# 荷電共役

粒子と反粒子に対するディラック方程式をつなぐ変換を作ります。
途中からディラック・パウリ表現を使っているので、ガンマ行列の一般的な関係でなくなっていることに注意してください。

反粒子は粒子に対して電荷だけが反符号となって存在します。言い換えれば、粒子の負エネルギー解に対して、電荷、エネルギー、運動量、スピンの符号を逆にしたものが現実に反粒子として存在します。つまり、反粒子の従う方程式は、粒子の方程式の電荷の符号を反転させたものです。これを利用して、粒子から反粒子 (反粒子から粒子) への変換を作ります。

電荷を $e$ とし、粒子では $e$、反粒子では $-e$ とします。注意ですが、電子では $-|e|$、陽電子では $+|e|$ です。電荷の影響が必要なので４元ベクトルポテンシャル $A^\mu$ を導入します。このとき、粒子は

$$((i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)\gamma^\mu - mc)\psi = 0 \tag{1a}$$

として、電磁場があるディラック方程式に従います。これに対して反粒子では電荷の符号を反転させた

$$((i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)\gamma^\mu - mc)\psi_c = 0 \tag{1b}$$

という電磁場があるディラック方程式に従うとします。このときの、$\psi$ と $\psi_c$ の間の変換を荷電共役 (Charge Conjugation) と言います。

その変換を求めるために、まずは (1a）の複素共役を取り

$$\begin{aligned}
0 &= ((i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)\gamma^\mu - mc)^*\psi^* \\
&= ((-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)\gamma^{\mu *} - mc)\psi^* \\
&= ((i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)\gamma^{\mu *} + mc)\psi^*
\end{aligned} \tag{2}$$

これで電荷部分の符号は変わりました。後は、$mc$ の符号と $\gamma^{\mu *}$ の部分を (1b) と同じにします。そのためには

$$U\gamma^{\mu *}U^{-1} = -\gamma^\mu \tag{3}$$

という変換があるとすればいいです。$U$ はスピノール成分による $4\times 4$ 行列で、$U^{-1}$ は $U$ の逆行列です。粒子と反粒子を対応させる変換なので、位置の依存性はないと考えて、この変換を左から (2) に作用させると

$$\begin{aligned}
0 &= \big((i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)U\gamma^{\mu *} + mcU\big)\psi^* \\
&= \big((i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)U\gamma^{\mu *}U^{-1} + mc\big)U\psi^* \\
&= \big((i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)\gamma^\mu - mc\big)U\psi^*
\end{aligned} \tag{4}$$

これを (1b) と一致させるために $\psi$ と $\psi_c$ は

$$\psi_c = U\psi^* \tag{5}$$

と変換されるとします。

今度は (1a) のエルミート共役を取ります。エルミート共役を取れば

$$\begin{aligned}
0 = & -i\hbar\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - \frac{e}{\kappa_b}A_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - mc\psi^\dagger \\
= & -i\hbar\partial_\mu\psi^\dagger\gamma_0\gamma_0\gamma^{\mu\dagger} - \frac{e}{\kappa_b}A_\mu\psi^\dagger\gamma_0\gamma_0\gamma^{\mu\dagger} - mc\psi^\dagger \quad (\gamma_0\gamma_0 = 1) \\
= & -i\hbar\partial_\mu\overline{\psi}\gamma_0\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0 - \frac{e}{\kappa_b}A_\mu\overline{\psi}\gamma_0\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0 - mc\overline{\psi} \\
= & (i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)\overline{\psi}\gamma^\mu + mc\overline{\psi} \quad (\gamma_0\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0 = \gamma^\mu) \\
= & (i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{\kappa_b}A_\mu)\gamma^{\mu T}\overline{\psi}^T + mc\overline{\psi}^T
\end{aligned}$$

これは

$$\psi_c = C\overline{\psi}^T = C(\psi^\dagger\gamma_0)^T = C\gamma_0^T\psi^*\ ,\ C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu \tag{6}$$

という変換があれば、(1b) と一致します。なので、$U$ と $C$ は

$$\psi_c = U\psi^* = C\overline{\psi}^T$$

という関係になります。これから、$U = C\gamma_0^T$ です。

ここで、ディラック・パウリ表現を使うことにします (一般性がなくなることに注意)。ディラック・パウリ表現では、転置に対して

$$\gamma^{1T} = -\gamma^1\ ,\ \gamma^{2T} = \gamma^2\ ,\ \gamma^{3T} = -\gamma^3\ ,\ \gamma^{0T} = \gamma^0$$

となっています。なので、$\gamma^{0,1,2,3}$ に対して

$$\begin{aligned}
C\gamma^0C^{-1} &= -\gamma^0 \\
C\gamma^1C^{-1} &= \gamma^1 \\
C\gamma^2C^{-1} &= -\gamma^2 \\
C\gamma^3C^{-1} &= \gamma^3
\end{aligned}$$

となり、$\gamma^1$ と $\gamma^3$ は $C$ と交換、$\gamma^0$ と $\gamma^2$ は反交換になっていると分かります。

ガンマ行列は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

なので、異なるガンマ行列とは反交換します。そのため、$C$ が $\gamma^1$ と $\gamma^3$ と交換するためには、$\gamma^0$ と $\gamma^2$ によって $\gamma^i\gamma^j$ となればいいです。これに対して、$\gamma^0$ と $\gamma^2$ では反交換なので、$\gamma^0, \gamma^2$ は 1 個ずつ含んでいればいいです。よって、$C$ としては $\gamma^2\gamma^0$ が考えられます。

というわけで、$C$ を

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と与えます。逆行列はパウリ行列の性質 $\sigma_i^2 = 1,\ \sigma_i^\dagger = \sigma_i$ から

$$C^{-1} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = C^\dagger = C^T = -C$$

となっています。これによって $\psi_c$ は

$$\psi_c = U\psi^* = C\gamma^0\psi^* = i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi^* = i\gamma^2\psi^*$$

これにさらに荷電共役を取ってみると

$$\begin{aligned}
(\psi_c)_c = (i\gamma^2\psi^*)_c &= i\gamma^2(i\gamma^2\psi^*)^* \\
&= \gamma^2(\gamma^{2*}\psi) \\
&= \gamma^2\gamma^0\gamma^2\gamma^0\psi \qquad (\gamma^0\gamma^{\mu*}\gamma^0 = (\gamma^\mu)^T\ ,\ (\gamma^2)^T = \gamma^2) \\
&= -\gamma^2\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi \\
&= \psi
\end{aligned}$$

となって元の $\psi$ に戻ります。

$C$ を実数とするために $C = i\gamma^2\gamma^0$ としましたが、$C = \gamma^0\gamma^2$ でも同じです。もしくは $C = \gamma^2\gamma^0$ ともできます。実際に、$C = \gamma^0\gamma^2$ でも

$$\begin{aligned}
&CC^\dagger = (\gamma^0\gamma^2)(\gamma^0\gamma^2)^\dagger = \gamma^0\gamma^2(\gamma^2)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^2\gamma^2 = 1 \\
&C^\dagger = (\gamma^0\gamma^2)^\dagger = (\gamma^2)^\dagger\gamma^0 = \gamma^2\gamma^0 = -C \\
&C^T = (\gamma^2)^T(\gamma^0)^T = \gamma^2\gamma^0 = -C
\end{aligned}$$

となり、同じ関係を持ちます。

$\psi$ によって演算子の期待値が与えられるのと同じように、$\psi_c$ で求めてみると

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle_c &= \langle \psi_c | \hat{A} | \psi_c \rangle \\
&= \int d^3x \ \psi_c^\dagger \hat{A} \psi_c \\
&= \int d^3x \ (i\gamma^2 \psi^*)^\dagger \hat{A} (i\gamma^2 \psi^*) \\
&= \int d^3x \ \psi^{*\dagger} (\gamma^{2T})^* \hat{A} \gamma^2 \psi^* \\
&= \int d^3x \ \psi^{*\dagger} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \hat{A} \gamma^2 \psi^* \\
&= -\int d^3x \ \psi^{*\dagger} \gamma^2 \hat{A} \gamma^2 \psi^* \\
&= -\Big( \int d^3x \ \psi^{*\dagger} (\gamma^2 \hat{A} \gamma^2)^* \psi^* \Big)^* \\
&= -\langle \psi | \gamma^{2*} \hat{A}^* \gamma^{2*} | \psi \rangle \\
&= -\langle \psi | (-\gamma^2) \hat{A}^* (-\gamma^2) | \psi \rangle \\
&= -\langle \psi | \gamma^2 \hat{A}^* \gamma^2 | \psi \rangle
\end{aligned}
$$

というようにして演算子の期待値を求められます。

荷電共役をとることで、エネルギー、運動量、スピンの方向がどうなるのか見ます。ここではエネルギーとスピンの射影演算子を別々に用いないで、一緒に使います。射影演算子は必要な状態を取り出す演算子なので

$$
\Lambda_\epsilon P_\lambda
$$

として単純に組み合わせれば、欲しいエネルギー、スピンを持った状態を取り出せます。$\Lambda_\epsilon$ は $\epsilon = \pm 1$ で正負に対応させて

$$
\Lambda_\epsilon = \frac{\epsilon p_\mu \gamma^\mu + mc}{2mc}
$$

$P_\lambda$ は $\lambda = \pm 1$ で

$$
P_\lambda = \frac{1 + \lambda \gamma_5 n_\mu \gamma^\mu}{2}
$$

$n^\mu$ がスピンの方向です。ちなみにエネルギーとスピンの演算子は交換関係になっています。

$\psi$ に作用させたものを

$$
\psi_{\epsilon,\lambda} = \Lambda_\epsilon P_\lambda \psi
$$

とします (例えば、$\psi$ からエネルギー、運動量が正でスピンが $n_\mu$ の逆向きの状態を取り出すなら $\epsilon = +1$、$\lambda = -1$)。これの荷電共役は

$$(\psi_{\epsilon,\lambda})_c = \ C\gamma^0\psi^*_{\epsilon,\lambda} = C\gamma^0(\Lambda_\epsilon P_\lambda\psi)^* = C\gamma^0(\frac{\epsilon p_\mu\gamma^\mu + mc}{2mc})^*(\frac{1+\lambda\gamma_5 n_\mu\gamma^\mu}{2})^*\psi^*$$

$\gamma_5$ は (ディラック・パウリ表現の場合)

$$\gamma_5^T = i\gamma_3^T\gamma_2^T\gamma_1^T\gamma_0^T = i(-\gamma_3)\gamma_2(-\gamma_1)\gamma_0 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5$$

これと $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$ から、$\gamma_5 = \gamma_5^T = \gamma_5^*$ となります。また、$C$ と $\gamma_5$ の交換関係は

$$\begin{aligned}
[C, \gamma_5] &= [i\gamma^2\gamma^0, i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] \\
&= -\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^0 \\
&= -\gamma^1\gamma^3 + \gamma^1\gamma^3 \quad (\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -2\delta^{ij}\ ,\ i,j = 1,2,3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

なので、$C$ と $\gamma_5$ は交換します。

　$\gamma^{\mu *}$ では

$$\gamma^\mu = -U\gamma^{\mu *}U^{-1} = -C\gamma_0\gamma^{\mu *}(C\gamma_0)^{-1}$$

となっていることを使って

$$\begin{aligned}
(\psi_{\epsilon,\lambda})_c &= C\gamma^0(\frac{\epsilon p_\mu\gamma^\mu + mc}{2mc})^*(\frac{1+\lambda\gamma_5 n_\mu\gamma^\mu}{2})^*(C\gamma^0)^{-1}C\gamma^0\psi^* \\
&= C\gamma^0\frac{\epsilon p_\mu\gamma^{\mu *} + mc}{2mc}\frac{1+\lambda\gamma_5 n_\mu\gamma^{\mu *}}{2}(C\gamma^0)^{-1}C\gamma^0\psi^* \\
&= \frac{\epsilon p_\mu C\gamma^0\gamma^{\mu *}(C\gamma^0)^{-1} + mc}{2mc}\frac{1-\lambda\gamma_5 n_\mu C\gamma^0\gamma^{\mu *}(C\gamma^0)^{-1}}{2}C\gamma^0\psi^* \quad (\gamma_0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_0) \\
&= \frac{-\epsilon p_\mu\gamma^\mu + mc}{2mc}\frac{1+\lambda\gamma_5 n_\mu\gamma^\mu}{2}C\gamma^0\psi^* \\
&= \frac{-\epsilon p_\mu\gamma^\mu + mc}{2mc}\frac{1+\lambda\gamma_5 n_\mu\gamma^\mu}{2}\psi_c \\
&= \Lambda_{-\epsilon}P_\lambda\psi_c
\end{aligned}$$

このため $\psi$ から取り出されたある $\epsilon, \lambda$ の状態 $\psi_{\epsilon,\lambda}$ の荷電共役は、$\psi_c$ の $-\epsilon, \lambda$ の状態に対応します。このため、$\psi$ の負のエネルギー、運動量の状態は $\psi_c$ の正のエネルギー、運動量の状態に対応することになります。一方で、スピン方向の射影が $\lambda$ のままなのは、スピン方向の射影は正エネルギー解と負エネルギー解でそれぞれの方向の対応が見た目上取れているからです (「射影演算子」参照)。しかし、スピン自体は反転しています。なので、反粒子は粒子のエネルギー、運動量、スピンを反転させたものという空孔理論と一致しています。

　実際に静止している場合の負エネルギー解の荷電共役を取るとはっきりします。例えば

$$\psi^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\exp[\frac{imc^2}{\hbar}t]$$

これの荷電共役をとると

$$
\begin{aligned}
(\psi^3)_c =& \ C\gamma^0(\psi^3)^* = i\gamma^2(\psi^3)^* \\
&= i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\exp[-\frac{imc^2}{\hbar}t] \\
&= \ -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\exp[-\frac{imc^2}{\hbar}t]
\end{aligned}
$$

同様に

$$
(\psi^4)_c = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\exp[-\frac{imc^2}{\hbar}t] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\exp[-\frac{imc^2}{\hbar}t]
$$

$\psi^3$ のときにマイナスが出てきてますが、それを無視すれば

$$
(\psi^3)_c = \psi^2 \ , \ (\psi^4)_c = \psi^1
$$

となるのが分かります。そして、$\Sigma_3$ に対しては

$$
\Sigma_3\psi^2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = -\psi^2 \ , \ \Sigma_3\psi^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = +\psi^3
$$

となり、符号が反転しています。なので、スピンが反転したものの荷電共役になっています。
　このような対応のために、$p_0 = E/c > 0$ として

$$
\begin{aligned}
&u^1(\boldsymbol{p})e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} = \psi^1(\boldsymbol{p})e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} \ , \ u^2(\boldsymbol{p})e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} = \psi^2(\boldsymbol{p})e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} \\
&v^1(\boldsymbol{p})e^{ip_\mu x^\mu/\hbar} = \psi^4(-\boldsymbol{p})e^{ip_\mu x^\mu/\hbar} \ , \ v^2(\boldsymbol{p})e^{ip_\mu x^\mu/\hbar} = \psi^3(-\boldsymbol{p})e^{ip_\mu x^\mu/\hbar}
\end{aligned}
$$

といった表記が使われます。