ローレンツ変換

ローレンツ変換について見ていきます。
最初にローレンツ変換の形式的な話をして、その後に 3 次元回転とブーストの変換を出します。
単位行列を 1 と書いているので、式の構造から行列かどうか判断してください。

ローレンツ変換はミンコフスキー空間の距離を不変にする線形変換です。座標系 (x) から座標系 (x') へのローレンツ変換は線形変換の一般的な形として

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$

と与えられ、ローレンツ変換 $a^\mu{}_\nu$ は座標に依存しない 4×4 行列です (μ が行、ν が列)。微小距離 ds の 2 乗 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= g_{\mu\nu}(dx')^\mu(dx')^\nu \\ &= g_{\alpha\beta}a^\alpha{}_\mu a^\beta{}_\nu dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \tag{1}$$

例えば、x^1 軸方向への速度 v のローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \quad (\beta = \frac{v}{c}\ ,\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{2}$$

なので

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となっています。これはローレンツブーストと呼ばれます。
(1) から

$$g_{\mu\nu} = \ g_{\alpha\beta}a^\alpha{}_\mu a^\beta{}_\nu$$

これにローレンツ変換の逆行列 a^{-1} $(a^{\mu}{}_{\nu}(a^{-1})^{\nu}{}_{\alpha}=\delta^{\mu}_{\alpha})$ を作用させて

$$\begin{aligned}
(a^{-1})^{\nu}{}_{\rho}g_{\mu\nu} &= g_{\alpha\beta}a^{\alpha}{}_{\mu}a^{\beta}{}_{\nu}(a^{-1})^{\nu}{}_{\rho}\\
&= g_{\alpha\beta}a^{\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta}_{\rho}\\
&= g_{\alpha\rho}a^{\alpha}{}_{\mu}\\
(a^{-1})^{\nu}{}_{\rho}g_{\mu\nu}g^{\mu\sigma} &= g_{\alpha\rho}a^{\alpha}{}_{\mu}g^{\mu\sigma}\\
(a^{-1})^{\sigma}{}_{\rho} &= g_{\alpha\rho}g^{\mu\sigma}a^{\alpha}{}_{\mu}
\end{aligned}$$

右辺で添え字の上下の規則が $a^{\mu}{}_{\nu}$ にも使えるとしてしまえば、$g_{\alpha\rho}g^{\mu\sigma}a^{\alpha}{}_{\mu}=a_{\rho}{}^{\sigma}$ なので

$$(a^{-1})^{\sigma}{}_{\rho}=a_{\rho}{}^{\sigma}\ ,\ a^{\mu}{}_{\nu}a_{\alpha}{}^{\nu}=\delta^{\mu}_{\alpha} \tag{4}$$

と書けます。このように $a^{\mu}{}_{\nu}$ も計量による添え字の規則に従わせる表記は一般的によく使われているので、ここでもこれに従うとします (電磁気学の「ミンコフスキー空間」も参照)。この表記では

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= g_{\alpha\beta}a^{\alpha}{}_{\mu}a^{\beta}{}_{\nu}\\
&= a^{\alpha}{}_{\mu}a_{\alpha\nu}\\
\delta^{\alpha}{}_{\mu}g_{\nu\alpha} &= a^{\alpha}{}_{\mu}a_{\alpha}{}^{\nu}g_{\nu\alpha}
\end{aligned}$$

と変形されるので、$a^{\alpha}{}_{\mu}a_{\alpha}{}^{\nu}=\delta^{\alpha}_{\mu}$ となります。また、(1) にこの表記を使うと

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(dx')^{\mu}(dx')^{\nu} &= g_{\alpha\beta}a^{\alpha}{}_{\mu}a^{\beta}{}_{\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\\
(dx')^{\mu}(dx')_{\mu} &= a^{\alpha}{}_{\mu}a_{\alpha}{}^{\nu}dx^{\mu}dx_{\nu}\\
&= \delta^{\nu}_{\mu}dx^{\mu}dx_{\nu} \qquad (a_{\alpha}{}^{\nu}=(a^{-1})^{\nu}{}_{\alpha})\\
&= dx^{\mu}dx_{\mu}
\end{aligned}$$

と変形していけます。他にも、(4) に $a_{\beta}{}^{\alpha}$ をかけるなら

$$a_{\beta}{}^{\alpha}a^{\mu}{}_{\nu}a_{\alpha}{}^{\nu}=a_{\beta}{}^{\alpha}\delta^{\mu}_{\alpha}=a_{\beta}{}^{\mu}\ \Rightarrow\ a^{\mu}{}_{\nu}a_{\alpha}{}^{\nu}=\delta^{\mu}_{\alpha}$$

となります。

　ローレンツ変換は 4 つに分類されます。$a^{\mu}{}_{\nu}$ の行列式は

$$\begin{aligned}
&\det[a^{\mu}{}_{\nu}a_{\mu}{}^{\sigma}]=\ \det\delta^{\sigma}_{\nu}\\
&(\det[a^{\mu}{}_{\nu}])^{2}=1 \qquad (\det[AB]=\det A\det B)
\end{aligned}$$

となっていることから

$$(\det[a^\mu{}_\nu])^2 = 1 \ \Rightarrow\ \det(a^\mu{}_\nu) = \pm 1$$

このとき

$$\det[a^\mu{}_\nu] = +1$$

となる場合を proper なローレンツ変換といいます。これに対して、

$$\det[a^\mu{}_\nu] = -1$$

のときを improper なローレンツ変換と言い、空間や時間の反転のとき –1 になります。日本語だと proper を固有、improper を非固有と言ったりします

さらに分類します。$(a^0{}_0)^2$ は

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{\mu\nu} a^\mu{}_0 a^\nu{}_0 \\ &= g_{00} a^0{}_0 a^0{}_0 + g_{ii} a^i{}_0 a^i{}_0 \end{aligned}$$

$$1 = (a^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (a^i{}_0)^2$$

$$1 + \sum_{i=1}^{3} (a^i{}_0)^2 = (a^0{}_0)^2 \geq 1$$

このため、$a^0{}_0 \geq +1$ か $a^0{}_0 \leq -1$ です。

この区別の意味を見ます。$a^0{}_0 \geq +1$ とします。x^0 から x'^0 への変換は

$$x'^0 = a^0{}_\nu x^\nu = a^0{}_0 x^0 + a^0{}_i x^i$$

$a^0{}_i$ は 3 次元ベクトル v_i と見れるので $v_i x^i = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}$ として、これにベクトルの内積の絶対値の関係

$$|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}| \leq |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{x}|$$

を使います (シュワルツの不等式)。そうすると

$$|a^0{}_i x^i|^2 \leq |\boldsymbol{v}|^2 |\boldsymbol{x}|^2 = ((a^0{}_0)^2 - 1)|\boldsymbol{x}|^2$$

ここで、$x_0>0$ で時間的 $x_0^2>|\boldsymbol{x}|^2$ とすれば

$$(a^0{}_0)^2x_0^2>((a^0{}_0)^2-1)x_0^2>((a^0{}_0)^2-1)|\boldsymbol{x}|^2$$

なので

$$\begin{aligned}|a^0{}_ix^i|&<a^0{}_0x_0\\ 0&<a^0{}_0x_0-|a^0{}_ix^i|\end{aligned}$$

そうすると、$A-|B|$ は $A+B$ と等しいか小さくなるので

$$x'^0=a^0{}_0x^0+a^0{}_ix^i\geq a^0{}_0x^0-|a^0{}_ix^i|>0$$

よって、$a^0{}_0\geq 1$ のとき、$x^0>0$ は変換後も $x'^0>0$ です。つまり、$a^0{}_0\geq 1$ では時間の方向が変わりません。これに対して、$a^0{}_0\leq -1$ では方向が変わります (時間反転の変換はこれに対応)。$a^0{}_0\geq 1$ では orthochronous と呼ばれます。

というわけで、ローレンツ変換は

- $\det[a^\mu{}_\nu]=+1\ ,\ a^0{}_0\geq 1$
- $\det[a^\mu{}_\nu]=+1\ ,\ a^0{}_0\leq 1$
- $\det[a^\mu{}_\nu]=-1\ ,\ a^0{}_0\geq 1$
- $\det[a^\mu{}_\nu]=-1\ ,\ a^0{}_0\leq 1$

と分類されます。ここでは、$\det[a^\mu{}_\nu]=+1,\ a^0{}_0\geq 1$ の場合だけを扱い、ローレンツ変換と言ったときはこれを指します。

無限小ローレンツ変換を考えます。無限小ローレンツ変換は微小な変換なので

$$a^\mu{}_\nu=\delta^\mu_\nu+\Delta\omega^\mu{}_\nu$$

として、微小な $\Delta\omega^\mu{}_\nu$ で書けるとします。変換の式は

$$x'^\mu=a^\mu{}_\nu x^\nu=(\delta^\mu_\nu+\Delta\omega^\mu{}_\nu)x^\nu$$

これを $a^\nu{}_\mu$ の直交関係に入れれば

$$\begin{aligned}\delta^\sigma_\nu=a^\mu{}_\nu a_\mu{}^\sigma=(\delta^\mu_\nu+\Delta\omega^\mu{}_\nu)(\delta^\sigma_\mu+\Delta\omega_\mu{}^\sigma)&\simeq\delta^\mu_\nu\delta^\sigma_\mu+\delta^\mu_\nu\Delta\omega_\mu{}^\sigma+\delta^\sigma_\mu\Delta\omega^\mu{}_\nu\\&=\delta^\sigma_\nu+\Delta\omega_\nu{}^\sigma+\Delta\omega^\sigma{}_\nu\end{aligned}$$

$(\omega^{\nu}{}_{\mu})^2$ の項を無視しています。これから $\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}$ は

$$\Delta\omega_{\nu}{}^{\sigma} = -\Delta\omega^{\sigma}{}_{\nu}$$

となる必要があるので、$\Delta\omega^{\mu}_{\nu}$ は添え字の入れ替えに対して反対称です。添え字の位置を変えた場合では

$$g^{\mu\nu}(\Delta\omega_{\nu}{}^{\sigma} + \Delta\omega^{\sigma}{}_{\nu}) = \Delta\omega^{\mu\sigma} + \Delta\omega^{\sigma\mu}$$

から、$\Delta\omega^{\mu\sigma} = -\Delta\omega^{\sigma\mu}$ となり、反対称です。これから 16 個の $\Delta\omega^{\mu\sigma}$ のうち独立なのは 6 個 $((\mu,\sigma) : (0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1$ と分かり、この 6 個によって変換は決定されます。

ローレンツ変換は 3 次元の回転変換を含んでいることから見ます。3 次元回転なので、x^3 軸まわりで回転させるとすれば、x^1, x^2 が混ざった変換が起きるので、$\Delta\omega^{\mu}_{\nu}$ は

$$\begin{aligned}
x'^0 &= a^0{}_{\nu}x^{\nu} = x^0 \\
x'^1 &= x^1 + \Delta\omega^1{}_{\nu}x^{\nu} = x^1 + \Delta\omega^1{}_2 x^2 = x^1 + \Delta\phi x^2 \\
x'^2 &= x^2 + \Delta\omega^2{}_1 x^1 = x^2 - \Delta\phi x^1 \\
x'^3 &= a^3{}_{\nu}x^{\nu} = x^3
\end{aligned}$$

変換に寄与しているのは $\Delta\omega^1{}_2, \Delta\omega^2{}_1$ だけです (他は 0)。これは添え字を動かせば

$$\Delta\omega^1{}_2 = g_{2\mu}\Delta\omega^{1\mu} = g_{22}\Delta\omega^{12} = -\Delta\omega^{12} = \Delta\omega^{21} = g^{1\mu}\Delta\omega^2{}_{\mu} = -\Delta\omega^2{}_1 = \Delta\phi$$

x^1, x^2 だけの変換として 2×2 行列で書けば

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\phi \\ -\Delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

となり、x^3 軸まわりで x^1x^2 平面を無限小の角度だけ回転させる変換と分かります (2 次元回転変換の行列の $\cos\phi$ と $\sin\phi$ を ϕ が微小とすればこれになる)。これは有限の角度で、$\cos\phi$ と $\sin\phi$ による 2 次元回転変換の行列になります。

有限の角度には、無限小の角度を無限個足し合わせればいいので、無限小の回転変換を無限回作用させます。無限小の回転変換を作用させる回数を N として

$$R^N(\Delta\phi) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta\phi \\ -\Delta\phi & 0 \end{pmatrix} \right)^N$$

N 回で角度が ϕ になるとすれば、$N = \phi/\Delta\phi$ なので

$$
\begin{aligned}
R(\frac{\phi}{N}) &= \Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\phi}{N} \\ -\frac{\phi}{N} & 0 \end{pmatrix} \Big)^N \\
&= \Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\phi}{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Big)^N \\
&= \Big(1 + \frac{\phi}{N} J_3\Big)^N
\end{aligned}
$$

と書けます（1 は単位行列)。この N を無限大の極限にします。そのときの形は

$$
e^x = \lim_{N\to\infty} (1 + \frac{x}{N})^N
$$

での行列の場合なので

$$
\lim_{N\to\infty} R(\frac{\phi}{N}) = R(\phi) = \exp[J_3\phi] \tag{5}
$$

という形で書けます。行列 J_3 を exp の外に出すために展開し、三角関数の展開

$$
\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\ ,\ \cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}
$$

と比較すれば

$$
\begin{aligned}
\exp[J_3\phi] &= 1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\phi + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\phi^2 + \cdots \\
&= 1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\phi - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}\phi^2 - \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\phi^3 + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}\phi^4 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}\phi^2 + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}\phi^4 - \cdots + \Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\phi - \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\phi^3 + \cdots\Big) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 \\ 0 & \cos\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi \\ -\sin\phi & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となって、2 次元回転変換の行列になります。$\sin\phi$ の符号を逆にしたいなら、J_3 の定義を逆にするか $\Delta\phi$ の符号を変えればいいです ((5) での exp 内の符号が反転すればいい)。同様にしていくことで、ローレンツ変換は x^1, x^2, x^3 軸まわりの 3 次元回転を含むことが分かります。また、別の求め方を下の補足で示しています。

2 次元部分の 2×2 行列で出しましたが、4×4 行列にはそのまま書き換えられます。今の変換は $\Delta\omega^1{}_2$ だけが 0 でないので

$$\Delta\omega^1{}_2=(J_3)^1{}_2\Delta\phi=\Delta\phi\ ,\ \Delta\omega^2{}_1=(J_3)^2{}_1\Delta\phi=-\Delta\phi$$

とし、他の成分は 0 として

$$\Delta\omega^\mu{}_\nu=(J_3)^\mu{}_\nu\Delta\phi$$

とすればいいだけです。

x^1 方向へ速度 v で動いている無限小ローレンツ変換を作ります。(2) から $\Delta\omega^\mu{}_\nu$ を

$$\begin{aligned}
&x'^0=a^0{}_\nu x^\nu=(\delta^0_\nu+\Delta\omega^0{}_\nu)x^\nu=x^0+\Delta\omega^0{}_\nu x^\nu=x^0+\Delta\omega^0{}_1x^1\\
&x'^1=x^1+\Delta\omega^1{}_\nu x^\nu=x^1+\Delta\omega^1{}_0x^0\\
&x'^2=x^2\\
&x'^3=x^3
\end{aligned}$$

とし、$\Delta\omega^\mu{}_\nu$ で 0 でないのは $\Delta\omega^0{}_1=\Delta\omega^1{}_0=-\Delta\beta$ だけです。この変換を x^1 方向のブーストと呼んでいきます。計量で添え字の上げ下げによる関係は

$$\Delta\omega^0{}_1=g_{1\mu}\Delta\omega^{0\mu}=g_{11}\Delta\omega^{01}=-\omega^{01}=\Delta\omega^{10}=g^{1\nu}\Delta\omega_\nu{}^0=-\Delta\omega_1{}^0$$

となっています。

$x'^1=0$ として x' 系での原点にいるようにすると $\Delta\beta$ は

$$(x')^1=0\ \Rightarrow\ \Delta\beta=\frac{x^1}{x^0}=\frac{1}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta v}{c}$$

と求まります。そして、$\Delta\beta$ は微小なので $(\Delta\beta)^2=0$ から $\gamma=1$ となり、(3) 対応した結果になります。よって、この無限小ローレンツ変換（x^1 方向のブースト）は x^1 方向への速度 Δv の平行移動を表しています。

無限小の回転変換を有限の回転にしたのと同じ手順で、有限のブーストにします。微小な定数を $\Delta\omega$ として、無限小の $\Delta\omega^\nu{}_\mu$ を

$$\Delta\omega^\mu{}_\nu=(L_1)^\mu{}_\nu\Delta\omega$$

と書きます。x^1 方向へのローレンツ変換であることを表すために L_1 と書いています。ブーストは $\Delta\omega^1{}_0=\Delta\omega^0{}_1=-\Delta\beta$ 以外は 0 なので、クロネッカーデルタによって

$$\Delta\omega^\mu{}_\nu = -\Delta\beta(\delta^\mu_1\delta^0_\nu + \delta^\mu_0\delta^1_\nu)$$

と書けます。これから

$$\delta^\mu_\nu + (L_1)^\mu{}_\nu\Delta\omega = \delta^\mu_\nu - (\delta^\mu_1\delta^0_\nu + \delta^\mu_0\delta^1_\nu)\Delta\beta$$

x^1 方向であることを単に L_1 と書いています (4 次元の添え字との区別に注意)。$(L_1)^\mu{}_\nu$ は行列にすれば

$$(L_1)^\mu{}_\nu = -(\delta^\mu_1\delta^0_\nu + \delta^\mu_0\delta^1_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L_1 の 2 乗は

$$(L_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 乗は

$$(L_1)^3 = (L_1)^2L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_1$$

よって、$L_1^{2n} = L_1^2,\ L_1^{2n+1} = L_1\ (n = 1, 2, \ldots)$ となっています。

無限小変換を無限回行うことで有限変換になるので、N 回作用させたときを ω として

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{N}$$

ローレンツ変換を複数行うことは

$$(x')^\mu = a^\mu{}_\alpha a^\alpha{}_\nu x^\nu\ ,\ (x')^\mu = a^\mu{}_\alpha a^\alpha{}_\beta \cdots x^\rho{}_\nu x^\nu$$

と続いていきます。なので

$$(x')^\mu = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{\omega}{N} L_1\right)^\mu{}_{\alpha_1} \left(1 + \frac{\omega}{N} L_1\right)^{\alpha_1}{}_{\alpha_2} \cdots \left(1 + \frac{\omega}{N} L_1\right)^{\alpha_{N-1}}{}_{\alpha_N} x^{\nu_N}$$

1 は 4×4 単位行列です。これは

$$e^x = \lim_{N\to\infty}(1 + \frac{x}{N})^N$$

を行列にしたものなので

$$(x')^\mu = (\exp[\omega L_1])^\mu{}_\nu x^\nu$$

exp 内に行列がいるので、行列を外に出します。exp を展開して

$$\begin{aligned}
(\exp[\omega L_1])^\mu{}_\nu &= (1 + \omega L_1 + \frac{1}{2}\omega^2 L_1^2 + \frac{1}{3!}\omega^3 L_1^3 + \frac{1}{4!}\omega^4 L_1^4 + \cdots)^\mu{}_\nu \\
&= (1 + (\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{4!}\omega^4 + \cdots)L_1^2 + (\omega + \frac{1}{3!}\omega^3 + \cdots)L_1)^\mu{}_\nu \\
&= (1 - L_1^2 + (1 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{4!}\omega^4 + \cdots)L_1^2 + (\omega + \frac{1}{3!}\omega^3 + \cdots)L_1)^\mu{}_\nu
\end{aligned}$$

双曲線関数の展開

$$\sinh\phi = \sum_{k=0}^\infty \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ,\ \cosh\phi = \sum_{k=0}^\infty \frac{\phi^{2k}}{(2k)!}$$

から

$$(\exp[\omega L_1])^\mu{}_\nu = (1 - L_1^2 + L_1^2\cosh\omega + L_1\sinh(\omega))^\mu{}_\nu$$

なので、N の無限大で

$$x'^\mu = (1 - L_1^2 + L_1^2\cosh\omega + L_1\sinh(\omega))^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

成分ごとに書けば

$$
\begin{aligned}
x'^0 &= x^0\cosh\omega - x^1\sinh\omega = (x^0 - x^1\tanh\omega)\cosh\omega \\
x'^1 &= -x^0\sinh\omega + x^1\cosh\omega = (x^1 - x^0\tanh\omega)\cosh\omega \\
x'^2 &= x^2 \\
x'^3 &= x^3
\end{aligned}
\tag{6}
$$

となり、x^1 方向へ速度 v で動いているローレンツ変換です。この変換行列は 3 次元回転の変換行列と似た形をしています。そして、三角関数と双曲線関数は

$$
\sinh\phi = -i\sin(i\phi)\ ,\ \cosh\phi = \cos(i\phi)
$$

と関係しているので、x^1 方向のローレンツ変換は x^0x^1 平面の虚数角度の回転行列と言えます。

変換行列 $a^\mu{}_\nu$ の添え字を動かせば

$$
a_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha}g^{\nu\beta}a^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \sinh\omega & 0 & 0 \\ \sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

これから $a_\alpha{}^\mu a^\alpha{}_\nu = \delta^\mu_\nu$ を直接確認できます。

β, γ を使った形にも出来ます。無限小変換のとき x^1 方向に速度 Δv で動いていたので、今の場合は速度 $v = x^1/t$ で動いています。そうすると、$x'^1 = 0$ として

$$
\begin{aligned}
0 &= (x^1 - x^0\tanh\omega)\cosh\omega \\
\frac{x^1}{x^0} &= \tanh\omega \\
\frac{v}{c} &= \tanh\omega
\end{aligned}
$$

となり、$\tanh\omega = \beta$ です。これと、cosh の関係

$$
\cosh\omega = \frac{\cosh\omega}{\sqrt{\cosh^2\omega - \sinh^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
$$

$$
1 - \tanh^2\omega = \frac{\cosh^2\omega - \sinh^2\omega}{\cosh^2\omega}\ ,\ \cosh^2\omega - \sinh^2\omega = 1
$$

を使って (6) を書き換えれば、(2) になります。

ここで求めたのは 3 次元回転とブーストです。3 次元回転は x^1, x^2, x^3 軸まわりで作れるので 3 個、ブーストは x^1, x^2, x^3 軸方向で作れるので 3 個あり、合わせて 6 個です。このことから、ローレンツ変換の自由度は 6 と言われます。

また、両方の変換は J_n, L_n をまとめて I_n とすれば

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = (I_n)^{\mu\nu}\Delta\omega$$

として書けます。

・補足

微小な回転変換から有限の回転変換の行列を別の方法で求めます。回転変換は角度を加えていく変換なので、$R(\phi)$ に $R(\Delta\phi)$ を作用させれば

$$R(\Delta\phi)R(\phi) = R(\phi + \Delta\phi)$$

右辺を ϕ 周りで 1 次まで展開し

$$R(\phi + \Delta\phi) \simeq R(\phi) + \frac{dR(\phi)}{d\phi}\Delta\phi$$

左辺は

$$R(\Delta\phi)R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\phi \\ -\Delta\phi & 1 \end{pmatrix} R(\phi) = \begin{pmatrix} R_{11} + R_{21}\Delta\phi & R_{12} + R_{22}\Delta\phi \\ -R_{11}\Delta\phi + R_{21} & -R_{12}\Delta\phi + R_{22} \end{pmatrix}$$

R_{ab} の添え字は行列成分です。これから

$$R(\phi) + \frac{dR(\phi)}{d\phi}\Delta\phi = \begin{pmatrix} R_{11} + R_{21}\Delta\phi & R_{12} + R_{22}\Delta\phi \\ -R_{11}\Delta\phi + R_{21} & -R_{12}\Delta\phi + R_{22} \end{pmatrix}$$

これは微分方程式として

$$\begin{aligned}
R_{11} + \frac{dR_{11}}{d\phi}\Delta\phi &= R_{11} + R_{21}\Delta\phi \;\Rightarrow\; \frac{dR_{11}}{d\phi} = R_{21} \\
R_{12} + \frac{dR_{12}}{d\phi}\Delta\phi &= R_{12} + R_{22}\Delta\phi \;\Rightarrow\; \frac{dR_{12}}{d\phi} = R_{22} \\
R_{21} + \frac{dR_{21}}{d\phi}\Delta\phi &= R_{21} - R_{11}\Delta\phi \;\Rightarrow\; \frac{dR_{21}}{d\phi} = -R_{11} \\
R_{22} + \frac{dR_{22}}{d\phi}\Delta\phi &= R_{22} - R_{12}\Delta\phi \;\Rightarrow\; \frac{dR_{22}}{d\phi} = -R_{12}
\end{aligned}$$

となっています。これの解は三角関数によって

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

ϕ の向きを変えれば上での結果と一致します。