Foldy-Wouthuysen 変換

ディラック方程式のハミルトニアンを対角化するユニタリー変換を求めます。計算を長々としているだけです。
ディラック・パウリ表現としています。
ローマ文字は 1 から 3 として和の規約を使っています。

ここでは

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_i$$

と表記します。
エルミート行列 S から $U=e^{iS}$ とします。U は

$$U^\dagger=e^{-iS^\dagger}=e^{-iS}=U^{-1}$$

となるので、ユニタリー行列です。ディラック方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi\qquad(\hat{H}=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\beta mc^2)$$

ディラック・パウリ表現とします。これを U の変換で

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'=\hat{H}'\psi'\tag{1}$$

としたとき、H' が対角行列になるように U を求めます。運動量演算子より運動量のほうが扱いやすいので

$$\hat{\boldsymbol{x}}=i\hbar\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\ ,\ \hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}\qquad([\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{p}}]=i\hbar\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{p}i\hbar\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{p}i\hbar\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{p}}=i\hbar)$$

として、運動量表示で行います ($\hat{\boldsymbol{p}}$ が平面波に作用しているとするのと同じ)。
(1) は

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{iS}\psi=i\hbar\frac{\partial e^{iS}}{\partial t}\psi+i\hbar e^{iS}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\hbar\frac{\partial S}{\partial t}e^{iS}\psi+i\hbar e^{iS}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\hbar\frac{\partial S}{\partial t}e^{iS}\psi+e^{iS}H\psi$$

なので

$$H'e^{iS}\psi = -\hbar\frac{\partial S}{\partial t}e^{iS}\psi + e^{iS}H\psi$$

$$H'e^{iS}\psi e^{-iS} = -\hbar\frac{\partial S}{\partial t}e^{iS}\psi e^{-iS} + e^{iS}H\psi e^{-iS}$$

$$H' = e^{iS}He^{-iS} - \hbar\frac{\partial S}{\partial t}$$

S は時間独立として、第 2 項は消します。ハウスドルフの公式から

$$e^{iS}He^{-iS} = H + i[S,H] + \frac{i^2}{2!}[S,[S,H]] + \frac{i^3}{3!}[S,[S,[S,H]]] + \cdots$$

ディラック・パウリ表現での H の非対角成分は $\boldsymbol{\alpha}$ が作るので、それを消すようにします。右辺は項が増えていくことから、第 2 項で $\boldsymbol{\alpha}$ を消す構造があると仮定して

$$[S,H] \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \cdots$$

α_i では、$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$, $\{\alpha_i, \beta\} = 0$ から

$$\begin{aligned}
[\alpha_j, \alpha_i p_i + \beta] &= \alpha_j(\alpha_i p_i + \beta) - (\alpha_i p_i + \beta)\alpha_j = \alpha_j\alpha_i p_i + \alpha_j\beta - \alpha_i\alpha_j p_i + \alpha_j\beta \\
&= \alpha_j\alpha_i p_i - (2\delta_{ij} - \alpha_j\alpha_i)p_i + 2\alpha_j\beta \\
&= 2\alpha_j\alpha_i p_i - 2p_j + 2\alpha_j\beta
\end{aligned}$$

β では、$\beta^2 = 1$ から

$$[\beta, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta] = \beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta) - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta)\beta = \beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta) + \beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - \beta) = 2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}$$

これらには α_i だけの項がないので使えないです。$\beta\alpha_i$ としてみると

$$\begin{aligned}
[\beta\alpha_j, \alpha_i p_i + \beta] &= \beta\alpha_j(\alpha_i p_i + \beta) - (\alpha_i p_i + \beta)\beta\alpha_j \\
&= \beta\alpha_j(\alpha_i p_i + \beta) - \beta(-\alpha_i\alpha_j p_i + \beta\alpha_j) \\
&= \beta\alpha_j(\alpha_i p_i + \beta) - \beta(-(2\delta_{ij} - \alpha_j\alpha_i)p_i + \beta\alpha_j) \\
&= \beta\alpha_j\alpha_i p_i + \beta\alpha_j\beta + 2\beta p_j - \beta\alpha_j\alpha_i p_i - \alpha_j \\
&= -2\alpha_j + 2\beta p_j
\end{aligned}$$

α_i だけの項が出てきたので、S は $\beta\alpha_i$ を含んでいるとします。

というわけで、エルミート行列になるように i をつけて S を

$$S=\frac{-i}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega\ ,\ S^\dagger=\frac{i}{2mc}(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^\dagger\omega=\frac{i}{2mc}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\beta\omega=\frac{-i}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega=S$$

と仮定し、H' が対角行列になる ω を求めます。H' は

$$\begin{aligned}H'=e^{iS}He^{-iS}=e^{iS}(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta)e^{-iS}&=e^{iS}\beta(c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2)e^{-iS}\\&=e^{iS}\beta e^{-iS}(c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2)\\&=e^{iS}\beta e^{-iS}\beta(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc^2)\end{aligned}$$

3 行目は S の行列部分は $\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}$ なので、括弧内の第 1 項と交換するからです。e^{-iS} の展開は

$$e^{-iS}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iS)^n}{n!}$$

このとき

$$\begin{aligned}&\beta(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})=-(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\beta\\&\beta(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2=\beta(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})=(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2\beta\\&\beta(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^3=\beta(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})=-(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^3\beta\end{aligned}$$

から

$$\beta(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^n=(-1)^n(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^n\beta$$

となっているので

$$\begin{aligned}\beta e^{-iS}&=\beta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{-1}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{-1}{2mc})^n(-1)^n(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^n\omega^n\beta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega)^n\beta\\&=e^{iS}\beta\end{aligned}$$

$$\beta e^{-iS}\beta=e^{iS}$$

これによって、H' は

$$H' = e^{iS}\beta e^{-iS}\beta(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2) = e^{2iS}(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2)$$

これも展開すると

$$\begin{aligned}
e^{2iS} = \exp[\frac{1}{mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc})^n \\
&= 1 + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc} + \frac{1}{2!}(\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc})^3 + \frac{1}{4!}(\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc})^4 + \cdots
\end{aligned}$$

$(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2$ は

$$\begin{aligned}
\alpha_i\alpha_j p_i p_j &= (2\delta_{ij} - \alpha_j\alpha_i)p_i p_j \\
2\alpha_i\alpha_j p_i p_j &= 2\delta_{ij}p_i p_j \\
\alpha_i\alpha_j p_i p_j &= p_i p_i
\end{aligned}$$

から

$$(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 = \beta\alpha_i p_i\beta\alpha_j p_j = -\alpha_i\alpha_j p_i p_j = -\boldsymbol{p}^2$$

なので

$$\begin{aligned}
e^{2iS} &= 1 + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc} + \frac{1}{2!}(\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc})^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc})^3 + \frac{1}{4!}(\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc})^4 + \cdots \\
&= 1 + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc} - \frac{1}{2!}(\frac{\boldsymbol{p}\omega}{mc})^2 - \frac{1}{3!}(\frac{\boldsymbol{p}\omega}{mc})^2\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc} + \frac{1}{4!}(\frac{\boldsymbol{p}\omega}{mc})^4 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2!}(\frac{\boldsymbol{p}\omega}{mc})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{\boldsymbol{p}\omega}{mc})^4 + \cdots \\
&\quad + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc} - \frac{1}{3!}(\frac{\boldsymbol{p}\omega}{mc})^2\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc} + \cdots
\end{aligned}$$

最後の 2 行目は行列部分を外に出すようにして

$$\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc} - \frac{1}{3!}(\frac{\boldsymbol{p}\omega}{mc})^2\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\omega}{mc} + \cdots = \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc} - \frac{1}{3!}(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc})^3 + \cdots)$$

$\sin, \cos$ の展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \cdots \ , \ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

から

$$e^{2iS} = \cos(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc})$$

これによってハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
H' &= e^{2iS}(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2) \\
&= (\cos(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}))(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2) \\
&= c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\cos(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) + \frac{\beta c(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2}{|\boldsymbol{p}|}\sin(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) + \beta mc^2\cos(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\beta}{|\boldsymbol{p}|}mc^2\sin(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) \\
&= \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}(c|\boldsymbol{p}|\cos(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) - mc^2\sin(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc})) + \beta(mc^2\cos(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) + c|\boldsymbol{p}|\sin(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}))
\end{aligned}$$

対角成分しか持たないハミルトニアンを作りたいので、第１項を消すように ω を選びます。
　消すには

$$c|\boldsymbol{p}|\cos x - mc^2\sin x = c|\boldsymbol{p}|\cos x(1 - \frac{mc}{|\boldsymbol{p}|}\tan x) = 0$$

であればいいので、逆三角関数によって

$$\begin{aligned}
\tan(\frac{|\boldsymbol{p}|}{mc}\omega) &= \frac{|\boldsymbol{p}|}{mc} \\
\omega &= \frac{mc}{|\boldsymbol{p}|}\arctan\frac{|\boldsymbol{p}|}{mc}
\end{aligned}$$

この ω と逆三角関数の関係

$$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x > 0)$$

から

$$\begin{aligned}
&\cos(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) = \cos(\arctan\frac{|\boldsymbol{p}|}{mc}) = \cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2/m^2c^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2/m^2c^2}} \\
&\sin(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) = \frac{|\boldsymbol{p}|}{mc}\frac{1}{\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2/m^2c^2}}
\end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
H' &= \beta(mc^2\cos(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc}) + c|\boldsymbol{p}|\sin(\frac{|\boldsymbol{p}|\omega}{mc})) \\
&= \beta(\frac{mc^2}{\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2/m^2c^2}} + \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{m}\frac{1}{\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2/m^2c^2}}) \\
&= \beta(\frac{m^2c^4}{\sqrt{c^2|\boldsymbol{p}|^2+m^2c^4}} + \frac{c^2|\boldsymbol{p}|^2}{\sqrt{c^2|\boldsymbol{p}|^2+m^2c^4}}) \\
&= \beta E \quad (E = \sqrt{c^2|\boldsymbol{p}|^2+m^2c^4})
\end{aligned}
$$

β は対角成分が $(+1, -1)$ の対角行列なので、H' を対角成分が $\pm E$ の対角行列にできました。e^{2iS} は

$$
\begin{aligned}
e^{2iS} &= \frac{1}{\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2/m^2c^2}} + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\frac{|\boldsymbol{p}|}{mc}\frac{1}{\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2/m^2c^2}} \\
&= \frac{mc}{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2c^2}} + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{mc}\frac{mc}{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2c^2}} \\
&= c\frac{mc+\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{\sqrt{c^2|\boldsymbol{p}|^2+m^2c^4}} \\
&= \frac{mc^2+\beta c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{E}
\end{aligned}
$$

e^{iS} は

$$
\begin{aligned}
e^{2iS} &= \frac{mc^2(E+mc^2)+\beta c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}(E+mc^2)}{E(E+mc^2)} \\
&= \frac{2mc^2E+2m^2c^4+2\beta c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}(E+mc^2)}{2E(E+mc^2)} \\
&= \frac{E^2+2mc^2E+2m^2c^4-E^2+2\beta c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}(E+mc^2)}{2E(E+mc^2)} \\
&= \frac{E^2+2mc^2E+m^2c^4-c^2|\boldsymbol{p}|^2+2\beta c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}(E+mc^2)}{2E(E+mc^2)} \\
&= \frac{(E+mc^2)^2-c^2|\boldsymbol{p}|^2+2\beta c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}(E+mc^2)}{2E(E+mc^2)} \\
&= \frac{((E+mc^2)+\beta c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2E(E+mc^2)}
\end{aligned}
$$

と変形することで

$$
U = e^{iS} = \frac{E+mc^2+c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{\sqrt{2E(E+mc^2)}}\ ,\ U^{-1} = e^{-iS} = \frac{E+mc^2-c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{\sqrt{2E(E+mc^2)}}
$$

この U による変換を Foldy-Wouthuysen 変換と言い、ハミルトニアンを対角行列にします。演算子に戻せば

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{\beta(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2) + E}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} = \frac{\beta\hat{H} + E}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} \\
U^{-1} &= \frac{-c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + mc^2 + E}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} = \frac{c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\beta + mc^2 + E}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} = \frac{\hat{H}\beta + E}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} \qquad (E = \sqrt{\hat{\boldsymbol{p}}^2 + m^2c^4})
\end{aligned}
$$

確認のために UHU^{-1} を計算します。H^2 は

$$
H^2 = (c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2)^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\beta mc^3 + \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}mc^3 = E^2 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\beta mc^3 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\beta mc^3 = E^2
$$

なので

$$
\begin{aligned}
H' = UHU^{-1} &= \frac{\beta H + E}{\sqrt{2E\lambda}} H \frac{H\beta + E}{\sqrt{2E\lambda}} \qquad (\lambda = E + mc^2) \\
&= \frac{1}{2E\lambda}(\beta H^3\beta + \beta H^2 E + EH^2\beta + EHE) \\
&= \frac{1}{2E\lambda}(\beta E^2 H\beta + \beta E^3 + E^3\beta + E^2 H) \\
&= \frac{E}{2\lambda}(\beta H\beta + 2\beta E + H) \\
&= \frac{E}{2\lambda}(\beta(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2)\beta + 2\beta E + c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2) \\
&= \frac{E}{2\lambda}(-c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2 + 2\beta E + c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2) \\
&= \frac{E}{E+mc^2}\beta(mc^2 + E) \\
&= \beta E
\end{aligned}
$$

となり、対角化されているのが確かめられます。

ついでの話として、zitterbewegung に触れておきます。まず、正負のエネルギー状態を取り出す演算子を作ります。H' の対角成分は $(+E, -E)$ なので、ψ' から正負のエネルギー状態 $\psi'_\pm$ を取り出す射影演算子 $P'_\pm$ は β から

$$
\begin{aligned}
&\psi'_\pm = P'_\pm\psi' \qquad (H'\psi'_\pm = \pm E\psi'_\pm) \\
&P'_+ = \frac{1}{2}(1+\beta)\ ,\ P'_- = \frac{1}{2}(1-\beta)
\end{aligned}
$$

と与えられます。変換前の $P_\pm$ は逆変換すれば求まり

$$
U^{-1}P'_\pm U = \frac{1}{2}U^{-1}(1\pm\beta)U = \frac{1}{2}(1 \pm U^{-1}\beta U)
$$

β 部分は

$$
\begin{aligned}
\beta H\beta =& -c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2 \\
&= 2\beta mc^2 - (c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2) \\
&= 2\beta mc^2 - H \\
H\beta H =& 2mc^2 H - \beta H^2
\end{aligned}
$$

を使って

$$
\begin{aligned}
U^{-1}\beta U &= \frac{H\beta + E}{\sqrt{2E\lambda}}\beta\frac{\beta H + E}{\sqrt{2E\lambda}} \\
&= \frac{1}{2E\lambda}(H\beta + E)(H + \beta E) \\
&= \frac{1}{2E\lambda}(H\beta H + HE + EH + \beta E^2) \\
&= \frac{1}{2E(E + mc^2)}(2mc^2 H - \beta H^2 + 2HE + \beta E^2) \\
&= \frac{H}{E}
\end{aligned} \tag{2}
$$

となるので

$$
P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{H}{E}) = \frac{1}{2}(1 \pm \Lambda) \quad (\Lambda^2 = 1)
$$

ハミルトニアンは $\pm E$ を固有値に持つので、Λ はエネルギーの符号を取り出します。

$P_\pm$ で演算子 $\hat{O}$ を変換すると

$$
\begin{aligned}
P_+\hat{O}P_+ &= \frac{1}{4}(1 + \Lambda)(\hat{O} + \hat{O}\Lambda) = \frac{1}{4}(\hat{O} + \hat{O}\Lambda + \Lambda\hat{O} + \Lambda\hat{O}\Lambda) \\
P_-\hat{O}P_- &= \frac{1}{4}(1 - \Lambda)(\hat{O} - \hat{O}\Lambda) = \frac{1}{4}(\hat{O} - \hat{O}\Lambda - \Lambda\hat{O} + \Lambda\hat{O}\Lambda) \\
P_-\hat{O}P_+ &= \frac{1}{4}(1 - \Lambda)(\hat{O} + \hat{O}\Lambda) = \frac{1}{4}(\hat{O} + \hat{O}\Lambda - \Lambda\hat{O} - \Lambda\hat{O}\Lambda) \\
P_+\hat{O}P_- &= \frac{1}{4}(1 + \Lambda)(\hat{O} - \hat{O}\Lambda) = \frac{1}{4}(\hat{O} - \hat{O}\Lambda + \Lambda\hat{O} - \Lambda\hat{O}\Lambda)
\end{aligned}
$$

これらから

$$
\begin{aligned}
&\hat{O}=[\hat{O}]+\{\hat{O}\}\\
&[\hat{O}]=P_+\hat{O}P_++P_-\hat{O}P_-=\frac{1}{2}(\hat{O}+\Lambda\hat{O}\Lambda)=\frac{1}{2}(\hat{O}+\Lambda(\hat{O}\Lambda)+\hat{O})=\frac{1}{2}(2\hat{O}+\Lambda(\hat{O}\Lambda))\\
&\{\hat{O}\}=P_-\hat{O}P_++P_+\hat{O}P_-=\frac{1}{2}(\hat{O}-\Lambda\hat{O}\Lambda)=-\frac{1}{2}\Lambda(\hat{O}\Lambda)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

演算子なので作用する対象があるとして変形しています。$[\hat{O}]$ は $P_\pm$ が分離した形ですが、$\{\hat{O}\}$ では混ざる形なので正負の状態を入れ替えます。実際に

$$
[\hat{O}]\psi_\pm=\phi_\pm\ ,\ \{\hat{O}\}\psi_\pm=\phi_\mp
$$

とすると

$$
\begin{aligned}
&\Lambda\hat{O}\Lambda\psi_+=\Lambda\hat{O}\psi_+=\Lambda[\hat{O}]\psi_++\Lambda\{\hat{O}\}\psi_+=\phi_+-\phi_-=[\hat{O}]\psi_+-\{\hat{O}\}\psi_+\\
&\Lambda\hat{O}\Lambda\psi_-=-\Lambda\hat{O}\psi_-=-\Lambda[\hat{O}]\psi_--\Lambda\{\hat{O}\}\psi_-=\phi_--\phi_+=[\hat{O}]\psi_--\{\hat{O}\}\psi_-
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\hat{O}\psi_++\Lambda\hat{O}\Lambda\psi_+&=[\hat{O}]\psi_++\{\hat{O}\}\psi_++[\hat{O}]\psi_+-\{\hat{O}\}\psi_+\\
2[\hat{O}]\psi_+&=\hat{O}\psi_++\Lambda\hat{O}\Lambda\psi_+\\
[\hat{O}]&=\frac{1}{2}(\hat{O}+\Lambda\hat{O}\Lambda)
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\hat{O}\psi_-+\Lambda\hat{O}\Lambda\psi_-&=[\hat{O}]\psi_-+\{\hat{O}\}\psi_--[\hat{O}]\psi_-+\{\hat{O}\}\psi_-\\
\{\hat{O}\}&=\frac{1}{2}(\hat{O}-\Lambda\hat{O}\Lambda)
\end{aligned}
$$

となり、(3) と同じになります。

　$\hat{O}$ を位置演算子とします。今は位置演算子は運動量の微分なので

$$
\frac{1}{2}(2\hat{\boldsymbol{x}}+\Lambda(\hat{\boldsymbol{x}}\Lambda))=\frac{1}{2}(2\hat{\boldsymbol{x}}+i\hbar\Lambda\frac{\partial\Lambda}{\partial\boldsymbol{p}})
$$

Λ の微分は

$$
\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}}-\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc}{(\boldsymbol{p}^2+m^2c^2)^{3/2}}\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}}-\Lambda\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}
$$

左から Λ を作用させて

$$\Lambda\frac{\partial\Lambda}{\partial\boldsymbol{p}}=\frac{\Lambda\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}}-\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}=\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc)\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}-\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}=\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}+\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}mc}{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}$$

となるので

$$\Lambda(\hat{\boldsymbol{x}}\Lambda)=\frac{i\hbar c^2}{c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4}((\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc)\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{p})=\frac{i\hbar c}{E^2}(H\boldsymbol{\alpha}-c\boldsymbol{p})=-\frac{i\hbar cH}{E^2}(\frac{c\boldsymbol{p}}{H}-\boldsymbol{\alpha})=-\frac{i\hbar cH}{E^2}\boldsymbol{F}\tag{4}$$

これによって

$$[\hat{\boldsymbol{x}}]=P_+\hat{\boldsymbol{x}}P_++P_-\hat{\boldsymbol{x}}P_-=\frac{1}{2}(2\hat{\boldsymbol{x}}+\Lambda(\hat{\boldsymbol{x}}\Lambda))=\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{i\hbar cH}{2E^2}\boldsymbol{F}$$

$$\{\hat{\boldsymbol{x}}\}=P_-\hat{\boldsymbol{x}}P_++P_+\hat{\boldsymbol{x}}P_-=-\frac{1}{2}\Lambda(\hat{\boldsymbol{x}}\Lambda)=\frac{i\hbar cH}{2E^2}\boldsymbol{F}$$

$[\hat{\boldsymbol{x}}(t)]$ としてハイゼンベルク方程式に入れると

$$\frac{d[\hat{\boldsymbol{x}}(t)]}{dt}=\frac{i}{\hbar}[H,[\hat{\boldsymbol{x}}(t)]]=\frac{i}{\hbar}[H,\hat{\boldsymbol{x}}(t)]+\frac{cH}{2E^2}[H,\boldsymbol{F}(t)]=c\boldsymbol{\alpha}(t)+\frac{cH}{2E^2}[H,\boldsymbol{F}(t)]$$

「ディラック方程式」で求めてるように $\boldsymbol{F}(t)=e^{2iHt/\hbar}\boldsymbol{F}$ なので、第 2 項は

$$\frac{cH}{2E^2}[H,\boldsymbol{F}(t)]=\frac{cH}{2E^2}[H,e^{2iHt/\hbar}\boldsymbol{F}]=\frac{cH}{2E^2}e^{2iHt/\hbar}(H\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}H)=\frac{cH^2}{E^2}e^{2iHt/\hbar}\boldsymbol{F}=c\boldsymbol{F}(t)$$

よって

$$\frac{d[\hat{\boldsymbol{x}}(t)]}{dt}=\frac{c^2\boldsymbol{p}}{H}-c\boldsymbol{F}(t)+c\boldsymbol{F}(t)=\frac{c^2\boldsymbol{p}}{H}$$

これは古典的な相対論での速度そのもので、振動項がありません。一方で、$\{\boldsymbol{x}\}$ は

$$\frac{d\{\hat{\boldsymbol{x}}(t)\}}{dt}=-\frac{cH}{2E^2}[H,\boldsymbol{F}(t)]=c\boldsymbol{F}(t)$$

なので

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}(t)}{dt}=[\hat{\boldsymbol{x}}(t)]+\{\hat{\boldsymbol{x}}(t)\}=c\boldsymbol{\alpha}(t)$$

このように、正負のエネルギー状態が混ざると zitterbewegung が起きます。言い換えれば、負エネルギーの寄与によって起きています。

ちなみに、(4) で

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}-\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{p} & 0\\ 0 & (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{p}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{c}$ を成分を取り出すベクトルとして (第 1 成分を取り出すなら $\boldsymbol{c}=(1,0,0)$)

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{c})-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}=i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{c})=i\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p})$$

$\boldsymbol{c}$ は成分を取り出すだけなので

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$$

として

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{p}=i(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p})$$

これを使えば

$$\Lambda(\hat{\boldsymbol{x}}\Lambda)=\frac{i\hbar c^2}{E^2}((\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{\alpha}mc)=\frac{i\hbar c^2}{E^2}(i(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p})+\beta\boldsymbol{\alpha}mc)$$

となるので

$$[\hat{\boldsymbol{x}}]=\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{i\hbar c^2}{2E^2}(i(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p})+\beta\boldsymbol{\alpha}mc)$$

$$\{\hat{\boldsymbol{x}}\}=-\frac{i\hbar c^2}{2E^2}(i(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p})+\beta\boldsymbol{\alpha}mc)$$

と書けます。

同じように速度が振動項を含まない位置演算子を $\hat{\boldsymbol{x}}$ の逆変換から作れます。逆変換なので

$$\hat{\boldsymbol{X}}=U^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}U=\hat{\boldsymbol{x}}+i\hbar U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{p}}$$

これはニュートン・ウィグナー (Newton-Wigner) の位置演算子と呼ばれます。位置演算子と言えるのは

$$[\hat{X}_i, \hat{p}_j] = [U^{-1}\hat{x}_i U, \hat{p}_j] = U^{-1}[\hat{x}_i, \hat{p}_j]U = i\hbar\delta_{ij}$$
$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = [U^{-1}\hat{x}_i U, U^{-1}\hat{x}_j U] = U^{-1}[\hat{x}_i, \hat{x}_j]U = 0$$

となっているからです。H でのハイゼンベルク方程式に入れると

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{X}}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \hat{\boldsymbol{X}}(t)] = \frac{i}{\hbar}e^{-iHt/\hbar}[H, \hat{\boldsymbol{X}}]e^{iHt/\hbar}$$

交換関係は (2) を使って

$$\begin{aligned}[H, \hat{\boldsymbol{X}}] = [U^{-1}H'U, U^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}U] = U^{-1}[\beta E, \hat{\boldsymbol{x}}]U &= U^{-1}\beta(E\hat{\boldsymbol{x}} - (\hat{\boldsymbol{x}}E) - E\hat{\boldsymbol{x}})U \\ &= -U^{-1}\beta U U^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}EU \\ &= -i\hbar\frac{H}{E^2}c^2\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{X}}(t)}{dt} = \frac{H}{E^2}c^2\boldsymbol{p} = \frac{c^2\boldsymbol{p}}{H} \tag{5}$$

となり、古典的な速度に対応します。

$\hat{\boldsymbol{X}}$ は U の微分をすれば求まります。微分は

$$\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}(c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4)^{1/2} = \frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}$$
$$\frac{\partial}{\partial E}\frac{1}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} = -\frac{2E+mc^2}{(2E(E+mc^2))^{3/2}}$$

から

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{2E\lambda}} = \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial}{\partial E}\frac{1}{(2E(E+mc^2))^{1/2}} = -\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}\frac{2E+mc^2}{(2E(E+mc^2))^{3/2}}$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}U &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{E+mc^2+c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{\sqrt{2E\lambda}}\\ &= \frac{c^2\boldsymbol{p}/E+c\beta\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{2E\lambda}}-\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}(E+mc^2+c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\frac{2E+mc^2}{(2E\lambda)^{3/2}}\\ &= \frac{c^2\boldsymbol{p}/E+c\beta\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{2E\lambda}}-U\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}\frac{2E+mc^2}{2E\lambda}\\ U^{-1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}U &= \frac{(E+mc^2-c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})(c^2\boldsymbol{p}/E+c\beta\boldsymbol{\alpha})}{2E\lambda}-\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}\frac{2E+mc^2}{2E\lambda} \qquad (6)\end{aligned}$$

右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}&(E+mc^2-c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})(\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}+c\beta\boldsymbol{\alpha})\\ &= (E+mc^2)(\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}+c\beta\boldsymbol{\alpha})-c\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}(\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}+c\beta\boldsymbol{\alpha})\\ &= (E+mc^2)(\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}+c\beta\boldsymbol{\alpha})-c^3\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{p}}{E}-c^2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\beta\boldsymbol{\alpha}\\ &= (2E+mc^2)\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}-E\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}+c(E+mc^2)\beta\boldsymbol{\alpha}-\frac{c^3}{E}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}+c^2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

これの第 1 項は (6) の第 2 項で消え、残りは

$$\begin{aligned}&c^2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}-c^2\boldsymbol{p}+c\lambda\beta\boldsymbol{\alpha}-\frac{c^3}{E}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\\ &= c^2((\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{p})+c\lambda\beta\boldsymbol{\alpha}-\frac{c^3}{E}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\\ &= ic^2(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p})+c\lambda\beta\boldsymbol{\alpha}-\frac{c^3}{E}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

よって

$$U^{-1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}U = \frac{1}{2E\lambda}(ic^2(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p})+c\lambda\beta\boldsymbol{\alpha}-\frac{c^3}{E}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p})$$

となり

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \hat{\boldsymbol{x}}-\frac{\hbar c^2(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p})}{2E(E+mc^2)}+\frac{i\hbar}{2E}\beta(c\boldsymbol{\alpha}-\frac{c^3(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{E(E+mc^2)})$$

これから $[H,\hat{\boldsymbol{X}}]$ を計算しても (5) は求まるので、ついでにそれを見ます。
交換関係は

$$[H,\hat{\boldsymbol{X}}]=[c^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc^2,\hat{\boldsymbol{X}}]=c^2p_i[\alpha_i,\hat{\boldsymbol{X}}]+mc^2[\beta,\hat{\boldsymbol{X}}]$$

$\hat{\boldsymbol{X}}$ は

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{X}}&=\hat{\boldsymbol{x}}+i\hbar(\frac{i(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p})}{2E(E+mc^2)}+\frac{c\beta\boldsymbol{\alpha}}{2E}-\frac{1}{E}\frac{c^3(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{2E(E+mc^2)})\\&=\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{i\hbar}{2E\lambda}((\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{p}+c\lambda\beta\boldsymbol{\alpha}-\frac{c^3}{E}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p})\\&=\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{i\hbar}{2E\lambda}\boldsymbol{Y}\end{aligned}$$

として

$$Y_j=c^2(\alpha_ip_i\alpha_j-p_j)+C\beta\alpha_j-D_{ij}\beta\alpha_i$$

α_i,β の交換関係

$$\begin{aligned}&[\alpha_i\alpha_j,\alpha_k]=\alpha_i\alpha_j\alpha_k-(2\delta_{ik}-\alpha_i\alpha_k)\alpha_j=\alpha_i\alpha_j\alpha_k-2\delta_{ik}\alpha_j+\alpha_i(2\delta_{kj}-\alpha_j\alpha_k)=-2\delta_{ik}\alpha_j+2\delta_{kj}\alpha_i\\&[\beta\alpha_j,\alpha_k]=\beta\alpha_j\alpha_k-\alpha_k\beta\alpha_j=\beta(\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j)=2\beta\delta_{jk}\\&[\alpha_i\alpha_j,\beta]=\alpha_i\alpha_j\beta-\beta\alpha_i\alpha_j=0\\&[\beta\alpha_j,\beta]=\beta\alpha_j\beta-\beta\beta\alpha_j=-\alpha_j-\alpha_j=-2\alpha_i\end{aligned}$$

を使っていくと、α_k とは

$$\begin{aligned}[Y_j,\alpha_k]&=c^2[\alpha_ip_i\alpha_j-p_j,\alpha_k]+C_1[\beta\alpha_j,\alpha_k]-D_{ij}[\beta\alpha_i,\alpha_k]\\&=c^2p_i[\alpha_i\alpha_j,\alpha_k]+C[\beta\alpha_j,\alpha_k]-D_{ij}[\beta\alpha_i,\alpha_k]\\&=c^2p_i(-2\delta_{ik}\alpha_j+2\delta_{kj}\alpha_i)+2C\beta\delta_{jk}-2D_{ij}\beta\delta_{ik}\\&=c^2(-2p_k\alpha_j+2\delta_{kj}p_i\alpha_i)+2C\beta\delta_{jk}-2D_{kj}\beta\end{aligned}$$

β とは

$$[Y_j,\beta]=c^2[\alpha_ip_i\alpha_j-p_j,\beta]+C[\beta\alpha_j,\beta]-D_{ij}[\beta\alpha_i,\beta]=-2C\alpha_j+2D_{ij}\alpha_i$$

合わせれば

$$
\begin{aligned}
&cp_k[Y_j,\alpha_k]+mc^2[Y_j,\beta]\\
&=c^3(-2\boldsymbol{p}^2\alpha_j+2p_j\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})+2cCp_j\beta-2cD_{kj}p_k\beta-2mc^2C\alpha_j+2mc^2D_{ij}\alpha_i\\
&=-2c^3\boldsymbol{p}^2\alpha_j+2c^3p_j\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+2cCp_j\beta-2\frac{c^4}{E}\boldsymbol{p}^2p_j\beta-2mc^2C\alpha_j+2mc^2\frac{c^3}{E}p_j\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\\
&=2(-c^3\boldsymbol{p}^2-mc^2C)\alpha_j+2(mc^2\frac{c^3}{E}p_j+c^3p_j)\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+2(cCp_j-\frac{c^4}{E}\boldsymbol{p}^2p_j)\beta\\
&=2(-c^3\boldsymbol{p}^2-mc^3(E+mc^2))\alpha_j+2c^3(\frac{mc^2}{E}+1)p_j\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+2(c^2(E+mc^2)-\frac{c^4}{E}\boldsymbol{p}^2)p_j\beta\\
&=2c(-c^2\boldsymbol{p}^2-m^2c^4-mc^2E)\alpha_j+2c^3\frac{E+mc^2}{E}p_j\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{2c^2}{E}(E^2+mc^2E-c^2\boldsymbol{p}^2)p_j\beta\\
&=-2c(E^2+mc^2E)\alpha_j+\frac{2c^3p_j}{E}(E+mc^2)\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{2c^2p_j}{E}(m^2c^4+mc^2E)\beta\\
&=\lambda(-2cE\alpha_j+\frac{2c^3p_j}{E}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{2mc^4p_j}{E}\beta)\\
&=\lambda(-2cE\alpha_j+\frac{2}{E}c^2p_j(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta))\\
&=-2\lambda(cE\alpha_j-\frac{H}{E}c^2p_j)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
[H,\hat{X}_j]&=[H,\hat{x}_j]+\frac{i\hbar}{2E\lambda}(c^2p_i[\alpha_i,Y_J]+mc^2[\beta c^2,Y_J])\\
&=-i\hbar c\alpha_j+\frac{i\hbar}{E}(cE\alpha_j-\frac{H}{E}c^2p_j)\\
&=-i\hbar\frac{H}{E^2}c^2p_j
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{d\hat{\boldsymbol{X}}(t)}{dt}=\frac{i}{\hbar}[H,\hat{\boldsymbol{X}}(t)]=\frac{i}{\hbar}e^{-iHt/\hbar}[H,\hat{\boldsymbol{X}}]e^{iHt/\hbar}=\frac{H}{E^2}c^2p_j
$$

となります。