ゴルドン分解

ディラック方程式のカレントを変形します。

　ディラック方程式を 2 つ用意し

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi_1 = 0 \tag{1a}$$

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi_2 = 0 \tag{1b}$$

$\hbar$ と c が煩わしいので消します (自然単位系)。もしくは、$\hbar$ は ∂_μ に c は m に含まれていると思ってください。(1a) に左から $\overline{\psi}_2 a_\nu\gamma^\nu$ をかけて（a_ν は任意）

$$\overline{\psi}_2 a_\nu\gamma^\nu(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi_1 = 0 \tag{2}$$

(1b) では γ^0 を左からかけて、エルミート共役をとって

$$(\gamma^0(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi_2)^\dagger = (-i\partial_\mu\psi_2^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - m\psi_2^\dagger)\gamma^{0\dagger} = (-i\partial_\mu\psi_2^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - m\psi_2^\dagger)\gamma^{0\dagger}$$

ガンマ行列の関係 $\gamma^{\mu\dagger} = -\gamma^\mu,\ \gamma^{0\dagger} = \gamma^0,\ \gamma^\mu\gamma^0 = -\gamma^\mu\gamma^0$ を使うと、(1b) は

$$i\partial_\mu\overline{\psi}_2\gamma^\mu + m\overline{\psi}_2 = 0$$

として、$\overline{\psi}_2$ のディラック方程式になります。さらに右から $a_\nu\gamma^\nu\psi_1$ をかけることで、

$$-ia_\nu(\partial_\mu\overline{\psi}_2)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_1 - ma_\nu\overline{\psi}_2\gamma^\nu\psi_1 = 0$$

これと (2) とを足します。$\gamma^\mu\gamma^\nu$ は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$$

と変形できることと、$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ を使って

$$
\begin{aligned}
0 = & -ia_\nu(\partial_\mu\overline{\psi}_2)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_1 + ia_\nu\overline{\psi}_2\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\mu\psi_1) - 2ma_\nu\overline{\psi}_2\gamma^\nu\psi_1 \\
= & -ia_\nu(\partial_\mu\overline{\psi}_2)(g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})\psi_1 + ia_\nu\overline{\psi}_2(g^{\nu\mu} - i\sigma^{\nu\mu})(\partial_\mu\psi_1) - 2ma_\nu\overline{\psi}_2\gamma^\nu\psi_1 \\
= & -i(\partial_\mu\overline{\psi}_2)(g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})\psi_1 + i\overline{\psi}_2(g^{\nu\mu} - i\sigma^{\nu\mu})(\partial_\mu\psi_1) - 2m\overline{\psi}_2\gamma^\nu\psi_1 \\
\overline{\psi}_2\gamma^\nu\psi_1 = & \frac{i}{2m}(-(\partial_\mu\overline{\psi}_2)(g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})\psi_1 + \overline{\psi}_2(g^{\nu\mu} - i\sigma^{\nu\mu})(\partial_\mu\psi_1)) \\
= & \frac{i}{2m}(-(\partial_\mu\overline{\psi}_2)g^{\mu\nu}\psi_1 + \overline{\psi}_2 g^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi_1) + i(\partial_\mu\overline{\psi}_2)\sigma^{\mu\nu}\psi_1 + i\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi_1) \\
= & \frac{i}{2m}(-(\partial^\nu\overline{\psi}_2)\psi_1 + \overline{\psi}_2(\partial^\nu\psi_1) + i\partial_\mu(\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1)
\end{aligned}
$$

$\hbar$ と c を戻せば

$$
\overline{\psi}_2\gamma^\nu\psi_1 = \frac{i\hbar}{2mc}(\overline{\psi}_2(\partial^\nu\psi_1) - (\partial^\nu\overline{\psi}_2)\psi_1 + i\partial_\mu(\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1))
$$

となります。これをゴルドン分解 (Gordon decomposition) と呼びます。微分演算子を運動量演算子 $\hat{p}^\mu = i\hbar\partial^\mu$ に変えれば

$$
\overline{\psi}_2\gamma^\nu\psi_1 = \frac{1}{2mc}(\overline{\psi}_2\hat{p}^\nu\psi_1 - (\hat{p}^\nu\overline{\psi}_2)\psi_1 + \hat{p}_\mu(\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1))
$$

この関係は QED での散乱計算や、４元カレントの性質を調べる時とかに使われます。