

WKB 近似でのトンネル効果

WKB 近似を使ったトンネル効果の確率を求めます。その後に、 α 崩壊のガモムモデルに触れます。最後に数値を入れてますが、かなり雑です。

ほとんど「WKB 近似」と同じ話です。

V' は $dV(x)/dx$ です。

1次元シュレーディンガー方程式として

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t)$$

時間依存部分を分離して

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} + V(x)\right) \psi(x) = E \psi(x) \quad (1)$$

このときのポテンシャル V を、 $x < x_1$ と $x_2 < x$ では $E < V$ 、 $x_1 < x < x_2$ では $E > V$ とします。 $x < x_1$ を領域 I_1 、 $x_1 < x < x_2$ を領域 I_2 、 $x_2 < x$ を領域 I_3 とします（「WKB 近似」と E, V の関係が逆になっているだけなので、 x_1 を x_2 、 x_2 を x_1 にすれば対応する）。それぞれの領域での WKB 近似の波動関数は

$$I_1, I_3 : \psi_{1,3}(x) \simeq \frac{C}{\sqrt{F(x)}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int dx F(x)\right] + \frac{D}{\sqrt{F(x)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int dx F(x)\right] \quad (2a)$$

$$I_2 : \psi_2(x) \simeq \frac{C'}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int dx |F(x)|\right] + \frac{D'}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int dx |F(x)|\right] \quad (2b)$$

$F(x)$ は $\sqrt{2m(E - V(x))}$ です。トンネル効果を見たいので、 I_2 で反射する反射波と、 I_2 を超えて I_3 に到達する透過波を考えます。 I_1 では入射波 (x の正方向に動く) と反射波 (x の負方向に動く) がいるとして

$$C_I e^{ikx} + C_R e^{-ikx} \quad (k > 0)$$

に対応させます。第 1 項が入射波、第 2 項が反射波で、 $C_I C_R$ がそれぞれの確率振幅になります。今の積分は

$$\frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x dx F(x) = F(x) > 0$$

となっているので、 x の増加で S は増加します (S は負)。これは kx に対応するので、 I_1 での入射波と反射波は

$$\frac{C_I}{\sqrt{F(x)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x dx F(x)\right] + \frac{C_R}{\sqrt{F(x)}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x dx F(x)\right]$$

そして、入射波の振幅は 1 に選び、波動関数に位相因子を加えても影響がないので接続のときに出てくる $\pm i4/\pi$ を加えて

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &\simeq \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \left(\exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x dx F(x) + i\frac{\pi}{4}\right] + C_R \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x dx F(x) - i\frac{\pi}{4}\right] \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \left(\exp\left[i\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx F(x) + \frac{\pi}{4}\right)\right] + C_R \exp\left[-i\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx F(x) + \frac{\pi}{4}\right)\right] \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{F(x)}} (\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1 + C_R \cos \Theta_1 - i C_R \sin \Theta_1) \quad (\Theta_1 = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx F(x) + \frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{F(x)}} ((1 + C_R) \cos \Theta_1 + i(1 - C_R) \sin \Theta_1) \tag{3}
\end{aligned}$$

I_3 では透過波だけがいるとして

$$\psi_3(x) \simeq \frac{C_T}{\sqrt{F(x)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x dx F(x) + i\frac{\pi}{4}\right] = \frac{C_T}{\sqrt{F(x)}} (\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2) \tag{4}$$

C_T が透過波の確率振幅になります。 C_R, C_T を接続公式から求めます。

エアリー方程式とその解は

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} = z\Psi, \quad \Psi(z) = a\text{Ai}(z) + b\text{Bi}(z)$$

a, b は任意定数です。解の漸近形は $z \gg 0$ では

$$\text{Ai}(z) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \exp\left[-\frac{2}{3}z^{3/2}\right]$$

$$\text{Bi}(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}} \exp\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]$$

$z \ll 0$ は

$$\text{Ai}(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{Bi}(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \cos\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]$$

となっています。

まずは、 x_1 側を接続するために、 I_1 でのエアリー方程式の解を作ります。 I_1 では $x < x_1$ 、 $V' = dV/dx$ は $V'(x_1) > 0$ なので、 x_1 付近でのシュレーディンガー方程式は

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = z\psi \quad (g_1 = \left(\frac{2m}{\hbar^2}V'(x_1)\right)^{1/3}, \quad z = g_1(x - x_1))$$

$z < 0$ なので、 $z \ll 0$ の漸近形を使います。このときの $F^2(x)$ は $x = x_1$ 周りで

$$F^2(x) = 2m(E - V(x)) \simeq -2mV'(x_1)(x - x_1) = -2m\frac{\hbar^2}{2m}g_1^3(x - x_1) = \hbar^2g_1^2(-z)$$

$$\sqrt{F(x)} = \sqrt{\hbar g_1}(-z)^{1/4}$$

積分は

$$\int_x^{x_1} dx' F(x') = \hbar g_2 \int_x^{x_1} dx' \sqrt{-z'} = -\hbar \int_{-z}^0 dz' \sqrt{z'} = \frac{2\hbar}{3}(-z)^{3/2}$$

これらから、 $z = g_1(x - x_1) \ll 0$ において

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &\simeq \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} dx' F(x') + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \sin\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx' F(x') + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \cos\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx' F(x') + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \cos \Theta_1 \end{aligned}$$

$\text{Bi}(z)$ は

$$\begin{aligned} \text{Bi}(z) &\simeq \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \cos\left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} dx' F(x') + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \cos\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx' F(x') + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx' F(x') + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \sin \Theta_1 \end{aligned}$$

(3) と比較すれば、定数は

$$1 + C_R = a\lambda_1, \quad i(1 - C_R) = b\lambda_1 \quad (\lambda = \sqrt{\frac{\hbar g}{\pi}}) \quad (5)$$

と求まります。

(2b) の定数を決めるために、 I_2 でのエアリー方程式の解を求めます。 x_1 付近では $x_1 < x$, $E < V$ なので

$$F(x) = \pm i|F(x)|, \quad |F(x)|^2 = 2m|E - V(x)| \simeq \hbar^2 g_1^3 |x - x_1| = \hbar^2 g_1^2 z$$

積分は

$$\int_{x_1}^x dx' |F(x')| = \hbar g_1 \int_{x_1}^x dx' z^{1/2} = \frac{2\hbar}{3} z^{3/2}$$

そうすると、 $z = x - x_1 \gg 0$ の漸近形から

$$\text{Ai}(z) \simeq \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx' |F(x')|\right]$$

$$\text{Bi}(z) \simeq \sqrt{\frac{\hbar g_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx' |F(x')|\right]$$

x_1 で接続するので (2b) は

$$\psi_2^{(1)}(x) \simeq \frac{C_-^{(1)}}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx |F(x)|\right] + \frac{C_+^{(1)}}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx |F(x)|\right]$$

となり、定数は

$$C_-^{(1)} = \frac{a}{2}\lambda_1, \quad C_+^{(1)} = b\lambda_1 \quad (6)$$

となります。

次に x_2 側を接続します。 I_3 では $x_2 < x$, $V'(x_2) < 0$ なので

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = g_2^3(x_2 - x)\psi \quad (g_2 = (\frac{2m}{\hbar^2}|V'(x_2)|)^{1/3}, \quad z = g_2(x_2 - x))$$

$F(x)$ は

$$F^2(x) \simeq -2mV'(x_2)(x - x_2) = \hbar^2 g_1^2(-z)$$

$$\int_{x_2}^x dx' F(x') = -\hbar \int_0^z dz' \sqrt{-z'} = \frac{2\hbar}{3}(-z)^{3/2}$$

$z \ll 0$ の漸近形から

$$\begin{aligned}\text{Ai}(z) &\simeq \sqrt{\frac{\hbar g_2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{|F(x)|}} \sin\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x dx' |F(x')| + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\lambda_2}{\sqrt{|F(x)|}} \sin \Theta_2 \\ \text{Bi}(z) &\simeq \sqrt{\frac{\hbar g_2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{|F(x)|}} \cos\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x dx' |F(x')| + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\lambda_2}{\sqrt{|F(x)|}} \cos \Theta_2\end{aligned}$$

(4) と比較して

$$C_T = b' \lambda_2, \quad iC_T = a' \lambda_2 \quad (7)$$

I_2 では $x < x_2$, $V'(x_2) < 0$ なので

$$\begin{aligned}|F(x)|^2 &\simeq -2mV'(x_1)|x - x_2| = \hbar^2 g_1^2 z \\ \int_x^{x_2} dx' |F(x')| &= -\hbar \int_z^0 dz' \sqrt{z'} = \frac{2\hbar}{3} z^{3/2}\end{aligned}$$

から、 $z \gg 0$ の漸近形は

$$\begin{aligned}\text{Ai}(z) &\simeq \sqrt{\frac{\hbar g_2}{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} dx' |F(x')|\right] \\ \text{Bi}(z) &\simeq \sqrt{\frac{\hbar g_2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} dx' |F(x')|\right]\end{aligned}$$

このときの (2b) は

$$\psi_2^{(2)}(x) \simeq \frac{C_-^{(2)}}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x dx |F(x)|\right] + \frac{C_+^{(2)}}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x dx |F(x)|\right]$$

なので

$$C_-^{(2)} = b' \lambda_2, \quad C_+^{(2)} = \frac{a'}{2} \lambda_2 \quad (8)$$

となります。

定数が求まりましたが、 $\psi_2^{(1)}$ と $\psi_2^{(2)}$ は同じ関数として繋がっている必要があるので

$$\begin{aligned}&\frac{C_-^{(1)}}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx |F(x)|\right] + \frac{C_+^{(1)}}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx |F(x)|\right] \\ &= \frac{C_-^{(2)}}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x dx |F(x)|\right] + \frac{C_+^{(2)}}{\sqrt{|F(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x dx |F(x)|\right]\end{aligned}$$

左辺の積分範囲は

$$\int_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^x + \int_x^{x_2}$$

によって、右辺の範囲にできるので

$$W = \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx' |F(x')|\right]$$

として

$$\exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx |F(x)|\right] = \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \left(\int_{x_1}^{x_2} - \int_x^{x_2}\right) dx |F(x)|\right] = W \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x dx |F(x)|\right]$$

$$\exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x dx |F(x)|\right] = \exp\left[\frac{1}{\hbar} \left(\int_{x_1}^{x_2} - \int_x^{x_2}\right) dx |F(x)|\right] = W^{-1} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x dx |F(x)|\right]$$

これらから

$$C_-^{(1)} W = C_-^{(2)}, \quad C_+^{(1)} W^{-1} = C_+^{(2)} \quad (9)$$

定数の関係 (5) ~ (8) をまとめると

$$1 + C_R = a\lambda_1, \quad i(1 - C_R) = b\lambda_1$$

$$C_-^{(1)} = \frac{a}{2}\lambda_1, \quad C_+^{(1)} = b\lambda_1$$

$$C_-^{(2)} = b'\lambda_2, \quad C_+^{(2)} = \frac{a'}{2}\lambda_2$$

$$C_T = b'\lambda_2, \quad iC_T = a'\lambda_2$$

(9) を使えば

$$C_T = b'\lambda_2 = C_-^{(2)} = C_-^{(1)} W = \frac{1}{2}(1 + C_R)W$$

$$iC_T = a'\lambda_2 = 2C_+^{(2)} = 2C_+^{(1)} W^{-1} = i2(1 - C_R)W^{-1}$$

よって、透過率と反射率の確率振幅は

$$C_T = \frac{4W}{4 + W^2}, \quad C_R = C_T \frac{4 - W^2}{4W} = \frac{4 - W^2}{4 + W^2}$$

WKB 近似は運動量変化が小さいときに有効なので、 F の x_1 から x_2 の積分は大きな値にならないとすれば S^2 のオーダーまで

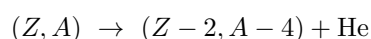
$$C_T \simeq W, \quad C_R \simeq \left(1 - \frac{W^2}{4}\right)\left(1 - \frac{W^2}{4}\right) \simeq 1 - \frac{W^2}{2}$$

というわけで、WKB 近似でのトンネル効果の確率は

$$|C_T|^2 \simeq W^2 = \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx' |F(x')|\right] = \exp[-2\gamma] \quad (10)$$

と求まります。

この結果を α 崩壊に使います。 α 崩壊は原子核崩壊の一種で、崩壊時にヘリウムを放出します。放出されるヘリウムを α 粒子と呼んでいます。簡単に言えば、原子番号 (陽子の数) Z 、質量数 (陽子と中性子の数) A の原子核が



となる現象です。He はヘリウムで $Z = 2$ 、 $A = 4$ (陽子が 2 個、中性子が 2 個のヘリウム 4) です。陽子と中性子は原子核内で束縛されており、原子核の外に出るだけのエネルギーを持ちません。しかし、 α 崩壊ではヘリウムが放出されます。これをトンネル効果によって説明するモデルがガモフ (Gamow) モデルです。

ガモフモデルは単純な発想で作られています。原子核内での陽子と中性子には、核力と呼ばれる強い引力と、電荷を持つ陽子によるクーロン力が働いていると考えられています。核力は陽子、中性子を強く束縛しますが、核力は原子核の大きさ程度で作用し、それを超えると寄与しなくなります。このため、原子核半径あたりからクーロン力に切り替わると考えて、原子核半径でポテンシャルの切り替えを行います。そして、ヘリウムは実際に放出されるので、原子核内で正のエネルギーを持つとされます (負のエネルギーでは井戸型ポテンシャルに閉じ込められているような状況)。

古典的に見ておきます。原点から原子核の半径 r までは引力による負のポテンシャル V_- があるとします。エネルギー E が正ならポテンシャルを超えていきます。一方で、同じ符号の電荷 Q によるクーロン力は

$$f_e = \alpha_e \frac{Q_1 Q_2}{x^2}$$

α_e は比例定数です。なので、このポテンシャルは

$$V_e(x) = - \int_{\infty}^x dx f = \alpha_e \frac{Q_1 Q_2}{x}$$

これが原子核半径 r 付近で V_- より強く寄与しだし、ポテンシャルを正にするとします。このとき、 $E < V_e(r)$ であるなら、粒子はポテンシャルを超えられなく閉じ込められます。 $V_e > E$ があると、運動エネルギー K が $K = E - V_e < 0$ として負の値を持つため、古典的には先に進むことが禁止されるからです。同じ電荷同士では反発するのでポテンシャルが壁になるのは変に思えますが、最初からクーロン力のみが作用しているなら

$$E = K + \alpha_e \frac{Q_1 Q_2}{x} \quad (11)$$

として、ポテンシャルが x の増加で減少し運動エネルギーが増加する領域に粒子がいるのに対して、今はその領域にいないためです。

このように、古典的には粒子は原子核に閉じ込められた状況です。しかし、クーロン力は減少するので、量子力学ではトンネル効果によって $V_e(r') = E$ となる地点に抜けていけます。そうして、(11) の領域にたどり着けば、今度はクーロン力の反発によって遠くへ飛び出して行きます。これがガモフモデルの考え方です。これと WKB 近似を合わせます。

細かいことを言えば、球対称なポテンシャルでの 3 次元シュレーディンガー方程式から始めるべきですが、最初から 1 次元としても話は同じなので、1 次元シュレーディンガー方程式 (1) とします。

原子番号 Z の原子核の電荷 Ze (e は素電荷) と電荷 Q の粒子によるクーロン力は

$$f_e = \alpha_e \frac{ZeQ}{x^2}$$

このポテンシャルは

$$V(x) = - \int_{\infty}^x dx F = \alpha_e \frac{ZeQ}{x} = \frac{\rho}{x}$$

α_e は例えば SI なら $\alpha_e = 1/4\pi\epsilon_0$ です。これが x_1 から発生しているとしたのがガモフモデルです (原点から x_1 までは負のポテンシャルのみ)。 x_2 で E, V の大きさが逆になるので $E = V(x_2)$ です。なので、領域 I_2 での F は

$$F_2(x) = \sqrt{2m\left(\frac{\rho}{x} - E\right)}$$

これによる W の exp 内の積分は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{x_1}^{x_2} dx F_2(x) = \sqrt{2mE} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{\rho}{Ex} - 1} \\ &= \sqrt{2mE} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{x_2}{x} - 1} \\ &= \sqrt{2mEx_2} \int_{x_1/x_2}^1 dx' \sqrt{\frac{1}{x'} - 1} \quad (x' = \frac{x}{x_2}, dx' = \frac{1}{x_2} dx) \end{aligned}$$

x_2 で $E = V(x_2)$ になるので $E = \rho/x_2$ です。積分は

$$\begin{aligned} \int dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} &= -2 \int d\theta \sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} \quad (x = \cos^2 \theta, dx = -2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= -2 \int d\theta \sin \theta \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= -2 \int d\theta \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta \\ &= \sin \theta \cos \theta - \theta \end{aligned}$$

積分範囲は $\phi = \arccos \sqrt{x_1/x_2}$ から 0 なので

$$\int_{x_1/x_2}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = -(\sin \phi \cos \phi - \phi)$$

逆三角関数の関係

$$\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2}$$

から

$$\sin \phi \cos \phi - \phi = \sqrt{1 - \frac{x_1}{x_2}} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \arccos \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1^2}{x_2^2}} - \arccos \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

よって

$$\begin{aligned} S_2 &= \sqrt{2mE} x_2 \int_{x_1/x_2}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = -\sqrt{2mE} (x_2 \sqrt{\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1^2}{x_2^2}} - x_2 \arccos \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}) \\ &= \sqrt{2mE} (x_2 \arccos \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \sqrt{x_1(x_2 - x_1)}) \end{aligned}$$

x_2 が x_1 より十分大きいとすれば

$$\arccos y \simeq \frac{\pi}{2} - y \quad (y \ll 1)$$

と近似できるので

$$S_2 \simeq \sqrt{2mE} (x_2 (\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}) - \sqrt{x_1 x_2}) = \sqrt{2mE} (\frac{\pi}{2} x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2})$$

x_1^2 は無視しています。 x_2 を消すように変形すれば

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \sqrt{2mE} x_2 &= \frac{\pi}{2} \sqrt{2mE} \frac{\rho}{E} = \frac{\pi \rho}{2} \sqrt{\frac{2m}{E}} \\ 2\sqrt{2mE} \sqrt{x_1 x_2} &= 2\sqrt{2mE} \sqrt{\frac{\rho}{E} x_1} = 2\sqrt{2\rho m} \sqrt{x_1} \end{aligned}$$

となるので

$$S_2 = \frac{\pi\rho}{2} \sqrt{\frac{2m}{E}} - 2\sqrt{2\rho m}\sqrt{x_1}$$

と書けます。透過率 (10) に入れれば

$$|C_T|^2 = \exp[-2\frac{S_2}{\hbar}] = \exp[-2(\frac{\pi\rho}{2\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}} - 2\sqrt{\frac{2\rho}{\hbar^2}m}\sqrt{x_1})]$$

となります。ちなみに、 $\gamma = S_2/\hbar$ はガモフ因子と呼ばれます。

ウラン ($Z = 92, A = 238$) で計算してみます。ヘリウム 4 は陽子が 2 個、中性子が 2 個なので $Q = 2e$ として

$$\rho = \alpha_e Z e Q = 2\alpha_e Z e^2$$

これによって

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{S_2}{\hbar} &= \frac{\pi\rho}{2\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} - 2\sqrt{\frac{2\rho}{\hbar^2}m}\sqrt{x_1} = \frac{\alpha_e Z e^2}{\hbar} \pi \sqrt{\frac{2m}{E}} - 4\sqrt{\frac{\alpha_e Z e^2}{\hbar^2}m}\sqrt{x_1} \\ &= Z \frac{\alpha_e e^2}{\hbar c} c \pi \sqrt{\frac{2m}{E}} - 4\sqrt{\frac{c}{\hbar} Z \frac{\alpha_e e^2}{\hbar c} m}\sqrt{x_1} \end{aligned}$$

c は光速です。最後の書き換えは

$$\frac{\alpha_e e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

となる量がよく使われるからです。これは微細構造定数と呼ばれ、例えば SI で行えば

$$\frac{\alpha_e e^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{4\pi} \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{8.9 \times 10^{-12}} \frac{1}{1 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \simeq \frac{1}{137}$$

この値を入れて

$$\gamma = \frac{Z-2}{137} c \pi \sqrt{\frac{2m}{E}} - 4\sqrt{\frac{c}{\hbar} \frac{Z-2}{137} m}\sqrt{x_1}$$

ヘリウム 4 の放出で原子核は $Z-2$ になるので Z を $Z-2$ に変えています。大体の値として、 $x_1 = 9 \times 10^{-15}$ [m]、ヘリウム 4 の質量は 6×10^{-27} [kg]、エネルギーは 7×10^{-13} [J] です。これらの値を入れると $\gamma \simeq 40$ となるので、確率は

$$|C_T|^2 = e^{-80} = 2 \times 10^{-35}$$

また、 x_2 はエネルギーから

$$x_2 = \frac{\rho}{E} = 2(Z-2) \frac{\alpha_e e^2 \hbar c}{\hbar c} \frac{\hbar c}{E} \simeq \frac{180 \hbar c}{137 E} \simeq 6 \times 10^{-16} [\text{m}]$$

となります。実際の実験で見てるのは確率そのものでなく、崩壊率と呼ばれる量なので、それを導入します。
原子核の半径は x_1 なので、 $2x_1$ を速度 v で移動する時間は

$$\Delta t = \frac{2x_1}{v}$$

この間に N_0 個の粒子がポテンシャルに衝突し、いくつかが通り抜けて行くとします。ポテンシャルを通り抜けていく個数は $N_0 |C_T|^2$ なので、粒子数の減少 ΔN は

$$\Delta N = -N_0 \Gamma \Delta t \quad (|C_T|^2 = \Gamma \Delta t)$$

Γ を崩壊率と呼び、時間あたりの確率です (ΔN は時間 Δt で崩壊する個数)。この式を微分方程式にすると

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$$

個数が半分になる時間を半減期と呼び、その時間を τ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} &= N_0 e^{-\Gamma \tau} \\ \log \frac{N_0}{2} &= \log N_0 - \Gamma \tau \\ -\log 2 &= -\Gamma \tau \\ \tau &= \Gamma^{-1} \log 2 \end{aligned}$$

と与えられます。

というわけで、今の崩壊率は

$$\Gamma = \frac{|C_T|^2}{\Delta t} = \frac{v}{2x_1} e^{-2\gamma} \simeq \frac{v}{2x_1} e^{-80}$$

飛んでいくヘリウム 4 の運動エネルギーを E と同じと設定してしまえば

$$\frac{v}{2x_1} = \frac{1}{x_1} \sqrt{\frac{E}{2m}} \simeq 8 \times 10^{20} \quad (E = \frac{1}{2} m v^2)$$

となり

$$\Gamma = \frac{1}{x_1} \sqrt{\frac{E}{2m}} e^{-80} \simeq 2 \times 10^{-14} [\text{s}^{-1}]$$

半減期は

$$\tau = \Gamma^{-1} \log 2 \simeq 2 \times 10^{13} [\text{s}] \simeq 6 \times 10^5 \text{年}$$

実験では 4×10^9 年程度です。大分離した値になりましたが、エネルギーや x_1 の値を少し変えるだけで大きく変動します (10^9 年まで簡単に増やせる)。なので、値を求めるという点では不確かさの大きいモデルとなっています。