

## ディラック方程式の共変性

ディラック方程式が特殊相対論の要求を満たしているのかを見ていきます。スピノール成分による行列と4次元ミンコフスキー空間の添え字との区別にご注意ください。また、単位行列は明確に書いていないので、行列かどうかは式の形から判断してください。ローレンツ変換の表記については「ローレンツ変換」をご覧ください。

ディラック方程式は特殊相対論の要求のもとに出しているため、ローレンツ変換によって式の形は変わらないことが要求されています(共変性)。ここで問題になってくるのが、4成分スピノールと $4 \times 4$ 行列の式になっていることです。ローレンツ変換はスカラーに対しては不変として作られています、これらに対する変換規則はまだ与えられておらず、共変になるような変換規則があるのかを求めする必要があります。

というわけで、ローレンツ変換でディラック方程式が形を変えないことを前提にしたとき、4成分スピノールの変換を与えられるのかを見ていきます。

することは、まずスピノールの変換を $4 \times 4$ 行列の変換行列 $S$ で与えます(ベクトルの線形変換と同じ)。そして、ディラック方程式の形を変えない $S$ が作れるのかを確認します。

系 $O$ と系 $O'$ (それぞれ慣性系)という2つの系を用意し、ローレンツ変換で繋がっているとします。なので、ディラック方程式が $O$ では

$$(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc)\psi(x) = 0$$

$O'$ においては

$$(i\hbar\gamma'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc)\psi'(x') = 0$$

と設定します。「'」が付いている方をローレンツ変換後とします。この関係が成り立つことがディラック方程式がローレンツ変換に対して共変であることの条件になり、系 $O, O'$ の物理(ディラック方程式で記述される現象)は同じになります。

しかし、ガンマ行列が違う行列に変換されてしまうと、式の構造が変わってしまうので、 $\gamma'^\mu = \gamma^\mu$ とします。もしくは、ガンマ行列はミンコフスキー空間上の点に依存せずに定義されていることから、ローレンツ変換で変化しないということもできます。

それでは、ディラック方程式を $O$ から $O'$ へとローレンツ変換を行います。スピノールに対してローレンツ変換を行うことは、線形変換として

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x)$$

となる $S$ がいることです(ベクトルの変換と同じ)。 $S$ はローレンツ変換 $a^\mu_\nu$ を含む $4 \times 4$ 行列(スピノール成分による)で、 $a_{\mu\nu}$ は $x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$ で与えられています。 $\psi'(x')$ は、 $a^\mu_\nu$ の逆行列を $(a^{-1})^\mu_\nu$ とすれば

$$\psi'(x') = \psi'(ax) = S(a)\psi(a^{-1}x')$$

括弧内では簡略化して $ax$ のように書いていきます( $x' = ax, a^{-1}x' = x$ )。

$O$ から $O'$ への変換は逆変換で $O'$ から $O$ に戻せるので、 $S$ の逆行列によって

$$\psi(x) = S^{-1}(a)\psi'(x') = S^{-1}(a)\psi'(ax)$$

もしくは

$$\psi(x) = S(a^{-1})\psi'(ax)$$

なので、 $S$  の関係として  $S(a^{-1}) = S^{-1}(a)$  が求められます。

$O$  のディラック方程式に入れると

$$(i\hbar\gamma^\mu S^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mcS^{-1})\psi'(x') = 0$$

これに左から  $S$  をかけて

$$(i\hbar S\gamma^\mu S^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc)\psi'(x') = 0 \quad (1)$$

微分部分がまだ  $O$  なので  $O'$  に変換します。微分演算子のローレンツ変換は  $a^\mu_\nu$  は  $x$  の依存性を持たないので

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (a^\nu_\alpha x^\alpha) \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = a^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

これはただの共変ベクトルの変換則です。これによって (1) を書き換えると

$$(i\hbar S\gamma^\mu S^{-1} a^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - mc)\psi'(x') = 0$$

$O$  でのディラック方程式は  $O'$  に移行されたので、これは  $O'$  の方程式

$$(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc)\psi'(x') = 0$$

になるとします。

そうすると、 $S$  は  $a^\nu_\mu$  の直交性  $a^\nu_\mu a_\nu^\alpha = \delta_\mu^\alpha$  から

$$S\gamma^\mu S^{-1} a^\nu_\mu = \gamma^\nu$$

$$S\gamma^\mu S^{-1} a^\nu_\mu a_\nu^\alpha = a_\nu^\alpha \gamma^\nu$$

$$S\gamma^\mu S^{-1} \delta_\mu^\alpha = a_\nu^\alpha \gamma^\nu$$

$$S\gamma^\alpha S^{-1} = a_\nu^\alpha \gamma^\nu \quad (2a)$$

$O'$  から始めて  $O$  へとした場合では

$$\begin{aligned} 0 &= (i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc)\psi'(x') \\ &= (i\hbar\gamma^\mu a^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - mc)S\psi(x) \\ &= (i\hbar S^{-1}\gamma^\mu a^\nu_\mu S \frac{\partial}{\partial x^\nu} - mc)\psi(x) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^\mu S a_\mu^\nu &= \gamma^\nu \\ S^{-1}\gamma^\mu S &= a_\nu^\mu \gamma^\nu \end{aligned} \quad (2b)$$

となります。(2a)、(2b) が行列  $S$  を決定する方程式になり、(2a),(2b) に従う  $S$  があれば共変性が成り立ちます。注意として、 $S$  はユニタリー行列である必要がありません。このことを数学ではローレンツ変換はコンパクト群でないとして表現します。

$S$  が存在することを示します。まずは、無限小ローレンツ変換

$$a_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \Delta\omega_\nu^\mu$$

で考えていきます。 $\Delta\omega^{\mu\nu}$  は反対称  $\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}$  です。 $S$  を微小な  $\Delta\omega^{\mu\nu}$  で展開できるとして

$$S(\Delta\omega^{\mu\nu}) = 1 - \frac{i}{4} T_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} \quad (3a)$$

$$S^{-1}(\Delta\omega^{\mu\nu}) = 1 + \frac{i}{4} T_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} \quad (3b)$$

という形を仮定します。 $S$  はスピノール成分による  $4 \times 4$  行列で、 $1$  は  $4 \times 4$  単位行列  $T_{\mu\nu}$  は  $4 \times 4$  行列です。こ  $T_{\mu\nu}$  を求めます。

(2b) での  $S$  と  $S^{-1}$  に (3a),(3b) を入れて

$$(\delta_\mu^\nu + \Delta\omega_\mu^\nu)\gamma^\mu = (I - \frac{i}{4} T_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta})\gamma^\nu (I + \frac{i}{4} T_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta}) \quad (4)$$

$\Delta\omega^{\alpha\beta}$  は微小なので 2 次の項は無視して右辺を計算していくと

$$\gamma^\nu + \frac{i}{4} \gamma^\nu T_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} - \frac{i}{4} T_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \gamma^\nu = \gamma^\nu - \frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} (T_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu T_{\alpha\beta})$$

左辺の  $\Delta\omega_\mu^\nu \gamma^\mu$  は、 $\Delta\omega^{\alpha\beta}$  の反対称、ダミーインデックスの添え字の書き換えを行うことで

$$\begin{aligned} \Delta\omega_\mu^\nu \gamma^\mu &= \delta_\alpha^\nu \Delta\omega_\mu^\alpha \gamma^\mu \\ &= \Delta\omega^{\beta\alpha} g_{\mu\beta} \delta_\alpha^\nu \gamma^\mu \\ &= \Delta\omega^{\beta\alpha} \delta_\alpha^\nu \gamma_\beta \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\omega^{\beta\alpha} \delta_\alpha^\nu \gamma_\beta + \Delta\omega^{\beta\alpha} \delta_\alpha^\nu \gamma_\beta) \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\omega^{\beta\alpha} \delta_\alpha^\nu \gamma_\beta - \Delta\omega^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\nu \gamma_\beta) \\ &= \frac{1}{2} \Delta\omega^{\beta\alpha} (\delta_\alpha^\nu \gamma_\beta - \delta_\beta^\nu \gamma_\alpha) \\ &= -\frac{1}{2} \Delta\omega^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\nu \gamma_\beta - \delta_\beta^\nu \gamma_\alpha) \end{aligned}$$

よって、(4) は  $\delta_\alpha^\nu$  を  $g_\alpha^\nu$  として

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Delta\omega^{\alpha\beta}(g_\alpha^\nu\gamma_\beta - g_\beta^\nu\gamma_\alpha) &= -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}(T_{\alpha\beta}\gamma^\nu - \gamma^\nu T_{\alpha\beta}) \\ -2i(g_\alpha^\nu\gamma_\beta - g_\beta^\nu\gamma_\alpha) &= T_{\alpha\beta}\gamma^\nu - \gamma^\nu T_{\alpha\beta} \\ &= [T_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] \end{aligned}$$

というわけで、 $T_{\alpha\beta}$  とガンマ行列の交換関係は

$$[T_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] = -2i(g_\alpha^\nu\gamma_\beta - g_\beta^\nu\gamma_\alpha) \quad (5)$$

これを満たす  $T_{\alpha\beta}$  の形を求めます。  
そこで、 $T_{\alpha\beta}$  を

$$T_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \quad (6)$$

と仮定してみます。そうすると

$$\begin{aligned} [\gamma^\nu, T_{\alpha\beta}] &= \frac{i}{2}[\gamma^\nu, [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]] = \frac{i}{2}([\gamma^\nu, \gamma_\alpha\gamma_\beta] - [\gamma^\nu, \gamma_\beta\gamma_\alpha]) \\ &= \frac{i}{2}([\gamma^\nu, \gamma_\alpha\gamma_\beta] + [\gamma^\nu, \gamma_\alpha\gamma_\beta] - 2[\gamma^\nu, g_{\alpha\beta}]) \\ &= i[\gamma^\nu, \gamma_\alpha\gamma_\beta] \\ &= 2i(g_\alpha^\nu\gamma_\beta - g_\beta^\nu\gamma_\alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

1 行目から 2 行目にいくときにガンマ行列の関係  $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$  を使い、最後の行へもこの関係より

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\nu &= \gamma_\alpha(2g_\beta^\nu - \gamma^\nu\gamma_\beta) \\ &= 2g_\beta^\nu\gamma_\alpha - (\gamma_\alpha\gamma^\nu)\gamma_\beta \\ &= 2g_\beta^\nu\gamma_\alpha - (2g_\alpha^\nu - \gamma^\nu\gamma_\alpha)\gamma_\beta \\ &= 2(g_\beta^\nu\gamma_\alpha - g_\alpha^\nu\gamma_\beta) + \gamma^\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta \\ \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta &= 2(g_\beta^\nu\gamma_\alpha - g_\alpha^\nu\gamma_\beta) \\ [\gamma^\nu, \gamma_\alpha\gamma_\beta] &= -2(g_\beta^\nu\gamma_\alpha - g_\alpha^\nu\gamma_\beta) \end{aligned}$$

となることを使っています。

この結果から (5) と (7) は同じになっていることが分かります。よって、 $T_{\mu\nu}$  は (6) で仮定したもので問題ないこととなります。

$T_{\mu\nu}$  の関係をまとめると

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \mu = \nu \\ i\gamma_\mu\gamma_\nu & \mu \neq \nu \end{pmatrix}$$

なので、この無限小ローレンツ変換における  $S$  はこの  $T_{\mu\nu}$  を使って

$$S(\Delta\omega^{\mu\nu}) = I - \frac{i}{4}T_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} = I + \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\Delta\omega^{\mu\nu} \quad (8)$$

というように書いて、無限小ローレンツ変換においては演算子  $S$  の存在が確かめられました。ここでは  $T_{\mu\nu}$  と書きましたが、ガンマ行列の交換関係は  $\sigma_{\mu\nu}$  と表記されることが多く、他のところでは  $\sigma_{\mu\nu}$  を使っています。

ちなみに、 $\gamma_5$  は  $\gamma_\mu\gamma_\nu$  と  $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5 = \gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu$  として交換することから

$$[T_{\mu\nu}, \gamma_5] = 0$$

として、 $T_{\mu\nu}$  と交換します。

次に、有限変換での  $S$  も求めておきます。スピノールのローレンツ変換は同じように

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x)$$

変換を表す行列をブーストと3次元回転に対応する変換行列を  $I_n$  ( $n = 1, 2, 3$ )、無限小変換を行う階数を  $N$  として

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = (I_n)^{\mu\nu}\Delta\omega, \quad \Delta\omega = \frac{\omega}{N}$$

$I_n$  は  $(\mu, \nu)$  を成分とする  $4 \times 4$  行列です (スピノール成分による行列ではない)。これからスピノールの変換は

$$\psi'(x') = \left(1 - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} T_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu}\right)^N \psi(x) = \exp\left[-\frac{i}{4} \omega T_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu}\right] \psi(x)$$

この  $N$  の無限大の極限を取って

$$\psi'(x') = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} T_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu}\right)^N \psi(x) = \exp\left[-\frac{i}{4} \omega T_{\mu\nu} (I_n)^{\mu\nu}\right] \psi(x) \quad (9)$$

exp 部分が  $S$  なので、それをブースト、3次元回転の場合でそれぞれ求めます。

最初に  $I_n = L_n$  としてブーストの場合を見ていきます。 $x_1$  方向のブーストとして  $L_1$  を使います。このとき、 $\Delta\omega^{\mu\nu}$  で消えないのは  $(\mu, \nu)$  が  $(0, 1), (1, 0)$  のときなので

$$\psi'(x') = \exp\left[-\frac{i}{4} \omega (T_{01}(L_n)^{01} + T_{10}(L_n)^{10})\right] \psi(x)$$

$(L_1)^\mu_\nu$  は

$$(L_1)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (L_1)^0_1 = (L_1)^1_0 = -1$$

また

$$(L_1)^{01} = (L_1)^0_{\nu} g^{\nu 1} = (L_1)^0_1 g^{11} = 1, \quad (L_1)^{10} = -1$$

これらと、 $T_{01} = -T_{10}$  を使えば

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \exp\left[-\frac{i}{4}\omega(T_{01}(L_1)^{01} + T_{10}(L_1)^{10})\right]\psi(x) \\ &= \exp\left[-\frac{i}{2}\omega T_{01}\right]\psi(x) \end{aligned}$$

となり、有限におけるブーストでの  $S$  が求められます。

今度は  $x_3$  軸周りの回転の場合を見ます。このとき  $I_n$  は  $J_3$  です。回転角度は  $\Delta\omega = \Delta\phi$  とします。このときは

$$\Delta\omega^{\mu}_{\nu} = (J_3)^{\mu}_{\nu} \Delta\phi \quad (\Delta\phi = \frac{\phi}{N})$$

となり、0 でないのは  $\Delta\omega^1_2 = (J_3)^1_2 \Delta\phi$  ( $\Delta\omega^1_2 = -\Delta\omega^2_1$ ) だけです。  $(J_3)^{\mu}_{\nu}$  は

$$(J_3)^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(J_3)^{\mu}_{\nu}$  は反対称なので  $(J_3)^{21} = -(J_3)^{12}$  です。実際に

$$\begin{aligned} (J_3)^2_1 &= (J_3)^{2\nu} g_{\nu 1} = (J_3)^{21} g_{11} = -(J_3)^{21} = -1 \\ (J_3)^1_2 &= (J_3)^{12} g_{22} = -(J_3)^{12} = 1 \end{aligned}$$

となっています。反対称なことを使えば

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \exp\left[-\frac{i}{4}\phi T_{\mu\nu} (J_3)^{\mu\nu}\right]\psi(x) \\ &= \exp\left[-\frac{i}{4}\phi(T_{12}(J_3)^{12} + T_{21}(J_3)^{21})\right]\psi(x) \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}\phi T_{12}\right]\psi(x) \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}\phi T^{12}\right]\psi(x) \end{aligned}$$

また、 $T^{12}$  は

$$\begin{aligned}
T^{12} &= \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2] \\
&= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1) & 0 \\ 0 & -(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 2i\sigma_3 & 0 \\ 0 & 2i\sigma_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \Sigma_3
\end{aligned}$$

なので

$$\psi'(x') = \exp\left[\frac{i}{2}\phi\Sigma_3\right]\psi(x) \quad (10)$$

(10) には  $\phi/2$  が入っているために、 $\psi$  が元に戻るために必要な回転は  $2\pi$  (1 回転) でなく  $4\pi$  です。これがスピノール (スピン 1/2) の特徴です。量子力学での「スピン 1/2」でも示したように、スピン 1/2 の波動関数 (スピン上向き、下向きによる 2 成分スピノール) に対する 3 次元回転は

$$\psi'(x') = \exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\right]\psi(x)$$

と与えられ、これも  $4\pi$  で元に戻ります。 $\boldsymbol{\phi} = \phi\boldsymbol{n}$  は任意の軸  $\boldsymbol{n}$  の回転角度  $\phi$  です。このことから、4 次元へ拡張された回転変換と分かります。

というわけで、 $S$  は無限小、有限どちらでも存在し、それによってディラック方程式が共変になるスピノールの変換規則が与えられます。

逆変換  $S^{-1}$  とエルミート共役  $S^\dagger$  には関係があるので、それを求めます。3 次元回転の場合から見ます。3 次元回転では 0 成分がないので  $S$  は、 $\omega(J_n)^{\mu\nu} = \omega^{ij}$  と書くことにして

$$S = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{ij}T_{ij}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

この  $S$  のエルミート共役を取ります。 $S$  はスピノール成分による行列なので、 $T_{ij}$  のスピノール成分に対するエルミート共役を取ると

$$T_{ij}^\dagger = -\frac{i}{2}((\gamma_i\gamma_j)^\dagger - (\gamma_j\gamma_i)^\dagger) = -\frac{i}{2}(\gamma_j\gamma_i - \gamma_i\gamma_j) = -T_{ji} = T_{ij}$$

これから  $T_{ij}$  はエルミート行列です。 $\omega^{ij}$  はスピノール成分を持たない実数なので

$$S^\dagger = \exp\left[\frac{i}{4}\omega^{ij}T_{ij}\right] = S^{-1}$$

となり、このときの  $S$  はユニタリー行列です。さらに、 $\gamma_0$  との交換関係は (7) から

$$[T_{ij}, \gamma_0] = -2i(g_i^0 \gamma_j - g_j^0 \gamma_i) = 0$$

なので

$$[S^\dagger, \gamma_0] = 0$$

よって

$$\begin{aligned} 0 &= S^\dagger \gamma_0 - \gamma_0 S^\dagger \\ &= \gamma_0 S^\dagger \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_0 S^\dagger \end{aligned}$$

となり

$$\gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = S^\dagger = S^{-1} \quad (11)$$

という関係を持つことがわかります。

今度はブーストの場合を見ます。このときの  $S$  は

$$S = \exp[-\frac{i}{2}\omega T_{01}] , S^\dagger = \exp[\frac{i}{2}\omega T_{01}^\dagger]$$

$T_{01}^\dagger$  は

$$T_{01}^\dagger = -\frac{i}{2}((\gamma_0 \gamma_1)^\dagger - (\gamma_1 \gamma_0)^\dagger) = \frac{i}{2}(\gamma_1 \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_1) = -T_{10} = T_{01}$$

なので、この場合はエルミート行列ではなく、 $S$  も

$$S^\dagger = \exp[-\frac{i}{2}\omega T_{01}] \neq S^{-1}$$

となり、ユニタリー行列になりません。

ここで、 $\gamma_0 S^\dagger \gamma_0$  での  $\exp$  を展開すれば

$$\gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 \exp[-\frac{i}{2}\omega T_{01}] \gamma_0 = \gamma_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{i}{2}\omega T_{01})^n \gamma_0$$

これに、 $\gamma_0 T_{01}$  は

$$\begin{aligned}
\gamma_0 T_{01} &= \frac{i}{2} \gamma_0 ((\gamma_0 \gamma_1) - (\gamma_1 \gamma_0)) \\
&= \frac{i}{2} (\gamma_1 \gamma_0 \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_1 \gamma_0) \\
&= T_{10} \gamma_0 \\
&= -T_{01} \gamma_0
\end{aligned}$$

となることを使えば、和の部分は例えば

$$\begin{aligned}
n=1: \quad \gamma_0 \left(-\frac{i}{2} \omega T_{01}\right) \gamma_0 &= \frac{i}{2} \omega T_{01} \\
n=2: \quad \gamma_0 \left(-\frac{i}{2} \omega T_{01}\right) \left(-\frac{i}{2} \omega T_{01}\right) \gamma_0 &= \left(\frac{i}{2} \omega T_{01}\right)^2 \\
n=3: \quad \gamma_0 \left(-\frac{i}{2} \omega T_{01}\right) \left(-\frac{i}{2} \omega T_{01}\right) \left(-\frac{i}{2} \omega T_{01}\right) \gamma_0 &= \left(\frac{i}{2} \omega T_{01}\right)^3
\end{aligned}$$

よって

$$\gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \omega T_{01}\right)^n = \exp\left[\frac{i}{2} \omega T_{01}\right] = S^{-1} \quad (12)$$

となり、 $\gamma_0 S^\dagger \gamma_0$  は  $S^{-1}$  になります。というわけで、(11),(12) から、3次元回転とブーストの2つをまとめて  $S$  の関係を

$$\gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = S^{-1}$$

というようにまとめて書けます。ちなみに、これと(2b)から、カレント  $j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  の変換は

$$\begin{aligned}
j'^\mu(x') &= c\psi'^\dagger(x')\gamma^0\gamma^\mu\psi'(x') \\
&= c\psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma^0\gamma^\mu S\psi(x) \\
&= c\psi^\dagger(x)\gamma^0 S^{-1}\gamma^0\gamma^\mu S\psi(x) \quad (S^\dagger = \gamma^0 S^{-1}\gamma^0) \\
&= c\psi^\dagger(x)\gamma^0 S^{-1}\gamma^\mu S\psi(x) \\
&= a^\mu_\nu c\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\nu\psi(x) \quad (S^{-1}\gamma^\mu S = a^\mu_\nu\gamma^\nu) \\
&= a^\mu_\nu j^\nu(x)
\end{aligned}$$

となり、4元ベクトルのローレンツ変換になっているのが確認できます。  
最後に空間反転に触れておきます。空間を反転させる変換は

$$x'^0 = x^0 = ct, \quad x'^k = -x^k \quad (k = 1, 2, 3)$$

なので、空間反転の変換行列  $a^\nu_\mu$  は計量  $g^{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$  です。これもローレンツ変換なので、この変換でディラック方程式は形を変えません。行列式  $\det a^\nu_\mu = \det g^{\mu\nu} = -1$  から、improper なローレンツ変換なので ( $a^0_0 > 0$ )、空間反転は無限小ローレンツ変換から作れません。スピノールの空間反転の変換を  $P$  とすれば、(2b) から

$$\begin{aligned} a^\nu_\mu \gamma^\mu &= P^{-1} \gamma^\nu P \\ a_\nu^\alpha a^\nu_\mu \gamma^\mu &= P^{-1} a_\nu^\alpha \gamma^\nu P \end{aligned}$$

左辺は  $a_\nu^\alpha a^\nu_\mu = \delta_\mu^\alpha$ 、右辺は  $a_\nu^\alpha = (a^{-1})^\alpha_\nu = g^{\alpha\nu}$  から

$$\gamma^\alpha = P^{-1} \sum_{\nu=0}^3 g^{\alpha\nu} \gamma^\nu P$$

よって、ガンマ行列は

$$\gamma^0 = P^{-1} \gamma^0 P, \quad \gamma^k = -P^{-1} \gamma^k P \quad (k = 1, 2, 3)$$

となります。

$P$  を任意の角度  $\phi$  によって

$$P = e^{i\phi \gamma^0}, \quad P^{-1} = e^{-i\phi \gamma^0}$$

とできます。実際に

$$\begin{aligned} e^{-i\phi \gamma^0} \gamma^0 e^{i\phi \gamma^0} &= e^{-i\phi} e^{i\phi} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 \\ e^{-i\phi \gamma^0} \gamma^k e^{i\phi \gamma^0} &= \gamma^0 \gamma^k \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \end{aligned}$$

として成立しています。そして

$$P^{-1} = e^{-i\phi \gamma^0} = P^\dagger, \quad \gamma^0 P^\dagger \gamma^0 = P^{-1}$$

なので、 $P$  はユニタリー行列です。proper なローレンツ変換では  $4\pi$  回転 (2 回転) させることでもとのスピノールに戻るので、4 回の空間反転でもとに戻るとするなら

$$P^4 \psi = \psi = (e^{i\phi \gamma^0})^4 \psi = e^{i4\phi} (\gamma^0)^4 \psi = e^{i4\phi} \psi$$

から、 $e^{i4\phi} = 1$  となり、 $e^{i\phi}$  は  $e^{i\phi} = \pm 1, \pm i$  です。

静止している場合でのディラック方程式の解は

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{imc^2}{\hbar} t}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{imc^2}{\hbar} t}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{imc^2}{\hbar} t}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{imc^2}{\hbar} t}$$

これらにディラック・パウリ表現  $\beta = (+1, -1)$  を使って、 $P = e^{i\phi}\gamma^0$  を作用させると

$$P\psi_1(x) = e^{i\phi}\gamma^0\psi_1(x) = e^{i\phi}\beta\psi_1(x) = e^{i\phi}\psi_1(x)$$

$$P\psi_2(x) = e^{i\phi}\gamma^0\psi_2(x) = e^{i\phi}\psi_2(x)$$

$$P\psi_3(x) = e^{i\phi}\gamma^0\psi_3(x) = -e^{i\phi}\psi_3(x)$$

$$P\psi_4(x) = e^{i\phi}\gamma^0\psi_4(x) = -e^{i\phi}\psi_4(x)$$

正負のエネルギー固有状態  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は  $P$  の固有値として反対の符号を持つことが分かります。