ガンマ行列

通常、ディラック方程式と言ったときに使われる形を求めます。
ここで出てくるガンマ行列は必須知識です。

ディラック方程式は 4×4 行列 α_i, β によって

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+i\hbar c\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i}-\beta mc^2)\psi=0$$

ディラック方程式は特殊相対性理論から作られていますが、これは 4 次元的な表記でないために非常に扱いづらいです。なので、4 次元の表記に書き換えます。まず、左から β/c をかけて

$$\begin{aligned}0&=\frac{\beta}{c}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+i\hbar c\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i}-\beta mc^2)\psi\\&=(\beta i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}+i\hbar\sum_{i=1}^{3}\beta\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i}-mc)\psi\end{aligned}$$

ここで α_i と β から新しく

$$\gamma^\mu=(\beta,\beta\alpha_i)=(\gamma^0,\gamma^i)=(\gamma^0,\boldsymbol{\gamma})$$

$$\gamma^0=\beta\ ,\ \gamma^i=\beta\alpha_i\quad(i=1,2,3)$$

と定義します。4×4 行列 $\gamma^\mu=(\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)$ をガンマ行列と呼びます。α_i と γ^μ の添え字の位置がづれてますが、α_i は 3 次元ベクトルで定義しているので添え字の位置は無関係です。また、ガンマ行列 γ^μ は 4 元ベクトルです (「ガンマ行列〜双線形〜」参照)。この γ^μ によってディラック方程式は

$$i\hbar(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0}+\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3})\psi-mc\psi=0$$

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc)\psi=0\qquad(\partial_\mu=(\frac{\partial}{c\partial t},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}))$$

と書け、かなり見通しのいい形になります。一般的にディラック方程式と言ったときは、この形をさすことがほとんどです。ガンマ行列の形は例えばディラック・パウリ表現を用いると γ^μ は ($\gamma^\mu=(\gamma^0,\boldsymbol{\gamma})=(\beta,\beta\boldsymbol{\alpha})$)

$$\gamma^i=\boldsymbol{\gamma}=\beta\alpha_i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\-\sigma_i&0\end{pmatrix}\ ,\ \gamma^0=\beta=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

と与えられます。

$\psi^\dagger\gamma_0$ を $\overline{\psi}$ と書きます。$\overline{\psi}$ は随伴スピノールと呼ばれたりします。$\overline{\psi}$ はいちいち定義を書かずに使われているので、覚えた方が良いです。

カレント (確率の流れ) もガンマ行列で書けます。４次元のカレントを j^μ とし

$$j^\mu = (j^0, j^k) = (c\rho, j^k)$$

ρ と $j^k(k = 1, 2, 3)$ は

$$\rho = \psi^\dagger\psi\ ,\ j^k = c\psi^\dagger\alpha^k\psi = c\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\alpha^k\psi = c\psi^\dagger\gamma^0\gamma^k\psi$$

なので、j^μ はガンマ行列を使えば

$$j^\mu = c\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = c\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

と書けます。「ディラック方程式の共変性」で示すように、$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ は 4 元ベクトルなので、j^μ も 4 元ベクトルです。よって、連続の方程式は

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}j = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial x^k}j^k = \frac{\partial}{\partial x^\mu}j^\mu(x)$$

としてローレンツ不変の形で書けます。j^0(時間成分）から確率の保存は

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\ j^0(x) = 0\ ,\ \frac{\partial}{\partial t'}\int d^3x\ j'^0(x') = 0$$

また、規格化

$$\int d^3x\ \psi^\dagger\psi = 1$$

も不変になります。例えば、静止系から速度 v で動いている系へのローレンツ変換は、ローレンツ収縮

$$d^3x' = d^3x\sqrt{1-\beta^2}$$

と、j^0 のローレンツ変換 (4 元ベクトルの変換) から

$$\psi'^\dagger\psi' = \frac{\psi^\dagger\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

なので、これを規格化の式にいれると

$$\int d^3x\ \psi^\dagger\psi = \int d^3x \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\sqrt{1-\beta^2}\psi'^\dagger\psi' = \int d^3x\ \psi'^\dagger\psi'$$

となり不変です。

よく使われる表記として、任意の 4 元ベクトル A_μ とガンマ行列の内積 $\gamma^\mu A_\mu$ を

$$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu A^\nu = \gamma^0 A^0 - \sum_{i=1}^{3}\gamma^i A^i = \gamma^0 A^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A}$$

として、文字に「/」をいれたもので表わします。微分でも

$$\not{\partial} = \gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^0\frac{\partial}{\partial ct} + \sum_{i=1}^{3}\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\gamma^0}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\cdot\nabla$$

これを使ってディラック方程式を書くと

$$(i\hbar\not{\partial} - mc)\psi = 0$$

$$(\not{\hat{p}} - mc)\psi = 0 \quad (\hat{p}_\mu = i\hbar\partial_\mu)$$

電磁場 A_μ があるなら

$$\begin{aligned}0 &= (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\Phi - c\boldsymbol{\alpha}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{q}{\kappa_b}\boldsymbol{A}) - \beta mc^2)\psi \\ &= (i\hbar\gamma_0\frac{\partial}{c\partial t} - \boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} - \gamma_0\frac{q}{c}\Phi + \frac{q}{\kappa_b}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A} - mc)\psi \\ &= (\gamma_\mu\hat{p}^\mu - \frac{q}{\kappa_b}\gamma_\mu A^\mu - mc)\psi\end{aligned}$$

なので

$$(\not{\hat{p}} - \frac{q}{\kappa_b}\not{A} - mc)\psi = 0$$

q は電荷です。

次にガンマ行列の関係を求めます。結果を先にまとめておくと

- $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$
- $\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

- $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} = \dfrac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$
- $\gamma^0 = \gamma_0$
- $\gamma^{i\dagger} = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i$ （反エルミート性）
- $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$
- $\gamma_0 = \gamma_0^\dagger = (\gamma_0)^{-1},\ \gamma^{i\dagger} = (\gamma^i)^{-1}$ （ユニタリー性）
- $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5,\ (\gamma^5)^2 = 1,\ \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$
- $\gamma^5 = \gamma_5 = -\dfrac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu$
- $[\sigma^{\mu\nu}, \gamma_5] = 0$

$[\ ,]$ は交換関係、$\{\ ,\}$ は反交換関係、$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ $(\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = +1)$ はレヴィチビタ記号です。γ^5 はミンコフスキー空間の添え字ではないので上付き、下付きの区別はありません。

- ガンマ行列の関係

 定義した γ_μ の関係を求めます。まず、γ^i の定義 $\gamma^i = \beta\alpha_i = \gamma^0\alpha_i$ は

$$\alpha_i = \gamma^0\gamma^i \quad (\beta^2 = (\gamma^0)^2 = 1)$$

これを α_i の関係 $\{\alpha_k, \alpha_l\} = \alpha_k\alpha_l + \alpha_l\alpha_k = 2\delta_{kl}$ に入れると

$$\gamma^0\gamma^k\gamma^0\gamma^l + \gamma^0\gamma^l\gamma^0\gamma^k = 2\delta^{kl} \tag{1}$$

という γ^i に対する関係が求まります。

 α_i と β の関係 $\{\alpha_i, \beta\} = 0$ をガンマ行列の式に変えれば

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_k\beta + \beta\alpha_k \\ &= \gamma^0\gamma^k\gamma^0 + (\gamma^0)^2\gamma^k \\ &= \gamma^k\gamma^0 + \gamma^0\gamma^k \end{aligned} \tag{2}$$

このことから、γ^k と γ^0 は反交換の関係と分かります。そうすると、(1) は

$$\gamma^0\gamma^k\gamma^0\gamma^l + \gamma^0\gamma^l\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0\gamma^0\gamma^l - \gamma^l\gamma^0\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k$$

となるので

$$\gamma^k\gamma^l+\gamma^l\gamma^k = -2\delta^{kl} \tag{3}$$

今求められた関係 (1),(2),(3) と $(\gamma^0)^2=1$ は

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$$

として、反交換関係として表せます。一般的には、これがガンマ行列の定義を与えます。この代数構造を持ったものをクリフォード代数 (Clifford algebra) と言います。この代数を満たすガンマ行列は無数に作れます。

ガンマ行列のエルミート共役を取ると

$$(\gamma^i)^\dagger=(\beta\alpha_i)^\dagger=(\alpha_i)^\dagger\beta^\dagger=\alpha_i\beta=-\beta\alpha_i=-\gamma^i$$

なので

$$(\gamma^i)^\dagger=\gamma^0\gamma^i\gamma^0=-\gamma^i$$

エルミート共役で符号が反転するので、γ^i はエルミート行列ではないです。見やすくするために $(\gamma^i)^\dagger$ のように書きましたが、紛らわしくない場合は括弧をはずして $\gamma^{i\dagger}$ のように書いていきます。また、(3) を使うことで

$$(\gamma^i)^2=-I=-\alpha_i^2=-(\beta\alpha_i)(\beta\alpha_i)^\dagger=-\gamma^i\gamma^{i\dagger}\ \Rightarrow\ \gamma^{i\dagger}=(\gamma^i)^{-1}$$

となるので、γ^i はユニタリー行列です。γ^0 は β に対応しているので、β と同様にエルミート行列 $\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$ で、ユニタリーでもあることはすぐにわかります。そうすると、エルミート共役をとったときの関係は

$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

このようにまとめられます。この関係は添え字の位置がずれますが

$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma_\mu$$

とすることもできます。これは $\gamma^{i\dagger}=-\gamma^i$ において $\gamma^i=g^{ij}\gamma_j=-\delta_{ij}\gamma_j=-\gamma_i$ であることから $\gamma^{i\dagger}=\gamma_i$ となることと、$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0=\gamma_0$ からでてきます。

与えられたガンマ行列 γ_μ から違った形のガンマ行列 γ'_μ へはよくある行列変換と同じです。ある行列を V とし、それが逆行列 V^{-1} を持っているとして

$$
\begin{aligned}
V\gamma^\mu\gamma^\nu V^{-1} + V\gamma^\nu\gamma^\mu V^{-1} &= V2g^{\mu\nu}V^{-1} \\
V\gamma^\mu V^{-1}V\gamma^\nu V^{-1} + V\gamma^\nu V^{-1}V\gamma^\mu V^{-1} &= 2g^{\mu\nu}VV^{-1} \\
\gamma'^\mu\gamma'^\nu + \gamma'^\nu\gamma'^\mu &= 2g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

計量はスピノール成分を持たないので V と交換できます。これから変換

$$\gamma'^\mu = V\gamma^\mu V^{-1}$$

によって代数関係は変わらないので、γ'^μ がガンマ行列です。$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ も

$$
\begin{aligned}
V\gamma^{\mu\dagger}V^{-1} &= V\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0V^{-1} \\
(V\gamma^\mu V^{-1})^{-1} &= V\gamma^0V^{-1}V\gamma^\mu V^{-1}V\gamma^0V^{-1} \\
V(\gamma^\mu)^{-1}V^{-1} &= \gamma'^0\gamma'^\mu\gamma'^0 \\
V(\gamma^\mu)^\dagger V^{-1} &= \gamma'^0\gamma'^\mu\gamma'^0 \qquad (\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 = (\gamma^0)^{-1}\ ,\ \gamma^{i\dagger} = (\gamma^i)^{-1}) \\
\gamma'^{\mu\dagger} &= \gamma'^0\gamma'^\mu\gamma'^0
\end{aligned}
$$

となっています。また、ユニタリー行列でないと変換できないマヨラナ行列と呼ばれるガンマ行列の形もあります。

さらに γ^5 というものを定義します。これは

$$
\begin{aligned}
&\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\ ,\ (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5\ ,\ \gamma^5 = \gamma_5\ ,\ (\gamma^5)^2 = 1 \\
&\gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0
\end{aligned}
$$

ディラック・パウリ表現では

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となっています。また

$$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^2\gamma^3\gamma^1 = \cdots$$

として交換できることから、$0, 1, 2, 3$ の並びの組み合わせの個数 $4! = 24$ から

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 - \gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^3 + \gamma^0\gamma^2\gamma^3\gamma^1 + \cdots) = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu$$
$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\frac{i}{4!}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu$$

レヴィ・チビタ記号 $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ は添え字を 1 回入れ替えるごとに符号が反転する記号で

$$\epsilon^{0123} = -\epsilon^{0213} = \epsilon^{0231} = -\epsilon^{0321} = +1$$
$$\epsilon_{0123} = \cdots = -1$$

符号を逆にして $\epsilon^{0123} = -1,\ \epsilon_{0123} = +1$ と定義される場合もあります。