ガンマ行列〜双線形〜

スピノールとガンマ行列の組み合わせによる双線形形式 $\overline{\psi}\Gamma\psi$ に対するローレンツ変換を求めます。
計算をしていくだけなので、最後の結果だけ見ればいいです。
単位行列は 1 としています。

ガンマ行列からは 16 個の独立な 4×4 行列 Γ を定義することができます。それらは

- $\Gamma^S =\ 1$
- $\Gamma^V_\mu =\ \gamma_\mu$
- $\Gamma^T_{\mu\nu} =\ \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu} \quad (\sigma_{\mu\nu} = \dfrac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\ ,\ \mu \neq \nu)$
- $\Gamma^P =\ i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5$
- $\Gamma^A_\mu =\ \gamma_5\gamma_\mu$

Γ^S は 1 個、Γ^V_μ は 4 個 (μ の成分の数)、$\Gamma^T_{\mu\nu}$ は 6 個 (μ,ν の入れ替えで符号が変わるために、$(\mu,\nu) = (0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1$
Γ^P は 1 個、Γ^A_μ は 4 個で合計 16 個になって、これらが可能な全てのものです。Γ の上についている S はスカラー、V はベクトル、T はテンソル、P は擬ベクトル、A は軸性ベクトルを表しています。これは後で示します。

まずは、この 16 個が線形独立であることを確認します。そのために、Γ^n の関係を並べておきます。Γ についている n は S, V, T, P, A を表すとして

(a) $(\Gamma^n)^2 =\ \pm 1$

(a1) $(\Gamma^S)^2 =\ 1$

(a2) $(\Gamma^V_\mu)^2 =\ g_{\mu\mu} =\ \pm 1$

(a3) $(\Gamma^T_{\mu\nu})^2 =\ g_{\mu\mu}g_{\nu\nu} =\ \pm 1 \quad (\mu \neq \nu)$

(a4) $(\Gamma^T_{\mu\nu})^2 =\ 0 \quad (\mu = \nu)$

(a5) $(\Gamma^P)^2 =\ 1$

(a6) $(\Gamma^A_\mu)^2 =\ -g_{\mu\mu} =\ \pm 1$

(b) $\Gamma^n\Gamma^m =\ f^l_{nm}\Gamma^l \quad (n \neq m,\ \Gamma^l \neq \Gamma^S)$

(c) $\Gamma^n\Gamma^m =\ -\Gamma^m\Gamma^n$

(d) $\mathrm{tr}(\Gamma^n) =\ 0$

$g_{\mu\mu}$ のように書いているのは、その成分をさしています (和を取らない)。$(\Gamma^n)^2$ は内積ではないです。(b),(c) は Γ^S を除いた関係です。(d) では $\Gamma^V_\mu\Gamma^V_\nu$ も含み、f^l_{nm} は対応する係数です。(b),(c) は全ての場合を示すのは面倒なので、一部だけ示しています。

16 個の Γ^n が実際に線形独立になっていることを示します。線形独立であるためには

$$\sum_n a_n\Gamma^n = 0 \tag{1}$$

となるのが、$a_n = 0$ のときであることを示せばいいです。

(1) が成立しているとします。(1) に Γ^S 以外の Γ^m をかけてトレースを取ってみると、$n = m$ と $n \neq m$ に分かれて ($\mathrm{tr}[A+B] = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$)

$$\sum_n a_n \mathrm{tr}(\Gamma^n\Gamma^m) = a_m \mathrm{tr}((\Gamma^m)^2) + \sum_{n\neq m} a_n \mathrm{tr}(f^l_{nm}\Gamma^l)$$
$$= a_m \mathrm{tr}((\Gamma^m)^2) + \sum_{n\neq m} a_n f^l_{nm} \mathrm{tr}(\Gamma^l)$$

第 1 項は $(\Gamma^m)^2 = \pm 1$ のトレースになり、第 2 項のトレースは 0 なので

$$\sum_n a_n \mathrm{tr}(\Gamma^n\Gamma^m) = \pm 4a_m$$

(1) から左辺は 0 なので、a_m は 0 です。
　a_S のときは、Γ^S をかけて同様にすれば

$$\sum_n a_n \mathrm{tr}(\Gamma^S\Gamma^n) = a_S \mathrm{tr}(\Gamma^S)^2 + \sum_{n\neq S} a_n \mathrm{tr}(\Gamma^n) = 4a_S$$

となるので、a_S は 0 です。よって、(1) を満たすのは $a_n = 0$ のときなので線形独立です。
　次に、Γ^n を使って双線形 (bilinear)

$$\overline{\psi}(x)\Gamma^n\psi(x)$$

に対するローレンツ変換を求めます。これをカレントと呼んでいきます。Γ^n が γ_μ のときディラック方程式のカレントになっているからです。
　することは「ディラック方程式の共変性」でのスピノールの変換

$$\psi'(x') = S\psi(x)$$

を使って変形していくだけです。「$'$」はローレンツ変換後のものとします。使う S の性質は

$$\gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = S^{-1} \tag{2}$$

- Γ^S
  $\Gamma^S = I$ のとき、$\overline{\psi}'(x')\psi'(x')$ なので

$$\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0\psi'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma^0 S\psi(x)$$
$$= \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger\gamma^0 S\psi(x)$$
$$= \psi^\dagger(x)\gamma^0 S^{-1} S\psi(x)$$
$$= \psi^\dagger(x)\gamma^0\psi(x)$$
$$= \overline{\psi}(x)\psi(x)$$

  よって、$\overline{\psi}(x)\Gamma^S\psi(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x)$ はローレンツ不変なスカラーです。スカラーであることは $\overline{\psi}\psi$ は行列でないので当たり前ですが、次に見るように擬スカラーになる場合があります。

- $\Gamma^p = \gamma_5$

  Γ^p では

$$\overline{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma_0\gamma_5 S\psi(x) = \psi^\dagger(x)\gamma_0\gamma_0 S^\dagger\gamma_0\gamma_5 S\psi(x) = \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma_5 S\psi(x)$$

γ_5 は

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu$$

なので、(2) を使って

$$\begin{aligned}
S^{-1}\gamma^5 S =& -\frac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}S^{-1}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu S \\
=& -\frac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}S^{-1}\gamma^\alpha SS^{-1}\gamma^\beta SS^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu S \\
=& -\frac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_\rho\gamma^\rho a^\beta{}_\lambda\gamma^\lambda a^\mu{}_\sigma\gamma^\sigma a^\nu{}_\eta\gamma^\eta \\
=& -\frac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_\rho a^\beta{}_\lambda a^\mu{}_\sigma a^\nu{}_\eta\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\eta
\end{aligned}$$

$\epsilon_{0123} = -1$ としています。$a^\mu{}_\nu$ の下付きの添え字は、例えば

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_1 a^\beta{}_0 a^\mu{}_2 a^\nu{}_3 = \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu}a^\beta{}_1 a^\alpha{}_0 a^\mu{}_2 a^\nu{}_3 = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_0 a^\beta{}_1 a^\mu{}_2 a^\nu{}_3 \\
&\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_1 a^\beta{}_0 a^\mu{}_3 a^\nu{}_2 = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_0 a^\beta{}_1 a^\mu{}_3 a^\nu{}_2 = +\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_0 a^\beta{}_1 a^\mu{}_2 a^\nu{}_3 \\
&\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_0 a^\beta{}_2 a^\mu{}_1 a^\nu{}_3 = \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}a^\alpha{}_0 a^\mu{}_2 a^\beta{}_1 a^\nu{}_3 = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_0 a^\beta{}_1 a^\mu{}_2 a^\nu{}_3 \\
&\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_i a^\beta{}_i a^\mu{}_2 a^\nu{}_3 = \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu}a^\beta{}_i a^\alpha{}_i a^\mu{}_2 a^\nu{}_3 = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_i a^\beta{}_i a^\mu{}_2 a^\nu{}_3 = 0
\end{aligned}$$

このように、下付きの添え字の入れ替えがレヴィ・チビタ記号に対応しています。そうすると、行列式の定義から (レヴィ・チビタ記号を $\epsilon_{0123} = -1$ としていることに注意)、$a^\mu{}_\nu$ の行列式を $\det[a]$ として

$$\det[a] = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha{}_0 a^\beta{}_1 a^\mu{}_2 a^\nu{}_3$$

と合わせれば

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^{\alpha}{}_{\rho}a^{\beta}{}_{\lambda}a^{\mu}{}_{\sigma}a^{\nu}{}_{\eta}\gamma^{\rho}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma^{\eta}\\
&\quad= \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^{\alpha}{}_{0}a^{\beta}{}_{1}a^{\mu}{}_{2}a^{\nu}{}_{3}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} + \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^{\alpha}{}_{0}a^{\beta}{}_{1}a^{\mu}{}_{3}a^{\nu}{}_{2}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{3}\gamma^{2}\\
&\qquad+ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^{\alpha}{}_{0}a^{\beta}{}_{2}a^{\mu}{}_{1}a^{\nu}{}_{3}\gamma^{0}\gamma^{2}\gamma^{1}\gamma^{3} + \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^{\alpha}{}_{0}a^{\beta}{}_{2}a^{\mu}{}_{3}a^{\nu}{}_{1}\gamma^{0}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{1}\\
&\qquad+ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^{\alpha}{}_{0}a^{\beta}{}_{3}a^{\mu}{}_{1}a^{\nu}{}_{2}\gamma^{0}\gamma^{3}\gamma^{1}\gamma^{2} + \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^{\alpha}{}_{0}a^{\beta}{}_{3}a^{\mu}{}_{2}a^{\nu}{}_{1}\gamma^{0}\gamma^{3}\gamma^{2}\gamma^{1}\\
&\qquad+\cdots\\
&\quad= -\det[a]\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} + \det[a]\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{3}\gamma^{2} + \det[a]\gamma^{0}\gamma^{2}\gamma^{1}\gamma^{3} - \det[a]\gamma^{0}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{1}\\
&\qquad- \det[a]\gamma^{0}\gamma^{3}\gamma^{1}\gamma^{2} + \det[a]\gamma^{0}\gamma^{3}\gamma^{2}\gamma^{1} + \cdots\\
&\quad= -\det[a](\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} - \gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{3}\gamma^{2} - \gamma^{0}\gamma^{2}\gamma^{1}\gamma^{3} + \gamma^{0}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{1}\\
&\qquad+ \gamma^{0}\gamma^{3}\gamma^{1}\gamma^{2} - \gamma^{0}\gamma^{3}\gamma^{2}\gamma^{1} + \cdots)\\
&\quad= \det[a]\epsilon_{\rho\lambda\sigma\eta}\gamma^{\rho}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma^{\eta}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
S^{-1}\gamma^{5}S = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^{\alpha}{}_{\rho}a^{\beta}{}_{\lambda}a^{\mu}{}_{\sigma}a^{\nu}{}_{\eta}\gamma^{\rho}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma^{\eta} &= -\det[a]\frac{i}{4!}\epsilon_{\rho\lambda\sigma\eta}\gamma^{\rho}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma^{\eta}\\
&= \det[a]\gamma^{5} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

から

$$
\overline{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma_5 S\psi(x) = \det[a]\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)
$$

このように、$\det[a]$ がいるために、ローレンツ変換が $\det[a] = +1$ の proper か $\det[a] = -1$ の improper かで符号が変わります。$+1$ ではスカラーとして変換されます。-1 では擬スカラー（空間反転したときに符号が反転するもの）と呼ばれます。

　実際に、空間反転は (improper なローレンツ変換）

$$
P = \gamma^{0}\exp(i\phi)\ ,\ P^{-1} = \gamma^{0}\exp(-i\phi)
$$

と与えられ、これには γ^0 があるため γ^5 との交換関係から

$$
P^{-1}\gamma_5 P\ \Rightarrow\ \gamma^{0}\gamma_5\gamma^{0} = -\gamma_5\gamma^{0}\gamma^{0} = -\gamma_5
$$

となり、符号が反転します。

- $\Gamma^V = \gamma^\nu$
  (2) から

$$\overline{\psi}'(x')\gamma^\nu\psi'(x') = \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma^\nu S\psi(x) = a^\nu{}_\mu\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

  となり、これは 4 元ベクトルのローレンツ変換そのものです。なので、ベクトルです。このため、$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ は 4 元カレントとして扱えます。

- $\Gamma^P = \gamma_5\gamma^\nu$
  (2) と (3) から

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\nu\psi'(x') &= \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma_5\gamma^\nu S\psi(x)\\ &= \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma_5 S a^\nu{}_\mu\gamma^\mu\psi(x)\\ &= \overline{\psi}(x)\det[a]a^\nu{}_\mu\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)\\ &= \det[a]a^\nu{}_\mu\overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)\end{aligned}$$

  $\det[a]$ の符号によって、変換の符号が変わります。$+1$ のときはベクトルとして変換され、-1 のときは擬ベクトル (軸性ベクトル）として変換されます。擬ベクトルは空間反転で符号が変わらないベクトルです。

- $\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}$
  (2) から

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') &= \frac{i}{2}\overline{\psi}(x)S^{-1}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]S\psi(x)\\ &= \frac{i}{2}\overline{\psi}(x)S^{-1}(\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu - \gamma^\nu SS^{-1}\gamma^\mu)S\psi(x)\\ &= \frac{i}{2}\overline{\psi}(x)(a^\mu{}_a\gamma^a a^\nu{}_\beta\gamma^\beta - a^\nu{}_\beta\gamma^\beta a^\mu{}_a\gamma^\alpha)\psi(x)\\ &= \frac{i}{2}\overline{\psi}(x)a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)\psi(x)\\ &= a^\mu{}_\alpha\ a^\nu{}_\beta\ \overline{\psi}(x)[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\psi(x)\\ &= a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta\ \overline{\psi}(x)\sigma^{\alpha\beta}\psi(x)\end{aligned}$$

  これは 2 階テンソルの変換規則です。なので $\sigma^{\mu\nu}$ は 2 階テンソルです。

変換を見てきましたが、こういった規則から素粒子の性質を与えられます。例えば、ディラック方程式のカレントは $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ の構造を持っていますが、弱い相互作用で現れるカレントは

$$\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi$$

となっていて、γ^5 のために空間反転の不変性 (パリティ不変性は) は破られています。

全部の結果をまとめると

	ローレンツ変換	空間反転
スカラー	$\overline{\psi}(x)\psi(x)=\overline{\psi}(x)\psi(x)$	$+1$
擬スカラー	$\overline{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x')=\det\|a\|\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$	-1
ベクトル	$\overline{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x')=a^\mu{}_\nu\overline{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$	$(-1)^\mu$
軸性ベクトル	$\overline{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x')=\det\|a\|a^\mu{}_\nu\overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x)$	$-(-1)^\mu$
２階テンソル	$\overline{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x')=a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta\overline{\psi}(x')\sigma^{\alpha\beta}\psi(x)$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$

$(-1)^\mu$ のようなものは時間成分 $\mu=0$ なら $+1$、空間成分 $\mu=1,2,3$ なら -1 ということを表しています。

最後に (a)〜(d) を示します。(a) は直接確認できます。内積ではないので、$\gamma_\mu\gamma_\mu$ のように書き、和は取らないとします。Γ^S と Γ^V_μ はそのまま

$$(\Gamma^S)^2=1\ ,\ (\Gamma^V_\mu)^2=\gamma_\mu\gamma_\mu=g_{\mu\mu}\quad(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu})$$

$\Gamma^T_{\mu\nu}$ では

$$\begin{aligned}
(\Gamma^T_{\mu\nu})^2=\sigma^2_{\mu\nu}&=(\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu])^2\\
&=-\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)^2\\
&=-\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\\
&=-\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu-\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu)\\
&=-\frac{1}{4}((\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu-\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu)-\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu\\
&\qquad-(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu-\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu)+\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu)\\
&=-\frac{1}{4}(2g_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu-2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu-2g_{\mu\nu}\gamma_\nu\gamma_\mu+2\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu)\\
&=-\frac{1}{4}(2g_{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)-2(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_\nu\gamma_\mu)\\
&=-\frac{1}{4}(2g_{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu-2g_{\mu\nu}+\gamma_\mu\gamma_\nu)-2(\gamma_\mu\gamma_\nu-2g_{\mu\nu}+\gamma_\mu\gamma_\nu)\gamma_\nu\gamma_\mu)\\
&=-\frac{1}{4}(4g_{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu-g_{\mu\nu})-4(\gamma_\mu\gamma_\nu-g_{\mu\nu})\gamma_\nu\gamma_\mu)\\
&=-\frac{1}{4}(4g_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu-4g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}-4\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu+4g_{\mu\nu}\gamma_\nu\gamma_\mu)\\
&=-\frac{1}{4}(8g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}-4g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}-4g_{\mu\mu}g_{\nu\nu})\\
&=-\frac{1}{4}(4g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}-4g_{\mu\mu}g_{\nu\nu})
\end{aligned}$$

$(\Gamma^T_{\mu\nu})^2$ は、$\mu=\nu$ では $\sigma_{\mu\nu}=0$ なので、$\mu=\nu$ と $\mu\neq\nu$ で場合分けされて ($\mu\neq\nu$ では $g_{\mu\nu}=0$)

$$(\Gamma^T_{\mu\nu})^2 = \left(\begin{array}{ccc} g_{\mu\mu}g_{\nu\nu} & \cdots & (\mu \neq \nu) \\ 0 & \cdots & (\mu = \nu) \end{array} \right.$$

Γ^P は

$$\begin{aligned}(\Gamma^P)^2 = \ (\gamma_5)^2 = \ (i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^2 &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ &= \ -(\gamma_1)^2(\gamma_2)^2(\gamma_3)^2 \\ &= \ -g_{11}g_{22}g_{33} = 1\end{aligned}$$

Γ^A_μ は、$(\Gamma^A_\mu)^2 = (\gamma_5\gamma_\mu)^2 = \gamma_5\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\mu = -g_{\mu\mu}$ となります。
(b) は、例えば $\Gamma^V_\mu\Gamma^V_\nu$ では

$$\Gamma^V_\mu\Gamma^V_\nu = \gamma_\mu\gamma_\nu = \frac{\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu}{2} = -i\sigma_{\mu\nu} = -i\Gamma^T_{\mu\nu}$$

他に、$\Gamma^V_\mu\Gamma^T_{\alpha\beta}$ では

$$\Gamma^V_\mu\Gamma^T_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\gamma_\mu(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)$$

これは、$\mu = \beta \neq \alpha$ なら

$$\begin{aligned}\Gamma^V_\mu\Gamma^T_{\alpha\mu} = \frac{i}{2}\gamma_\mu(\gamma_\alpha\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\alpha) &= \frac{i}{2}(\gamma_\mu(2g_{\mu\alpha} - \gamma_\mu\gamma_\alpha) - \gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\alpha) \\ &= \ -\frac{i}{2}(2\gamma_\mu\gamma_\mu)\gamma_\alpha \quad (\mu \neq \alpha) \\ &= \ -ig_{\mu\mu}\gamma_\alpha \\ &= \ -ig_{\mu\mu}\Gamma^V_\alpha\end{aligned}$$

同様に、$\mu = \alpha \neq \beta$ なら

$$\Gamma^V_\mu\Gamma^T_{\alpha\beta} = ig_{\mu\mu}\Gamma^V_\beta$$

$\mu \neq \alpha \neq \beta$ では

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\gamma_\mu(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha) &= \frac{i}{2}\gamma_\mu(\gamma_\alpha\gamma_\beta - (2g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha\gamma_\beta)) \\ &= i\gamma_\mu(\gamma_\alpha\gamma_\beta - g_{\alpha\beta}) \\ &= i\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\end{aligned}$$

$\mu = 0$ なら

$$
\begin{aligned}
&i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_3 = -\gamma_5\gamma_3 == -\Gamma_3^A \\
&i\gamma_0\gamma_2\gamma_1 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = \Gamma_3^A \\
&i\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_2\gamma_3 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_2 = \Gamma_2^A \\
&i\gamma_0\gamma_3\gamma_1 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = -\Gamma_2^A
\end{aligned}
$$

$\mu = 1, 2, 3$ でも同様になり、$\rho \neq \mu, \alpha, \beta$ として

$$
\Gamma_\mu^V \Gamma_{\alpha\beta}^T = \pm \Gamma_\rho^A
$$

となります。

(c) は、例えば T, V では

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^T \Gamma_\mu^V = \sigma_{\mu\nu}\gamma_\mu = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu) &= \frac{i}{2}(-\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu) \\
&= -\frac{i}{2}\gamma_\mu(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \\
&= -\gamma_\mu\sigma_{\mu\nu} \\
&= -\Gamma_\mu^V \Gamma_{\mu\nu}^T
\end{aligned}
$$

として反交換します。

(d) は、(a) の $(\Gamma^m) = \pm 1$ と Γ^S を除いて反交換することから

$$
\pm \Gamma^n = (\Gamma^m)^2 \Gamma^n = -\Gamma^m \Gamma^n \Gamma^m = \Gamma^n (\Gamma^m)^2
$$

これの最右辺と最右辺から 2 番目の等式に対してトレースを取り、トレースの性質 $\mathrm{tr}[AB] = \mathrm{tr}[BA]$ を使えば

$$
\begin{aligned}
&\pm\,\mathrm{tr}\Gamma^n = -\mathrm{tr}[\Gamma^m\Gamma^n\Gamma^m] = -\mathrm{tr}[\Gamma^n(\Gamma^m)^2] \\
&\pm\,\mathrm{tr}\Gamma^n = \mathrm{tr}[\Gamma^n(\Gamma^m)^2]
\end{aligned}
$$

よって、$\pm\mathrm{tr}\Gamma^n = \mp\mathrm{tr}\Gamma^n$ から $\mathrm{tr}\Gamma^n = 0$ です。