経路積分〜準古典近似〜

積分の漸近展開、多変数のガウス積分、汎関数微分の説明をして、最後に経路積分の準古典近似の計算に適用させます。
計算の方法を見ていくだけなので、物理の話はしてません。準古典近似も計算例として使うだけなので詳しい話はしません。
いくつか記号が重なっていますが混乱はしないと思います。

- 積分の漸近展開

　積分の漸近展開 (積分を級数を使って近似的に書くこと) について見ていきます。まともに実行できない積分は多々あるので、それを近似的に求めようという話です。

　例えば、ガウス積分 $(a > 0)$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\frac{1}{2}ax^2]$$

は厳密に実行できて

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\frac{1}{2}ax^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}$$

しかし、ガウス積分を

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\frac{1}{2}ax^2 - \epsilon x^4]$$

と変更すると計算できなくなります $(\epsilon \geq 0)$。

　これを $\epsilon \to 0$ の極限で計算するために exp 部分を展開することを考えます。exp の展開は

$$\exp[-\epsilon x^4] = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \epsilon^n x^{4n} \tag{1}$$

なので

$$\exp[-\frac{1}{2}ax^2 - \epsilon x^4] = \exp[-\frac{1}{2}ax^2] \exp[-\epsilon x^4] = \exp[-\frac{1}{2}ax^2]\big(1 - \epsilon x^4 + \frac{1}{2}\epsilon^2 x^8 + \cdots\big)$$

そうすると、積分は

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2/2}\big(1 - \epsilon x^4 + \frac{1}{2}\epsilon^2 x^8 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\epsilon^n x^{4n} + \cdots\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} - \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-ax^2/2} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2/2} x^8 + \cdots \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\Big(1 - \epsilon I_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^4 e^{-ax^2/2} + \frac{1}{2}\epsilon^2 I_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2/2} x^8 + \cdots\Big)
\end{aligned}
$$

第 2 項以降の積分は b の微分によって

$$
J_n = \frac{d^n}{db^n}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2/2+bx}\big|_{b=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^n e^{-ax^2/2}
$$

と書き換えられ

$$
\begin{aligned}
J_n &= \frac{d^n}{db^n}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2/2+bx}\big|_{b=0} \\
&= \frac{d^n}{db^n}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \ \exp\big[-\frac{1}{2}a(x-b)^2 + \frac{b^2}{2a}\big]\big|_{b=0} \\
&= \frac{d^n}{db^n}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ \ \exp\big[-\frac{1}{2}ax'^2 + \frac{b^2}{2a}\big]\big|_{b=0} \\
&= I_0 \frac{d^n}{db^n}\exp\big[\frac{b^2}{2a}\big]\big|_{b=0}
\end{aligned}
$$

1 つずつ計算すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{db}\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = \frac{b}{a}\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = 0 \\
&\frac{d^2}{db^2}\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = \big(\frac{1}{a} + \frac{b^2}{a^2}\big)\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = \frac{1}{a} \\
&\frac{d^3}{db^3}\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = \big(\frac{b}{a^2} + \frac{2b}{a^2} + \frac{b^3}{a^3}\big)\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = 0 \\
&\frac{d^4}{db^4}\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = \big(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{2}{a^2} + \frac{2b^2}{a^2} + \frac{3b^2}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}\big)\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = \frac{3}{a^2}
\end{aligned}
$$

となるので規則性を見つけられますが、exp を展開して微分しても同じになることを利用すればすぐに

$$
\frac{d^n}{db^n}\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0} = \frac{d^n}{db^n}\big(1 + \frac{b^2}{2a} + \cdots\big)\big|_{b=0} = \frac{d^n}{db^n}\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{m!}\frac{b^{2m}}{(2a)^m}\big|_{b=0}
$$

これによって

$$\frac{d^n}{db^n}\frac{1}{m!}\frac{b^{2m}}{(2a)^m}=\frac{d^{n-1}}{db^{n-1}}(\frac{2m}{m!}\frac{b^{2m-1}}{(2a)^m})=\frac{d^{n-2}}{db^{n-2}}(\frac{2m(2m-1)}{m!}\frac{b^{2m-2}}{(2a)^m})=\cdots=\frac{(2m)!}{m!}\frac{1}{(2a)^m}$$

これから、例えば $n=2$ なら

$$\frac{d^2}{db^2}\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0}=\frac{d^2}{db^2}\big(1+\frac{b^2}{2a}+\frac{1}{2}\frac{b^4}{4a^2}+\cdots\big)\big|_{b=0}=\frac{1}{a}$$

となっているので、展開した各項に微分が $n=2m$ 回作用するときに b が残らないことも分かります。よって

$$\frac{d^{2m}}{db^{2m}}\exp[\frac{b^2}{2a}]\big|_{b=0}=\frac{1}{m!}\frac{(2m)!}{(2a)^m}$$

というわけで

$$J_{2m}=\frac{1}{m!}\frac{(2m)!}{(2a)^m}I_0\qquad(m=1,2,\ldots)$$

これを I に入れれば

$$\begin{aligned}I\simeq\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}(1-\epsilon J_4+\frac{1}{2}\epsilon^2J_8+\cdots)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}(1-\epsilon\frac{3}{a^2}+\frac{1}{2}\epsilon^2\frac{105}{a^4}+\cdots)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}(1-\epsilon\alpha_1+\epsilon^2\alpha_2+\cdots+\epsilon^n\alpha_n+\cdots)\end{aligned}$$

α_n は J_{2m} の m を $m=2n$ にして (1) の展開時の $(-1)^n/n!$ をつければいいので

$$\alpha_n=(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{(2n)!}\frac{(4n)!}{(2a)^{2n}}=(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{(4n)!}{(2n)!2^{2n}}\frac{1}{a^{2n}}=(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{(4n-1)!!}{a^{2n}}$$

証明はしませんが、これは I の漸近展開として成立しています。証明は漸近展開の判定式

$$|I-\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\epsilon_n|\leq\frac{1}{(N+1)!}\int_{-\infty}^{\infty}dx\ x^{4(N+1)e^{-ax^2/2}}$$

を示せばいいです。また、この展開は $\epsilon>0$ に対して発散しています (どこかの値に収束しない)。収束半径 R がダランベールの判定法から

$$
\begin{aligned}
R = |\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}| &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\frac{(4n)!}{(2n)!2^{2n}a^{2n}}\frac{(n+1)!(2n+2)!2^{2n+2}a^{2n+2}}{(4n+4)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)(2n+2)(2n+1)a^2}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4(2n+2)a^2}{8(4n+3)(4n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{(4n+3)(4n+1)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

と求まるので、$\epsilon > R$ であるために $\epsilon > 0$ では発散します。

次に、主な寄与を取り出し、その周りで展開することを考えます。そのために

$$
I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ g(x)e^{f(x)/\lambda}
$$

という積分を考えます。関数 $f(x), g(x)$ は実数とし、$f(x)$ は x_0 で極大値を持つとします。そして、λ が正で十分小さい値で、$g(x)e^{f(x)/\lambda}$ は極大値の地点で急激に値が大きくなるとします (極大値で最大になりそこから離れると値が急激に下がっていく)。例えば $f(x)=\sin x$ とすれば分かりやすいです。このように設定すれば、極大値付近で展開すれば十分な近似が得られることになります (関数の値を足し合わせたものが積分だから)。

$f(x)$ は x_0 周りで

$$
f(x) \simeq f(x_0) + (x-x_0)\frac{df}{dx}|_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0}
$$

と展開します (これ以降の項は無視)。これに極大値の条件

$$
\frac{df}{dx}|_{x=x_0} = 0\ ,\ \frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0} < 0
$$

を入れて

$$
f(x) \simeq f(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0}
$$

そして、$g(x)$ も $g(x_0)$ としてしまい

$$
g(x)e^{f(x)/\lambda} \simeq g(x_0)\exp\big[\frac{1}{\lambda}\big(f(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0}\big)\big]
$$

これを積分にいれて

$$
\begin{aligned}
I &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} dx\ g(x_0)\exp\big[\frac{1}{\lambda}\big(f(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0}\big)\big] \\
&= g(x_0)e^{f(x_0)/\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\big[\frac{1}{2\lambda}(x-x_0)^2\frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0}\big] \\
&= g(x_0)e^{f(x_0)/\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp\big[-\frac{1}{2\lambda}x'|f''(x_0)|\big] \qquad \big(\frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0}=f''(x_0)<0\big)
\end{aligned}
$$

これはただのガウス積分なので

$$
I \simeq\ g(x_0)e^{f(x_0)/\lambda}\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{|f''(x_0)|}} \qquad (\lambda \ll 1)
$$

これはピーク幅が小さければいい近似となります。

これを拡張して、同じ形の積分を複素数とし、複素数の積分

$$
I = \int_C g(z)e^{f(z)/\lambda}dz \qquad (\lambda \ll 1)
$$

を考えます。$g(z), f(z)$ は複素数の解析関数、C は複素平面上の経路とします。$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ として実部と虚部に分けます $(z=x+iy)$。$z=z_0$ で実部 u が極値を持つとして

$$
\frac{\partial u}{\partial x}|_{z=z_0} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{z=z_0} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{df(z)}{dz}|_{z=z_0} = 0
$$

そして、u,v によるコーシー・リーマンの方程式

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}
$$

から

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0
$$

この関係のために、実軸 $\mathrm{Re}z=x$ に沿って u が $z=z_0$ で極大値になるとして

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{z=z_0} < 0
$$

と設定すると、虚軸 $\mathrm{Im}z=y$ に沿っては

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{z=z_0} > 0
$$

と極小値になります。つまり、点 z_0 は実軸に沿っては極大値、虚軸に沿っては極小値を持つので、この点は鞍点 (saddle point) です。

関数 $f(z)$ を鞍点 z_0 周りで

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 \frac{d^2 f}{dz^2}\Big|_{z=z_0}$$

と展開します。$g(z)$ を $g(z_0)$ として、展開したものを積分に入れれば

$$\begin{aligned}
I &\simeq \int_C dz\ g(z_0) \exp\Big[\frac{1}{\lambda}(f(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0))\Big] \\
&= g(z_0) \exp\Big[\frac{1}{\lambda} f(z_0)\Big] \int_C dz\ \ \exp\Big[\frac{1}{2\lambda}(z - z_0)^2 f''(z_0)\Big]
\end{aligned}$$

$z' = z - z_0$ を極形式にして

$$z' = z - z_0 = re^{i\alpha}$$

今は鞍点付近を考えるので、z' の経路 C' は鞍点を通るようにし、角度 α は経路 C' が鞍点と交差する角度として固定します (z_0 を原点としてそこに進入する角度)。積分経路はコーシーの積分定理で変更できるので、α は任意に選べます。α は定数となっているので積分に引っかからなく

$$dz' = dz = e^{i\alpha} dr$$

r は $-\infty \sim +\infty$ とします。$f''(z_0)$ も極形式にして

$$f''(z_0) = |f''(z_0)|e^{i\beta}$$

β は z_0 に対応する定数です。そうすると、積分の exp 内は

$$\frac{1}{2\lambda}(z - z_0)^2 f''(z_0) = \frac{1}{2\lambda} r^2 |f''(z_0)| e^{i(\beta + 2\alpha)}$$

このとき、角度 α の経路の選択による任意性を使って

$$e^{i(\beta+2\alpha)} = -1 \qquad (\beta + 2\alpha = \pi)$$

と選びます (この選び方がこの exp 部分の減衰を最も早くする)。これで積分はガウス積分になるので

$$\begin{aligned}
I &\simeq g(z_0) e^{f(x_0)/\lambda} e^{i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dr\ \ \exp\Big[-\frac{1}{2\lambda} r^2 |f''(z_0)|\Big] \\
&= g(z_0) e^{f(x_0)/\lambda} e^{i\alpha} \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{|f''(z_0)|}} \qquad (\alpha = \frac{\pi - \beta}{2})
\end{aligned}$$

これは鞍点周りの経路で近似しているので鞍点法 (saddle point method) と呼ばれます。

- 汎関数の微分と展開

汎関数 F は関数 q を変数に持つ関数で $F[q]$ のように書かれ、一般的には

$$F[q] = \int dt\ f(q(t))$$

のような形をしています (汎関数については解析力学の「変分問題」や場の量子論の「古典場」を見てください)。簡単に言えば、q の関数形によって右辺の値は変わるから左辺は関数 q に依存しているということです。汎関数の微分は汎関数微分 $\delta/\delta q(t)$ によって

$$\frac{\delta F[q]}{\delta q(t)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F[q(t') + \epsilon\delta(t'-t)] - F[q(t')]}{\epsilon}$$

と定義され、特に

$$\frac{\delta q(t')}{\delta q(t)} = \delta(t'-t)$$

となっています。連鎖則は

$$\frac{\delta}{\delta q(t)} = \int dt_1 \frac{\delta q'(t_1)}{\delta q(t)}\frac{\delta}{\delta q'(t_1)}$$

$$\frac{\delta}{\delta q(t)}\int dt_1 q(t_1)q'(t_1) = q(t)$$

積分範囲は変数 t_i の範囲内でとります。汎関数を q の累乗 q^n と展開係数 a_n を使って

$$F[q] = \int dt \sum_n a_n q^n(t)$$

と書いたとします (t が積分で落ちるので q に依存している)。これを汎関数微分すると定義から

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F[q]}{\delta q(t)} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F[q(t') + \epsilon\delta(t'-t)] - F[q(t')]}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int dt' \sum_n a_n\Big(\big(q(t') + \epsilon\delta(t'-t)\big)^n - q^n(t')\Big) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int dt' \sum_n a_n\big(q^n(t') + \epsilon n q^{n-1}(t')\delta(t'-t) + \cdots - q^n(t')\big) \\
&= \int dt' \sum_n n a_n q^{n-1}(t')\delta(t'-t) \\
&= \sum_n n a_n q^{n-1}(t)
\end{aligned}$$

よって、任意の関数を展開したものとして

$$F[q] = \int dt\ g(q(t))$$

$$g(q(t)) = \sum_n a_n q^n(t)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial t} = \sum_n n a_n q^{n-1}(t)$$

とすれば

$$\frac{\delta F[q]}{\delta q(t)} = \int dt' \frac{\partial g}{\partial t'} \delta(t'-t) = \frac{\partial g}{\partial t} \tag{2}$$

g は関数 q に依存しているのではなく、$q(t)$ を通して t に依存しているので関数です。関数 $f(q(t'))$ の $q(t)$ での汎関数微分は定義を使うことで

$$\begin{aligned}\frac{\delta f(q(t'))}{\delta q(t)} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(q(t') + \epsilon\delta(t'-t)) - f(q(t'))}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\big(f(q(t')) + \epsilon \frac{\partial f(t')}{\partial q(t')}\delta(t'-t) - f(q(t'))\big) \\ &= \frac{\partial f(t')}{\partial q(t')}\delta(t'-t)\end{aligned}$$

となります。

汎関数 $F[g]$ の関数 f 周りのテーラー展開は

$$\begin{aligned}F[g] = F[f] &+ \int dt_1 (g(t_1) - f(t_1)) \frac{\delta F}{\delta g(t_1)}\Big|_{g=f} \\ &+ \frac{1}{2}\int dt_1 dt_2 (g(t_1) - f(t_1))(g(t_2) - f(t_2)) \frac{\delta^2 F}{\delta g(t_1)\delta g(t_2)}\Big|_{g=f} + \cdots \\ = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} &\int dt_1 \cdots dt_n \big(g(t_1) - f(t_1)\big)\cdots\big(g(t_n) - f(t_n)\big) \frac{\delta^n F}{\delta g(t_1)\cdots\delta g(t_n)}\Big|_{g=f}\end{aligned} \tag{3}$$

- 多変数のガウス積分

  積分として

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_N \exp\big[\frac{i}{\hbar}\sum_{m,n=1}^{N} x_m K_{mn} x_n\big]$$

という形をしたものを実行します。これはガウス積分の多変数版です。$x_1, \ldots, x_N$ は実数の $N \times 1$ 行列 x をつくり、K_{mn} はエルミート行列とします。この積分を実行します。行列 x をユニタリー行列 U によって

$x=Uy$ と変換します。y も実数行列なので、$x^t=x^\dagger$ (t は転置) から、$x^t=y^tU^\dagger$ となります。これを使うことで

$$\sum_{m,n=1}^{N} x_mK_{mn}x_n = x^tKx = (Uy)^tKUy = y^tU^\dagger KUy$$

エルミート行列をユニタリー行列で挟むと、実数の固有値による対角行列 K' にできるので (数学の「対角化」参照)、その固有値を λ_i として

$$y^tU^\dagger KUy = y^tK'y = \sum_{n=1}^{N} y_nK'_{nn}y_n = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n(y^ty)_n = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n y_n^2 \quad (K'_{nn}=\lambda_n)$$

そして、$x=Uy$ なので積分の変数変換でのヤコビアンは $\det U$ です。ユニタリー行列の行列式は、行列の転置 A^t と複素共役 A^* の行列式が

$$\det A = \det A^t \ , \ \det A^* = (\det A)^*$$

となっているので

$$\det U^\dagger = (\det U^t)^* = (\det U)^*$$
$$\det[U^\dagger U] = \det 1 = 1 \ \Leftrightarrow \ 1 = \det[U^\dagger U] = \det U^\dagger \det U = |\det U|$$

から、$|\det U|=1$ となり (絶対値なので $e^{i\theta}$ のような位相が余分にいる可能性もあるが、ユニタリー行列に吸収できる)、変数変換で変更されず $dx_1\cdots dx_N = dy_1\cdots dy_N$ です。よって

$$\begin{aligned} I &= \int dy_1\cdots dy_N \exp\big[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n y_n^2\big] \\ &= \int dy_1\cdots dy_N \exp\big[i\frac{\lambda_1}{\hbar}y_1^2\big] + \cdots + \int dy_N \exp\big[i\frac{\lambda_N}{\hbar}y_N^2\big]\cdots \end{aligned}$$

これはガウス積分 (a は正の実数)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{iax^2} = \sqrt{\frac{i\pi}{a}}$$

が N 個あるだけなので

$$I = \prod_{n=1}^{N}(i\pi\frac{\hbar}{\lambda_n})^{1/2} = (i\pi\hbar)^{N/2}\prod_{n=1}^{N}(\frac{1}{\lambda_n})^{1/2}$$

K' の行列式を見ると

$$\det K' = \det[U^\dagger K U] = \det U^\dagger \det K \det U = \det K$$

K' は対角化されているので、行列式は

$$\det K' = \prod_{n=1}^{N} \lambda_n = \det K$$

これから

$$\prod_{n=1}^{N} (\frac{1}{\lambda_n})^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_2}\cdots\frac{1}{\lambda_N}} = (\det K)^{-1/2}$$

なので

$$I = (i\pi\hbar)^{N/2}(\det K)^{-1/2}$$

というわけで

$$\begin{aligned}\int dx_1 \cdots dx_N \exp\big[\frac{i}{\hbar}\sum_{m,n=1}^{N} x_m K_{mn} x_n\big] &= (i\pi\hbar)^{N/2}\prod_{n=1}^{N}(\frac{1}{\lambda_n})^{1/2} \\ &= (i\pi\hbar)^{N/2}(\det K)^{-1/2}\end{aligned}$$

となります。ここでは $\exp[ixMx]$ としていますが、$\exp[-ixMx]$ でもガウス積分が

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-iax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}$$

となるだけなので、定数部分が変わるだけです。

この結果は K の固有値 λ が正の実数の場合に正しいことに注意してください。負の固有値がいる場合はガウス積分において a の符号を反転させるための $e^{i\pi}$ がくっつくので、ガウス積分の結果に、負の固有値が k 個なら、その k 個分の $e^{i\pi k/2}$ がくっつきます。ただ、ほとんどの場合で負の固有値を持っているような状況は出てこないので、あまり気にしなくても平気です。

これは連続的な場合に拡張できます。連続極限にするので、O を時間に依存するエルミート演算子として、経路積分の測度 $\mathcal{D}x = dx_1 \cdots dx_n$ $(n \to \infty)$ を使って

$$\int \mathcal{D}x \exp\big[\frac{i}{\hbar}\int dt_1 dt_2\ x(t_1)O(t_1,t_2)x(t_2)\big]$$

としたとき、t_1, t_2 積分の構造が行列のものと同じになっています (行列の内積と関数の内積)。なので、結果をそのまま適用させて

$$\int \mathcal{D}x \exp\big[\frac{i}{\hbar}\int dt_1 dt_2\ x(t_1)O(t_1,t_2)x(t_2)\big] = C(\det O)^{-1/2} \tag{4}$$