射影演算子

エネルギー、3 次元運動量、スピンに対する射影演算子 (projection operator) を与えます。
射影は基底ベクトル上に変換することで、射影演算子はそれを行う演算子です。

ディラック方程式の解は

$$\psi^r(x) = \omega^r(\boldsymbol{p})\exp[-\frac{i}{\hbar}\epsilon_r p_\mu x^\mu)] \quad (r=1,2,3,4)$$

$$\epsilon_r = +1\ (r=1,2)\ ,\ -1\ (r=3,4)$$

と書いて、規格化定数は省きます。$r=1,2,3,4$ で、$\epsilon_r=+1\ (r=1,2)$, $\epsilon_r=-1\ (r=3,4)$ です。$\psi^r(x)$ は全て $p_0=E/c>0$ です。

$\omega^r(\boldsymbol{p})$ をディラック方程式に入れれば

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\omega^{1,2}(\boldsymbol{p})\exp[-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu] = 0$$

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\omega^{3,4}(\boldsymbol{p})\exp[+\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu] = 0$$

微分を実行すれば

$$(p_\mu\gamma^\mu - m)\omega^{1,2}(\boldsymbol{p}) = 0 \quad (p_0>0) \tag{1a}$$

$$(p_\mu\gamma^\mu + m)\omega^{3,4}(\boldsymbol{p}) = 0 \quad (p_0>0) \tag{1b}$$

このような方程式を満たします。見れば分かることですが、$\omega^{1,2}(\boldsymbol{p})$ は通常のディラック方程式に従い、$\omega^{3,4}(\boldsymbol{p})$ は p_μ の符号を反転させたディラック方程式に従っています。p_μ の符号が反転していることは、エネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ の符号が反転していることを意味します。つまり、$\omega^{3,4}(\boldsymbol{p})$ は負のエネルギー $-E$ と負の運動量 $-\boldsymbol{p}$ によって作られる方程式に従っていると言えます。というわけで、$\psi^{1,2}(x)$ は E と $\boldsymbol{p}$ を持った電子の解、$\psi^{3,4}(x)$ は $-E$ と $-\boldsymbol{p}$ を持った電子の解となります。

このような解釈と空孔理論をあわせると、$\psi^{3,4}(x)$ は反粒子を記述すると考えられます。そして、$\psi^{3,4}(x)$ で $p_0,\boldsymbol{p}>0$ と考えれば、$\psi^{3,4}(x)$ はエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ の陽電子を記述していると解釈できます。粒子、反粒子の区別のために

$$\omega^{1,2}(\boldsymbol{p})\exp[-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu] = u^{1,2}(\boldsymbol{p})\exp[-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu]$$
$$\omega^{3,4}(\boldsymbol{p})\exp[\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu] = v^{1,2}(\boldsymbol{p})\exp[\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu]$$

として、u,v がよく使われます。

エネルギーと 3 次元運動量がどうなっているか知るために射影演算子を作ります。エネルギーと 3 次元運動量は 4 元運動量なので、まとめて

$$\Lambda_r = \frac{\epsilon_r p_\mu \gamma^\mu + mc}{2mc}$$

というのを定義します。これを $\omega^r(\boldsymbol{p})$ に対して作用してみるとと

$$\Lambda_r \omega^r(\boldsymbol{p}) = \frac{\epsilon_r \gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}\omega^r(\boldsymbol{p}) \tag{2}$$

(1a) と (1b) は ϵ_r で

$$(\not{p} - \epsilon_r mc)\omega^r(p) = 0$$

と書けて、変形すれば

$$(\epsilon_r \not{p} - mc)\omega^r(p) = 0$$

これを使うことで (2) は

$$\Lambda_r \omega^r(\boldsymbol{p}) = \frac{mc + mc}{2mc}\omega^r(\boldsymbol{p}) = \omega^r(\boldsymbol{p})$$

となります。これで何が起きたのかをはっきりさせるために、$\Lambda_{3,4}$ とします。

ω^r の関係

$$\overline{\omega}^s(\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p}) = \epsilon_s \delta_{ts}\ ,\ \sum_{r=3}^{4}\omega^r(\boldsymbol{p})\overline{\omega}^r(\boldsymbol{p}) = \frac{p_\mu \gamma^\mu - mc}{2mc}$$

を使うと

$$\begin{aligned}
\Lambda_{3,4}\omega^r(\boldsymbol{p}) &= \frac{-\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}\omega^r \qquad (\Lambda_{3,4} = \frac{-\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}) \\
&= -\sum_{s=3}^{4}\omega^s \overline{\omega}^s \omega^r \\
&= -\sum_{s=3}^{4}\omega^s \epsilon_s \delta_{rs} \\
&= \omega^r \quad (r = 3, 4)
\end{aligned}$$

となります。$s = 3, 4$ なので、δ_{rs}, δ_{r4} から $r = 3, 4$ です。このことから、$\Lambda_{3,4}$ は ω^r から負エネルギー状態である $\omega^{3,4}$ を取り出していることが分かります。$\Lambda_{1,2}$ では正エネルギー状態 $\omega^{1,2}$ を取り出します。

というわけで、4 元運動量の正負に対応して

$$\Lambda_\pm = \frac{\pm\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}$$

と定義すれば、正負の状態に対する射影演算子として使えることがわかります。

量子力学でのスピン演算子は軸の方向を $\boldsymbol{e}$ として $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}/2$ で与えられます (固有値が $\pm 1/2$)。このため、

$$\frac{1\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}}{2}$$

とすれば、$\boldsymbol{e}$ の方向を向いているスピンの状態を取り出せます ($\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}=+1$ ならプラスで 1、$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}=-1$ ならマイナスで 1)。なので、これがスピンに対する射影演算子です。これを拡張し

$$\frac{1\pm\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{e}}{2}\qquad(\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix})$$

というのを作ります。

$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ 方向を向いているとします。n_3 を $\boldsymbol{e}_3$ の第三成分 $e_3^{(3)}$ とします ($n_3=\boldsymbol{e}_3^{(3)}=1$)。そうすると、ディラック・パウリ表現を使えば

$$i\gamma_1\gamma_2=\Sigma_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{1+\Sigma_3 n_3}{2}&=\frac{1+i\gamma_1\gamma_2 n_3}{2}\\&=\frac{1+\gamma_0\gamma_5\gamma^3 n_3}{2}\qquad(\gamma^5=\gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\ ,\ \gamma^3\gamma_3=1)\\&=\frac{1+\gamma_5\gamma^3\gamma_0 n_3}{2}\\&=\frac{1+\gamma_5\gamma^3 n_3\gamma_0}{2}\\&=\frac{1+\gamma_5\gamma^\mu n_\mu\gamma_0}{2}\end{aligned}$$

最後の行で、$n_\mu=(0,0,0,1)$ として、$(\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)\cdot(0,0,0,1)=\gamma^3 n_3$ としています。

$\gamma_5\gamma^\mu$ は「ガンマ行列〜双線形〜」で見たように軸性ベクトルとして変換されます。しかし、γ_0 はそういう性質を持たないので、このままでは共変な形になっていません。

なので、単純に γ_0 を外して

$$P(n_3)=\frac{1+\gamma_5\gamma^\mu n_\mu}{2}$$

としてみます。これを作用させてみます。

静止している場合を使い、$\omega^r(0)$ は

$$\omega^1(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \omega^2(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \omega^3(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ \omega^4(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とします。これに使えば

$$
\begin{aligned}
P(n_3)\omega^r(0) &= \frac{1+\gamma_5\gamma^\mu n_\mu}{2}\omega^r(0) \\
&= \frac{1}{2}(1+\gamma_5\gamma^\mu n_\mu\gamma^0\gamma^0)\omega^r(0) \\
&= \frac{1}{2}(1+\Sigma_3\gamma^0)\omega^r(0)
\end{aligned}
$$

γ^0 は

$$
\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

なので、

$$
P(n_3)\omega^1(0) = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3\gamma^0)\omega^1(0) = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3)\omega^1(0) = \omega^1(0)
$$

$$
P(n_3)\omega^2(0) = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3\gamma^0)\omega^2(0) = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3)\omega^2(0) = 0
$$

$$
P(n_3)\omega^3(0) = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3\gamma^0)\omega^3(0) = \frac{1}{2}(1-\Sigma_3)\omega^3(0) = 0
$$

$$
P(n_3)\omega^4(0) = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3\gamma^0)\omega^4(0) = \frac{1}{2}(1-\Sigma_3)\omega^4(0) = \omega^4(0)
$$

$\boldsymbol{e}_3$ の向きを反転させた

$$
\overline{\Sigma}(-n_3) = \frac{1-\gamma_5\gamma^\mu n_\mu}{2}
$$

でも、同様に行えば

$$
P(-n_3)\omega^1(0) = \frac{1}{2}(1-\Sigma_3\gamma^0)\omega^1(0) = \frac{1}{2}(1-\Sigma_3)\omega^1(0) = 0
$$

$$
P(-n_3)\omega^2(0) = \frac{1}{2}(1-\Sigma_3)\omega^2(0) = \omega^2(0)
$$

$$
P(-n_3)\omega^3(0) = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3)\omega^3(0) = \omega^3(0)
$$

$$
P(-n_3)\omega^4(0) = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3)\omega^4(0) = 0
$$

$\boldsymbol{e}_3$ の向きを反転させることは上向きが下向きになると言えて、$\omega^1(0)$ を上向きとすれば、$\omega^2(0)$ が下向きとなります。これは「ディラック方程式」でのヘリシティを使った場合と同じです。$\omega^{3,4}(0)$ では、$\omega^3(0)$ では下向き、$\omega^4(0)$ では上向きです。しかし、Σ_3 の符号は反転しています。Σ_3 がスピンの固有値を与えると見れば、$\omega^{1,2}$ のときから

$\omega^{3,4}$ はスピンが反転していると言えます。このことは、空孔理論による負エネルギーから正エネルギーへの励起において、スピンの方向も反転していることに対応します。

射影演算子 P は共変になるように作ったので、ブーストによって静止していない状態にしても成立します。