi_f(T,\mu)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)])=\prod_{i=1}^{\infty}\Xi_f^{(i)}(T,\mu)$$

が求まります。$\Xi_b^{(i)},\Xi_f^{(i)}$ は

$$\Xi_b^{(i)}(T,\mu)=\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)}}=\sum_{n_i=0}^{\infty}\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)n_i]$$

$$\Xi_f^{(i)}(T,\mu)=1+\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)]=\sum_{n_i=0}^{1}\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)n_i]$$

となっています。ここからはボソン、フェルミオンの両方で同じ場合は b,f を省いて Ξ と書いていきます。

これから 1 粒子状態にいる粒子数の平均値を求めます。グランドカノニカルアンサンブルでの平均値は

$$\langle g\rangle=\frac{1}{\Xi}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots g\exp[-\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)]$$

で求まります。ボソン、フェルミオンどちらでもいいので、n_i の和の範囲を省いて書いています。ϵ_j にいる粒子数 n_j のように作ってきたので、1 粒子状態 ϵ_j にいる粒子数の平均は

$$\langle n_j\rangle=\frac{1}{\Xi}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots n_j\exp[-\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)]$$

とすればいいです。注意ですが、これは微視的な状態 (量子的な粒子が可能な 1 粒子状態) における粒子数の平均なので、巨視的 (熱力学的) な量ではないです。n_j の和を分離すると

$$\begin{aligned}\langle n_j\rangle&=\frac{1}{\Xi}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\exp[-\beta\sum_{i\neq j}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)]\sum_{n_j}n_j\exp[-\beta(\epsilon_j n_j-\mu n_j)]\\&=\frac{1}{\Xi}\prod_{i\neq j}^{\infty}\Xi^{(i)}\sum_{n_j}n_j\exp[-\beta(\epsilon_j n_j-\mu n_j)]\end{aligned}\qquad(4)$$

一行目の右辺での「$\cdots$」部分には n_j の和がいなく、Σ,Π での $i\neq j$ は $i=j$ を除くという意味です。そうすると、j を分離した部分は j を含んでいない Ξ になっているので、結局 $\Xi^{(j)}$ だけが残って

$$\langle n_j\rangle=\ (\prod_{k=1}^{\infty}\Xi^{(k)})^{-1}\prod_{i\neq j}^{\infty}\Xi^{(i)}\sum_{n_j}n_j\exp[-\beta(\epsilon_j-\mu)n_j]=\ \frac{1}{\Xi^{(j)}}\sum_{n_j}n_j\exp[-\beta(\epsilon_j-\mu)n_j]\qquad(5)$$

この和は微分を使って変形すれば消せます。$\Xi^{(i)}$ を μ で微分すると

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\Xi_b^{(i)}(T,\mu)=\frac{1}{\beta}\sum_{n_i=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\mu}\exp[-\beta(\epsilon_j-\mu)n_i]=\sum_{n_i=0}^{\infty}n_i\exp[-\beta(\epsilon_j-\mu)n_i]$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\Xi_f^{(i)}(T,\mu)=\frac{1}{\beta}\sum_{n_i=0}^{1}\frac{\partial}{\partial\mu}\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)n_i]=\sum_{n_i=0}^{1}n_i\exp[-\beta(\epsilon_i-\mu)]$$

なので、μ 微分によって

$$\langle n_j\rangle=\frac{1}{\Xi^{(j)}}\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\Xi^{(j)}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi^{(j)}$$

ボソンでは $\langle n_j \rangle$ を $\langle n_b^{(j)} \rangle$ と書くことにして

$$
\begin{aligned}
\langle n_b^{(j)} \rangle &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\big[\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}}\big] \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}}\frac{\partial}{\partial\mu}e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)} \\
&= \frac{e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}}{1-e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j-\mu)}-1}
\end{aligned}
$$

フェルミオンでは $\langle n_f^{(j)} \rangle$ と書くことにして

$$
\begin{aligned}
\langle n_f^{(j)} \rangle &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi_f^{(j)} \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log[1+e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}] \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}}\frac{\partial}{\partial\mu}e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)} \\
&= \frac{e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j-\mu)}+1}
\end{aligned}
$$

これらの 1 粒子状態の平均値として出てきた関数

$$
n_B = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\ ,\ n_F = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}
$$

を分布関数 (distribution function) と呼びます (それぞれボソン分布関数、フェルミオン分布関数)。

　全粒子数 N の平均は、(4) から (5) への変形と同じようにすることで

$$
\begin{aligned}
\langle N\rangle &= \frac{1}{\Xi}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots N\exp[-\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)] \\
&= \frac{1}{\Xi}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{k=1}^{\infty} n_k\exp[-\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)] \\
&= \frac{1}{\Xi}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots(n_1+n_2+\cdots)\exp[-\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)] \\
&= \sum_{n_1} n_1 e^{-\beta(\epsilon_1-\mu)n_1}\frac{1}{\Xi}\sum_{n_2}\cdots\exp[-\beta\sum_{i\neq 1}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)] \\
&\quad +\sum_{n_2} n_2 e^{-\beta(\epsilon_2-\mu)n_2}\frac{1}{\Xi}\sum_{n_1}\sum_{n_3}\cdots\exp[-\beta\sum_{i\neq 2}^{\infty}(\epsilon_i n_i-\mu n_i)] \\
&\quad +\cdots \\
&= \frac{1}{\Xi^{(1)}}\sum_{n_1} n_1\exp[-\beta(\epsilon_1-\mu)n_1]+\frac{1}{\Xi^{(2)}}\sum_{n_2} n_2\exp[-\beta(\epsilon_2-\mu)n_2]+\cdots \\
&= \langle n_1\rangle+\langle n_2\rangle+\cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\langle n_i\rangle
\end{aligned}
$$

となって、それぞれの状態での粒子数平均を足したものになります。

ボソンとフェルミオンの 2 つがあるとしてきましたが、ボソンに特別な場合があります。それを見るために、カノニカルアンサンブルでの調和振動子を持ち込みます。量子論での 1 個の調和振動子のエネルギーは

$$
\epsilon=(k+\frac{1}{2})\hbar\omega_j \quad (k=0,1,2,\ldots)
$$

となっていますが、このエネルギーを

$$
\epsilon=k\hbar\omega_j
$$

とします。エネルギーを 0 から測るのではなく零点エネルギー $\hbar\omega_j/2$ からにしたというだけです (例えば、温度計の目盛りを 0 ℃からでなく 10 ℃からにしたのと同じ)。そうすると、分配関数は

$$
Z^{(j)}=\sum_{k=0}^{\infty}\exp[-\beta k\hbar\omega_j]=\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_j}}
$$

と計算されます (「カノニカルアンサンブル」参照)。独立な調和振動子が N 個あるなら ($j=1,2,\ldots,N$ で調和振動子を区別して)

$$
Z=\prod_{j=1}^{N}Z^{(j)}=\prod_{j=1}^{N}\sum_{k_j=0}^{\infty}\exp[-\beta k_j\hbar\omega_j]=\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_j}}
$$

k_j は ω_j の調和振動子が持つエネルギーが $\epsilon=\hbar k_j\omega_j$ ($k_j=0,1,2,\ldots$) であることを指定するものです。

ここで見方を変えてみます。N 個の独立な調和振動子がいる系の可能なエネルギーは

$$E_i = \sum_{j=1}^{N} k_j \hbar\omega_j$$

で与えられます。ついでに

$$\epsilon_j = \hbar\omega_j \ , \ n_j = k_j$$

と書くことにすれば

$$\begin{aligned}
Z &= \prod_{j=1}^{N}\sum_{k_j=0}^{\infty} \exp[-\beta k_j \hbar\omega_j] \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\exp[-\beta\epsilon_1 n_1]\sum_{n_2=0}^{\infty}\exp[-\beta\epsilon_2 n_2]\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\exp[-\beta\epsilon_N n_N] \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\exp[-\beta\epsilon_1 n_1 - \beta\epsilon_2 n_2\cdots - \beta\epsilon_N n_N] \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\exp[-\beta\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j n_j]
\end{aligned}$$

N が無限個だとして

$$Z = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\exp[-\beta\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j n_j] \tag{6}$$

これは式変形しただけなので

$$Z = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\exp[-\beta\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j n_j] = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_j}}$$

となります。ここで気がつくことは、カノニカルアンサンブルで量子的な調和振動子の集まりを扱った結果 (6) が、粒子が区別できないとした大分配関数 (3) の $\mu = 0$ と同じになっている点です (ここでの n_j は粒子数でなくエネルギー準位なので全粒子数のような制限がない)。つまり、独立な無限個の量子的な調和振動子の集まりは、ボソンの理想気体でのグランドカノニカルサンサンブル (大分配関数) で $\mu = 0$ とした場合と同じだということです。さらに、ボソンの理想気体のカノニカルアンサンブルにおいて粒子数が固定されていないとした場合と同じとも言えます ($\mu = 0$ から、熱浴と粒子のやり取りをしていないという意味でカノニカルアンサンブルと見なせる)。

この量子的な調和振動子の集まりを $\mu = 0$ のボソンの理想気体だとする読み替えが可能だとします。そうすると、特別なボソンとして、カノニカルアンサンブルにおいて粒子数が変化してもいいボソン ($\mu = 0$ のボソンの理想気体) が存在することになり、それを光子 (photon) と言います。カノニカルアンサンブルでは粒子を供給する熱浴は存在しないので、光子はどこからか沸いて出てくることを許されています。

光子が調和振動子から出てくることは空洞放射でのプランクの放射公式と関係し、場の量子論においては電磁場を量子化することで出てくる粒子となっています。ここら辺の歴史的な流れは量子論についての科学史なんかに書いてあります。

最後に分布関数の計算で知っておくと便利な関係を載せておきます。計算すれば簡単に確かめられます。

$$e^{-\beta(E-\mu)} = \frac{1}{1-n_F} - 1 = \frac{n_F}{1-n_F}$$

$$e^{\beta(E-\mu)} = \frac{1}{n_F} - 1 = \frac{1-n_F}{n_F}$$

$$e^{-\beta(E-\mu)} = \frac{n_B}{1+n_B}$$

$$e^{\beta(E-\mu)} = \frac{1}{n_B} + 1$$

$$n_B(-(E-\mu)) = -(1+n_B(E-\mu)) \qquad \big(n_B(\pm(E-\mu)) = \frac{1}{e^{\pm\beta(E-\mu)}-1}\big)$$

$$n_F(-(E-\mu)) = 1-n_F(E-\mu) \qquad \big(n_f(\pm(E-\mu)) = \frac{1}{e^{\pm\beta(E-\mu)}+1}\big)$$