ディラック方程式の解〜別解〜

ディラック方程式の解を「ディラック方程式」とは別の方法で求めます。
静止しているときのディラック方程式の解にローレンツ変換を行い、任意の速度 v で運動している解を作ります。
後半でスピノール成分の関係を出しています。よく使われる関係なので解の導出は飛ばして、そっちを見るだけでいいです。

静止している解を

$$\psi^r(x) = \omega^r(\boldsymbol{p}=0)\exp[-\frac{i}{\hbar}\epsilon_r mc^2 t] \quad (r=1,2,3,4) \tag{1}$$

とします。$r=1,2$ で $\epsilon_r=+1$、$r=3,4$ で $\epsilon_r=-1$ とし、$\omega^r(0)$ は

$$\omega^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,\ \omega^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,\ \omega^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,\ \omega^4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

としています。$r=1,2$ が正エネルギー、$r=3,4$ が負エネルギーです。
静止系 $(\boldsymbol{x},t)$ に対して $-\boldsymbol{v}$ で動く座標系 $(\boldsymbol{x}',t')$ をとります。$(\boldsymbol{x}',t')$ から見れば、$(\boldsymbol{x},t)$ で静止している粒子は速度 $\boldsymbol{v}$ で動いています。この 2 つの座標系はローレンツ変換で繋がっているので、ローレンツ変換を $a^\mu{}_\nu$ として、位置と運動量の変換を

$$\begin{aligned} x'^\mu &= a^\mu{}_\nu x^\nu \\ p'^\mu &= a^\mu{}_\nu p^\nu \quad (p^\mu = (mc,0,0,0)) \end{aligned}$$

とします。$p_\mu x^\mu = mc^2 t$ はローレンツ変換すれば $p'_\mu x'^\mu$ になるので、(1) の exp 部分は

$$\exp[-\frac{i}{\hbar}\epsilon_r mc^2 t] = \exp[-\frac{i}{\hbar}\epsilon_r p_\mu x^\mu] = \exp[-\frac{i}{\hbar}\epsilon_r p'_\mu x'^\mu]$$

と変換されます（$\boldsymbol{p}=0$）。後は $\omega(0)$ の変換が分かればいいです。
添え字がごちゃごちゃしそうなので、x^1,x^2,x^3 を x,y,z とします。「ディラック場〜共変性〜」で求めたブーストに対する変換 S を用いて $\omega(0)$ を変換します。スピノールの変換は

$$\psi'(x') = S\psi(x)$$

x 方向への速度 v_x によるブーストのとき S は

$$S = \exp[-\frac{i}{2}\phi\sigma_{01}] \quad (\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\ ,\ \tanh\phi = \frac{v_x}{c} = \beta)$$

ただし、今の座標系の設定のために速度にマイナスをつけて

$$-\beta = -\frac{v_x}{c} = \tanh\phi \tag{3}$$

とします。このときの x^0, x の変換は

$$x'^0 = \cosh(\phi)(x^0 - x\tanh(\phi)) = \frac{x^0 + \frac{v_x}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \cosh(\phi)(x - x^0\tanh(\phi)) = \frac{x + \frac{v_x}{c}x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

σ_{01} は、$\gamma^1 = \gamma^0\alpha_1$ から

$$\sigma_{01} = \frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_1 - \gamma_1\gamma_0) = i\gamma_0\gamma_1 = ig_{0\mu}g_{1\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = -i\gamma^0\gamma^1 = -i\gamma^0\gamma^0\alpha_1 = -i\alpha_1$$

これと

$$(\alpha_1)^{2n} = 1\ ,\ (\alpha_1)^{2n+1} = \alpha_1$$

から、S は

$$\begin{aligned}
S &= \exp[-\frac{i\phi}{2}\sigma_{01}] \\
&= \exp[-\frac{\phi}{2}\alpha_1] \\
&= (1 + \frac{-\phi}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2!}(\frac{-\phi}{2}\alpha_1)^2 + ...) \\
&= (1 + \frac{1}{2!}(\frac{\phi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{\phi}{2})^4\cdots)I - (\frac{\phi}{2} + \frac{1}{3!}(\frac{\phi}{2})^3 + \cdots)\alpha_1 \\
&= \cosh\frac{\phi}{2} - \alpha_1\sinh\frac{\phi}{2}
\end{aligned}$$

1 は 4×4 単位行列です。これを $\omega^r(0)$ に作用させます。
　x 軸方向のブーストなので、変換後は $\omega^r(p_x)$ となって ($\omega^r(0)$ は $\omega^r(p_x)$ の p_x が 0 のときなので、変換前後で同じ ω^r を使います)

$$\begin{aligned}
\omega^r(p_x) &= S\omega^r(0) \\
&= \exp[-i\frac{\phi}{2}\sigma_{01}]\omega^r(0) \\
&= (\cosh\frac{\phi}{2} - \alpha_1\sinh\frac{\phi}{2})\omega^r(0) \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\frac{\phi}{2} & 0 & 0 & -\sinh\frac{\phi}{2} \\ 0 & \cosh\frac{\phi}{2} & -\sinh\frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & -\sinh\frac{\phi}{2} & \cosh\frac{\phi}{2} & 0 \\ -\sinh\frac{\phi}{2} & 0 & 0 & \cosh\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}\omega^r(0) \\
&= \cosh\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tanh\frac{\phi}{2} \\ 0 & 1 & -\tanh\frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & -\tanh\frac{\phi}{2} & 1 & 0 \\ -\tanh\frac{\phi}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\omega^r(0)
\end{aligned} \tag{4}$$

$\omega^r(0)$ は単位行列なので 1,2,3,4 列目がそれぞれ $\omega^r(p_x)$ の解になって

$$
\omega^1(p_x) = \cosh\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\tanh\frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \ , \ \omega^2(p_x) = \cosh\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tanh\frac{\phi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\omega^3(p_x) = \cosh\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\tanh\frac{\phi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \omega^4(p_x) = \cosh\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} -\tanh\frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

cosh と tanh のままではどんな量なのか分からないので、(3) を使って書き換えます。
　双曲線関数の関係

$$
\sinh(\theta)\cosh(\theta) = \frac{1}{2}\sinh(2\theta) \ , \ \cosh(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\theta}}
$$

$$
(\cosh(\theta))^2 = \frac{1}{2}(\cosh(2\theta)+1) \ , \ (\sinh(\theta))^2 = \frac{1}{2}(\cosh(2\theta)-1)
$$

を組み合わせると、$\tanh(\theta)$ の関係

$$
\tanh(\theta) = \frac{2\sinh(\theta)\cosh(\theta)}{2(\cosh(\theta))^2} = \frac{\sinh(2\theta)}{\cosh(2\theta)+1} = \frac{\tanh(2\theta)}{1+\frac{1}{\cosh(2\theta)}} = \frac{\tanh(2\theta)}{1+\sqrt{1-\tanh^2(2\theta)}}
$$

が求められます。これと (3) から

$$
\begin{aligned}
-\tanh(\frac{\phi}{2}) &= \frac{-\tanh(\phi)}{1+\sqrt{1-\tanh^2(\phi)}} \\
&= \frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \\
&= \frac{\beta(mc^2/\sqrt{1-\beta^2})}{(1+\sqrt{1-\beta^2})(mc^2/\sqrt{1-\beta^2})} \\
&= \frac{mcv_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{(1+\sqrt{1-\beta^2})E} \\
&= \frac{p'_x c}{E+mc^2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

E と p'_x は

$$
E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \ p'_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}}
$$

これは $(mc,0,0,0)$ を x 軸方向へ $-v_x$ でローレンツ変換したものです。このとき

$$p_0'^2 - p_x'^2 = \frac{E^2}{c^2} - p_x'^2 = \frac{m^2c^2(1-\beta^2)}{1-\beta^2} = m^2c^2$$

なので、$E^2 = c^2p_x'^2 + m^2c^4$ です。
　同様に、$\cosh(\phi/2)$ では

$$\begin{aligned}
\cosh\frac{\phi}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi/(1+\sqrt{1-\tanh^2\phi})^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2/(1+\sqrt{1-\beta^2})^2}} \\
&= \frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{(1+\sqrt{1-\beta^2})^2-\beta^2}} \\
&= \frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+2\sqrt{1-\beta^2}+(1-\beta^2)-\beta^2}} \\
&= \frac{1+\sqrt{1-\beta_x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}-\beta^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{1+(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}}}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{mc^2+mc^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}}}\sqrt{mc^2} \\
&= \frac{mc^2+E}{\sqrt{2mc^2}\sqrt{mc^2+E}} \\
&= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}
\end{aligned}$$

(5),(**??**) を (4) にいれて

$$\omega^r(p_x) = \sqrt{\tfrac{E+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{p_xc}{E+mc^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{p_xc}{E+mc^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{p_xc}{E+mc^2} & 1 & 0 \\ \dfrac{p_xc}{E+mc^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\omega^r(0)$$

1,2,3,4 列目は、「ディラック方程式」での $\omega_\pm$ の p_x 以外を 0 としたものと同じです。なので、x 軸方向に運動している場合の解として同じものが求められました。
　今度は、座標系 $(\boldsymbol{x}', t')$ は x 軸方向だけでなく、任意方向へ 3 次元速度 $\boldsymbol{v}$ で動いてるとします。それぞれの速度を

$$\boldsymbol{v} = v(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \qquad (v = |\boldsymbol{v}|) \tag{6}$$

と与えることにします。なので、速度の方向は

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

として、座標軸からの角度となります (例えば、x 軸方向は $\alpha = 0,\ \beta = \gamma = \pi/2$)。

「ローレンツ変換」から微妙に記号を変えるので、対応させやすいように 3 次元方向のブーストを作ることから始めます。ブーストは

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = x^{\mu} + \Delta\phi^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = x^{\mu} + (L_n)^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\Delta\phi$$

「ローレンツ変換」で見たように x 軸方向に Δv_x で動いているとき、$\Delta\phi^0{}_1 = -\Delta\phi$ ($\Delta\phi = \Delta v_x/c$) だけが 0 でなかったのと同様に、$y$ 軸方向では $\Delta\phi^0{}_2$、z 軸方向では $\Delta\phi^0{}_3$ だけが 0 でないです。なので、$\Delta\phi^0{}_i = \Delta\phi^i{}_0$ ($i = 1, 2, 3$) から、各方向が同じ速度 Δv ($\Delta\phi$) で動いているとして

$$\Delta\phi^{\nu}{}_{\mu} = (L_n)^{\mu}{}_{\nu}\Delta\phi = \Delta\phi \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

しかし、同じ速度で動いている必要はないので、(6) から各軸方向の速度を

$$\Delta v_x = \Delta v\cos\alpha\ ,\ \Delta v_y = \Delta v\cos\beta\ ,\ \Delta v_z = \Delta v\cos\gamma$$

として

$$\Delta\phi^{\nu}{}_{\mu} = (L_n)^{\mu}{}_{\nu}\Delta\phi = \Delta\phi \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha & -\cos\beta & -\cos\gamma \\ -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

このとき x^{μ} の各成分の変換は

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 - x\Delta\phi\cos\alpha - y\Delta\phi\cos\beta - z\Delta\phi\cos\gamma \\ x' &= x - x^0\Delta\phi\cos\alpha \\ y' &= y - x^0\Delta\phi\cos\beta \\ z' &= z - x^0\Delta\phi\cos\gamma \end{aligned}$$

となります。

ブーストに対するスピノールの変換は

$$S = \lim_{N\to\infty}(1 - \frac{i}{4}\frac{\phi}{N}\sigma_{\mu\nu}(L_n)^{\mu\nu})^N = \exp[-\frac{i}{4}\phi\sigma_{\mu\nu}(L_n)^{\mu\nu}]$$

(7) を使えば

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mu\nu}(I_n)^{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu}(I_n)^{\mu}{}_{\alpha}g^{\alpha\nu} \\
&= -(\sigma_{01}(I_n)^0{}_1+\sigma_{02}(I_n)^0{}_2+\sigma_{03}(I_n)^0{}_3-\sigma_{10}(I_n)^1{}_0-\sigma_{20}(I_n)^2{}_0-\sigma_{30}(I_n)^3{}_0) \\
&= -2(\sigma_{01}(I_n)^0{}_1+\sigma_{02}(I_n)^0{}_2+\sigma_{03}(I_n)^0{}_3) \quad (\sigma_{\mu\nu}=-\sigma_{\nu\mu}) \\
&= 2(\sigma_{01}\cos\alpha+\sigma_{02}\cos\beta+\sigma_{03}\cos\gamma)
\end{aligned} \tag{8}
$$

σ_{0i} $(i=1,2,3)$ は

$$
\sigma_{0i}=\frac{i}{2}[\gamma_0,\gamma_i]=\frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_i-\gamma_i\gamma_0)=\frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_i+\gamma_0\gamma_i)=i\gamma_0\gamma_i
$$

$\gamma^k=\gamma_0\alpha_k$ に書きかえるなら

$$
\sigma_{0i}=i\gamma_0\gamma_i=i\gamma^0\gamma^\mu g_{\mu i}=i\gamma^0\gamma^j g_{ji}=i\gamma^0\gamma^0\alpha_j g_{ji}=-i\gamma^0\gamma^0\alpha_j\delta_{ji}=-i\alpha_i
$$

α_k は 3 次元ベクトルなので添え字の位置は無関係です。
$\sigma_{0i}=-i\alpha_i$ と 3 次元速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向

$$
n_i=\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)
$$

を (8) に使えば

$$
\sigma_{\mu\nu}(I_n)^{\mu\nu}=2i\gamma_0\gamma_i n_i=-2i\alpha_i\frac{v_i}{|\boldsymbol{v}|}=-2i\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}
$$

これを (**??**) に入れれば

$$
S=\exp[\frac{\phi}{2}\gamma_0\gamma_i n_i]=\exp[-\frac{\phi}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}]
$$

行列を外に出すために exp を展開します。$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ と後のために $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v})^2$ を計算しておきます。
$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} &= \alpha_1\frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|}+\alpha_2\frac{v_y}{|\boldsymbol{v}|}+\alpha_3\frac{v_z}{|\boldsymbol{v}|}=\alpha_1\frac{mv_x}{m|\boldsymbol{v}|}+\alpha_2\frac{mv_y}{m|\boldsymbol{v}|}+\alpha_3\frac{mv_z}{m|\boldsymbol{v}|} \\
&= \alpha_1\frac{p_x}{|\boldsymbol{p}|}+\alpha_2\frac{p_y}{|\boldsymbol{p}|}+\alpha_3\frac{p_z}{|\boldsymbol{p}|}
\end{aligned}
$$

$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v})^2$ は

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v})^2 = \alpha_i v_i \alpha_j v_j &= \gamma^0\gamma^i\gamma^0\gamma^j v_i v_j \\
&= -\gamma^i\gamma^j v_i v_j \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^j v_i v_j + \gamma^k\gamma^l v_k v_l) \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^j v_i v_j + \gamma^i\gamma^j v_i v_j) \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^j + \gamma^i\gamma^j) v_i v_j \\
&= -\frac{1}{2}(2g^{ij} v_i v_j) \\
&= \boldsymbol{v}^2
\end{aligned} \tag{9}$$

$-\gamma^i\gamma^j v_i v_j = \boldsymbol{v}^2$ は覚えておくと便利です ($\gamma^\mu\gamma^\nu p_\mu p_\nu = p^2$ の 3 次元版)。
α_i はディラック・パウリ表現で

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので、これらを使うことで

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_z & p_x - ip_y \\ 0 & 0 & p_x + ip_y & -p_z \\ p_z & p_x - ip_y & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

S の exp 部分を展開して、(9) を使うと、双曲線関数の展開から

$$\begin{aligned}
\exp[-\frac{\phi}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}] &= 1 - \frac{\phi}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} + \frac{1}{2!}(\frac{\phi}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|})^2 - \frac{1}{3!}(\frac{\phi}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|})^3 + \cdots \\
&= (1 + \frac{1}{2!}(\frac{\phi}{2}\frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|})^2 + \cdots) - \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}(\frac{1}{1!}\frac{\phi}{2} + \frac{1}{3!}\frac{\phi^3}{8}\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{|\boldsymbol{v}|^2} + \cdots) \\
&= \cosh(\frac{\phi}{2}) - \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\sinh(\frac{\phi}{2})
\end{aligned}$$

x 軸方向にのみ動かしたときの結果から、$E = c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2c^2}$ として

$$\cosh(\frac{\phi}{2}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} = A \ , \ \tanh(\frac{\phi}{2}) = \frac{-c|\boldsymbol{p}|}{E + mc^2}$$

$p_\pm = p_x \pm ip_y$ と書くことにして、(10) によって S は

$$
\begin{aligned}
S &= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} - \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\frac{-c|\boldsymbol{p}|}{E+mc^2}\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \\
&= A\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & \frac{cp_-}{E+mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{cp_+}{E+mc^2} & \frac{-cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} & \frac{cp_-}{E+mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{cp_+}{E+mc^2} & \frac{-cp_z}{E+mc^2} & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これを静止状態のスピノール $\omega^r(0)$ に作用させれば $\omega^r(\boldsymbol{p})$ になります。
　よって、$p^\mu = (E/c, \boldsymbol{p})$ として $(E > 0)$

$$
\psi^1(x) = A\omega^1(\boldsymbol{p})\exp[-\epsilon_1\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu] = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_3}{E+mc^2} \\ \frac{cp_+}{E+mc^2} \end{pmatrix}\exp[-\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] \tag{11a}
$$

$$
\psi^2(x) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{cp_-}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_3}{E+mc^2} \end{pmatrix}\exp[-\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] \tag{11b}
$$

$$
\psi^3(x) = A\begin{pmatrix} \frac{cp_3}{E+mc^2} \\ \frac{cp_+}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\exp[+\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] \tag{11c}
$$

$$
\psi^4(x) = A\begin{pmatrix} \frac{cp_-}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_3}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\exp[+\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] \tag{11d}
$$

となります。これは「ディラック方程式」で求めたものと一致します。ただし、「ディラック方程式」では exp 部分を

$$
\psi^{1,2}(x) \sim \omega^{1,2}(\boldsymbol{p})\exp[-\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] \tag{12a}
$$

$$
\psi^{3,4}(x) \sim \omega^{3,4}(\boldsymbol{p})\exp[\frac{i}{\hbar}(Et+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] \tag{12b}
$$

としているので、$\omega^{3,4}$ では $\boldsymbol{p}$ の符号を反転させることで一致します。これは (11a)〜(11d) の exp 内は $p_\mu x^\mu$ ($p_0 = E/c > 0$) とローレンツ不変な形なのに対して、(12b) ではそうなっていないです。このため、実際の解の形としては (11c),(11d) を採用します。
　(11a),(11b) は正のエネルギー、運動量を持った粒子の解、(11c),(11d) は負のエネルギー、運動量を持った粒子の解です。これはハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ と運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ の固有値が

$$
\hat{H}\exp[\pm\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp[\pm\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] = \mp E\exp[\pm\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})]
$$

$$
\hat{\boldsymbol{p}}\exp[\pm\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] = -i\hbar\nabla\exp[\pm\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] = \mp\boldsymbol{p}\exp[\pm\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})]
$$

となっているからです。空孔理論から (11c),(11d) が反粒子を記述します。
　規格化を行います。規格化は

$$\int d^3x\psi_q^{s\dagger}(x)\psi_p^r(x)=\delta^{rs}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{13}$$

とします。$r=s$ で 4 元運動量を同じとき 1 と定義すれば、もっと単純に求められますが、典型的な計算例になるので、これを使います。
　そうすると、$\psi^r(x)$ と $\psi^{s\dagger}(x)$ では 4 元運動量が異なっているとして

$$\begin{aligned}\int d^3x\psi_q^{s\dagger}(x)\psi_p^r(x)=&\int d^3x\omega^{s\dagger}(\boldsymbol{q})\omega^r(\boldsymbol{p})\exp[\frac{i}{\hbar}(\epsilon_sq_\mu x^\mu-\epsilon_rp_\mu x^\mu)]\\&=\omega^{s\dagger}(\boldsymbol{q})\omega^r(\boldsymbol{p})\exp[\frac{i}{\hbar}(\epsilon_sq_0x_0-\epsilon_rp_0x_0)]\int d^3x\exp[-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_s\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}-\epsilon_r\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})]\\&=\omega^{s\dagger}(\boldsymbol{q})\omega^r(\boldsymbol{p})\exp[\frac{i}{\hbar}(\epsilon_sq_0x_0-\epsilon_rp_0x_0)](2\pi)^3\delta^3(\frac{\epsilon_r\boldsymbol{p}-\epsilon_s\boldsymbol{q}}{\hbar})\end{aligned}$$

最後はデルタ関数の性質

$$\delta(a-b)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\ e^{i\alpha(a-b)}$$

からです。また

$$\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=\delta(p_1-q_1)\delta(p_2-q_2)\delta(p_3-q_3)$$

と表記しています。
　$\delta^3(0)$ のときに 0 でないので、$\epsilon_s\boldsymbol{q}=\epsilon_r\boldsymbol{p}$ のときに値を持ちます。p_0,q_0 は

$$p_0=E_{\boldsymbol{p}}=c\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}\ ,\ q_0=E_{\boldsymbol{q}}=c\sqrt{\boldsymbol{q}^2+m^2c^2}$$

と与えられているので、$\epsilon_s\boldsymbol{q}=\epsilon_r\boldsymbol{p}$ のとき $p_0=q_0$ です。このため、$\delta^3(0)$ なら

$$\exp[\frac{i}{\hbar}(\epsilon_sq_0x_0-\epsilon_rp_0x_0)]=1$$

なので、

$$\exp[\frac{i}{\hbar}(\epsilon_sq_0x_0-\epsilon_rp_0x_0)](2\pi)^3\delta^3(\frac{\epsilon_r\boldsymbol{p}-\epsilon_s\boldsymbol{q}}{\hbar})=(2\pi)^3\delta^3(\frac{\epsilon_r\boldsymbol{p}-\epsilon_s\boldsymbol{q}}{\hbar})$$

としても意味は変わりません。よって

$$1=\int d^3x\psi_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}(x)\psi_{\boldsymbol{p}}^r(x)=\ \omega^{s\dagger}(\boldsymbol{q})\omega^r(\boldsymbol{p})(2\pi)^3\delta^3(\frac{\epsilon_r\boldsymbol{p}-\epsilon_s\boldsymbol{q}}{\hbar})$$

残っている $\omega^{s\dagger}(\boldsymbol{q})\omega^r(\boldsymbol{p})$ を求めます。
　今はデルタ関数のために

$$\boldsymbol{q} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_s}\boldsymbol{p}$$

なので

$$\omega^{s\dagger}(\epsilon_{rs}\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p}) \quad (\epsilon_{rs} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_s})$$

とします。$r = s = 1$ のとき $\epsilon_{rs} = 1$ で、(11a) から

$$\begin{aligned}
\omega^{1\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^1(\boldsymbol{p}) &= A^2(1 + \frac{c^2p_3^2}{(E+mc^2)^2} + \frac{c^2|p_-|^2}{(E+mc^2)^2}) \\
&= A^2(1 + \frac{c^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}{(E+mc^2)^2}) \\
&= A^2(\frac{(E+mc^2)^2}{(E+mc^2)^2} + \frac{c^2\boldsymbol{p}^2}{(E+mc^2)^2}) \\
&= \frac{(E+mc^2)^2 + E^2 - m^2c^4}{(E+mc^2)^2}A^2 \\
&= \frac{2E}{E+mc^2}A^2 \\
&= \frac{E}{mc^2}
\end{aligned}$$

$r = s = 3$ では

$$\omega^{3\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^3(\boldsymbol{p}) = A^2(\frac{c^2p_3^2 + c^2|p_+|^2}{(E+mc^2)^2} + 1) = A^2(1 + \frac{c^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}{(E+mc^2)^2}) = \frac{E}{mc^2}$$

$r = 1, s = 2$ では $\epsilon_{rs} = 1$ で $(p_-^* = p_+)$

$$\omega^{2\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^1(\boldsymbol{p}) = A^2\frac{c^2p_+p_3 - c^2p_+p_3}{(E+mc^2)^2} = 0$$

$r = 1, s = 3$ では $\epsilon_{rs} = -1$ で

$$\omega^{3\dagger}(-\boldsymbol{p})\omega^1(\boldsymbol{p}) = A^2\frac{-cp_3 + cp_3}{(E+mc^2)^2} = 0$$

他の場合も同様にしていくことで、$r = s$ では

$$\omega^{1\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^1(\boldsymbol{p}) = \omega^{2\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^2(\boldsymbol{p}) = \omega^{3\dagger}(-\boldsymbol{p})\omega^3(-\boldsymbol{p}) = \omega^{4\dagger}(-\boldsymbol{p})\omega^4(-\boldsymbol{p}) = \frac{E}{mc^2}$$

$r \neq s$ では

$$\omega^{2\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^1(\boldsymbol{p}) = \omega^{3\dagger}(-\boldsymbol{p})\omega^1(\boldsymbol{p}) = \cdots == 0$$

となるので、

$$\omega^{s\dagger}(\epsilon_{rs}\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p}) = \frac{E}{mc^2}\delta_{rs}$$

と書けて。これは ω^r の直交性で、$r=s$ のとき以外 0 で、E が $\boldsymbol{p}$ の符号に依存していないことから、ϵ_{rs} を省いて

$$\omega^{s\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p}) = \frac{E}{mc^2}\delta_{rs}$$

としたり、

$$\omega^{s\dagger}(\epsilon_s\boldsymbol{p})\omega^r(\epsilon_r\boldsymbol{p}) = \frac{E}{mc^2}\delta_{rs}$$

とすることも出来ます。
　そうすると

$$\omega^{s\dagger}(\epsilon_{rs}\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p})(2\pi)^3\delta^3(\frac{\epsilon_r\boldsymbol{p}-\epsilon_s\boldsymbol{q}}{\hbar}) = (2\pi)^3\frac{E}{mc^2}\delta_{rs}\delta^3(\frac{\epsilon_r\boldsymbol{p}-\epsilon_s\boldsymbol{q}}{\hbar})$$

このため、$r=s$ のときに値を持つので、デルタ関数内は $\epsilon_s=\epsilon_r$ として

$$\delta^3(\epsilon_r\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{\hbar}) = \frac{\hbar^3}{|\epsilon_r^3|}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = \hbar^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$$

となり

$$1 = \int d^3x\psi_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}(x)\psi_{\boldsymbol{p}}^r(x) = (2\pi\hbar)^3\frac{E}{mc^2}\delta_{rs}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$$

そうすると

$$\int d^3x\psi_q^{s\dagger}(x)\psi_p^r(x) = (2\pi\hbar)^3\frac{E}{mc^2}\delta_{rs}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{mc^2}{E}\int d^3x\psi_q^{s\dagger}(x)\psi_p^r(x) = \delta_{rs}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$$

から、$\psi^r(x)$ を

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\psi^r(x)$$

と定義しなおすことで

$$\psi^r(x) = N\omega^r(\boldsymbol{p})\exp[-\frac{i}{\hbar}\epsilon_r(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})]$$

として、N は

$$N = A\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}$$

となります。

途中で求めたように $\omega^{s\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p})$ は 1 になっていないです。しかし、$\overline{\omega}^s(\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p})$ では

$$\overline{\omega}^s(\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p}) = \omega^{s\dagger}(\boldsymbol{p})\gamma_0\omega^r(\boldsymbol{p}) = \epsilon_s\delta_{rs}$$

となります。右辺で s は和を取らないです。$\omega^{s\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p})$ と同様の計算をしていけば確かめられます (面倒なので省きます)。

そして、

$$\sum_{r=1}^{4}\epsilon_r\omega_a^r(\boldsymbol{p})\overline{\omega}_b^r(\boldsymbol{p}) = \delta_{ab}$$

となっています。ω_a^r の a はスピノール成分です $(a = 1, 2, 3, 4)$。これは $r = 1$ から 4 で和を取っていますが、$r = 1, 2$ だけで和と取った場合と、$r = 3, 4$ だけで和を取った場合も重要です。それを示しておきます。

から、I_2 を 2×2 単位行列として

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{2}\omega^r\overline{\omega}^r = \omega^r\gamma_0\omega^{r\dagger} &= \frac{E+mc^2}{2mc^2}\begin{pmatrix} I_2 & -\dfrac{c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{E+mc^2} \\ \dfrac{c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{E+mc^2} & -(\dfrac{c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{E+mc^2})^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{E+mc^2}{2mc^2} & -\dfrac{c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{2mc^2} \\ \dfrac{c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{2mc^2} & -\dfrac{c^2\boldsymbol{p}^2}{2mc^2(E+mc^2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{E+mc^2}{2mc^2} & -\dfrac{c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{2mc^2} \\ \dfrac{c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{2mc^2} & -\dfrac{E-mc^2}{2mc^2} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2mc^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) \\ c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) & 0 \end{pmatrix} + \frac{E}{2mc^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{mc^2}{2mc^2}I_2 \\
&= -\frac{1}{2mc^2}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot c\boldsymbol{p} + \frac{E}{2mc^2}\beta + mc^2 \\
&= \frac{c\gamma_0 p_0 - c\gamma_i p^i + mc^2}{2mc^2} \qquad (p_0 = E/c) \\
&= \frac{p_\mu\gamma^\mu + mc}{2mc}
\end{aligned}$$

同様に

$$\sum_{r=3}^{4}\omega^r\overline{\omega}^r = \frac{p_\mu\gamma^\mu - mc}{2mc}$$

と求まります。この二つを足せば単位行列になります。

求めた $\omega^r(\boldsymbol{p})$ の関係をまとめると

$$
\begin{aligned}
&\omega^{s\dagger}(\epsilon_s \boldsymbol{p})\omega^r(\epsilon_r \boldsymbol{p}) = \frac{E}{mc^2}\delta_{rs} \\
&\overline{\omega}^s(\boldsymbol{p})\omega^r(\boldsymbol{p}) = \epsilon_s \delta_{rs} \\
&\sum_{r=1}^{2}\omega^r\overline{\omega}^r = \frac{p_\mu\gamma^\mu + mc}{2mc}\ ,\ \sum_{r=3}^{4}\omega^r\overline{\omega}^r = \frac{p_\mu\gamma^\mu - mc}{2mc}
\end{aligned}
$$

となっています。この関係は今の規格化に依存していることに注意してください。