## 小澤の不等式

ハイゼンベルクの不確定性関係を再定式化した小澤の不等式を求めます。あまり細かいことには触れずにいきます (特に量子測定の話)。
小澤の不等式が出てくるまでに求められた不等式もついでにいくつか見ていきます。

ハイゼンベルクの不確定性関係から始めます。1927 年にハイゼンベルクが示したのは、位置 $x$ の測定における測定誤差 $\epsilon(x)$ と、その測定によって生じた運動量 $p$ への擾乱 (disturbance)$\eta(p)$ による

$$\epsilon(x)\eta(p) \geq \hbar \tag{1}$$

という関係です。ハイゼンベルクはガンマ線顕微鏡の思考実験からこれを示しました。これについては量子力学の読み物とかによく書いてある話なので省きます。

次に、ケナード (Kennard) が、1927 年に位置と運動量の演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ の標準偏差

$$\sigma(X) = \sqrt{\langle\psi|\hat{X}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle^2} \tag{2}$$

による

$$\sigma(x)\sigma(p) \geq \frac{\hbar}{2}$$

を示し (ケナードの不等式)、1929 年にロバートソン (Robertson) によって任意の観測量 (observable。演算子ではエルミート演算子) に一般化され

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}\big|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\big| \tag{3}$$

として成立することが示されました (ロバートソンの不等式)。これは「不確定性関係」で示したものです。この 2 つの不等式がハイゼンベルクの不確定性関係と異なっているのは、標準偏差 $\sigma$ が任意の状態 $|\psi\rangle$ のみに依存している点です。つまり、測定側の事情による測定誤差と測定による擾乱の式になっていない点です。ロバートソンの不等式は、初期のころはハイゼンベルクの不確定性関係の数学的な定式化と解釈されていたようですが、現在ではその解釈はされていなく、量子的な対象が持つ測定側の事情とは関係のない性質 (量子的なゆらぎとよく表現される) として解釈されています (状態 $|\psi\rangle$ にのみ依存しているから)。というわけで、現在は量子論で不確定性関係と言ったときは大体はロバートソンの不等式のことを指していて、ハイゼンベルクの不確定性関係 (1) を指していません (量子論の理論的な関係がロバートソンの不等式で、測定との関連がハイゼンベルクの不確定性関係だから)。

このようにロバートソンの不等式によって量子的な対象の定式化は出来ているので、それを踏まえて測定誤差に対する定式化を考え直します。そして、量子論の中に測定を組み込みます。これは、測定の対象が量子的なものなので、測定側も量子的な取り扱いをするということです (これがハイゼンベルクの思考実験との本質的な違い)。

まず、量子論の中に組み込むので、測定に対応する状態を設定します。これは測定装置の状態 $|\phi_{app}\rangle$ を定義することで組み込みます。これに伴なって、観測量 $A, B$ に対応する測定装置での観測量も定義します。次に測定を行うということですが、これは測定は対象に影響を与えてその反応を見るものということから、対象と測定による相互作用として組み込みます。

これで準備が出来たので、状況を作ります。まず、観測量として $A, B$ を用意し、それに対応する測定装置の観測量を $\alpha, \beta$ とします (演算子で $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$)。測定する前の時間 $t$ での状態は $|\phi\rangle$ とします。このとき測定装置の状態 $|\phi_{app}\rangle$ もいる

ので、$|\phi\rangle$ と $|\phi_{app}\rangle$ を合わせた状態を $|\psi\rangle$ とします (数学的にはテンソル積によって $|\psi\rangle = |\phi\rangle\otimes|\phi_{app}\rangle = |\phi\otimes\phi_{app}\rangle$)。今は測定前と測定後の差を知りたいので、測定前を $A_{in}, B_{in}, \alpha_{in}, \beta_{in}$、測定後を $A_{out}, B_{out}, \alpha_{out}, \beta_{out}$ とします (演算子としては $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\phi_{app}\rangle$ に合わせて、$\hat{A}_{in} = \hat{A}\otimes\hat{I},\ \hat{\alpha}_{in} = \hat{I}\otimes\hat{\alpha}$。$\hat{I}$ はそれぞれのヒルベルト空間での恒等演算子)。

測定に対応する相互作用を導入しますが、これは単純に考えて、相互作用の影響を持つユニタリー演算子 $\hat{U}$ によって表現できるとします。つまり、測定後はハイゼンベルク描像において

$$\hat{A}_{out} = \hat{U}^\dagger \hat{A}_{in}\hat{U}\ ,\ \hat{\alpha}_{out} = \hat{U}^\dagger\hat{\alpha}_{in}\hat{U}$$

とします ($B, \beta$ も同様)。これから分かるように $\hat{U}$ は測定後の時間 $t + \Delta t$ への時間発展演算子です。具体的に何かを求めるということはしないので、$\hat{U}$ はこれ以降出てきません。

まずは、$A, B$ を同時に測定する状況を考えます。先に記号をいくつか定義しておきます。$\hat{\alpha}_{out}$ と $\hat{A}_{in}$ の差と $\hat{\beta}_{out}$ と $\hat{B}_{in}$ の差を

$$\hat{\alpha}_{out} = \hat{A}_{in} + \hat{N}(A)$$

$$\hat{\beta}_{out} = \hat{B}_{in} + \hat{N}(B)$$

と書ける演算子 $\hat{N}$ を導入します。$\hat{N}$ は noise operator と呼ばれます。これによって

$$\epsilon(A) = \sqrt{\langle\psi|(\hat{\alpha}_{out} - \hat{A}_{in})^2|\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle} \tag{4a}$$

$$\epsilon(B) = \sqrt{\langle\psi|(\hat{\beta}_{out} - \hat{B}_{in})^2|\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi|\hat{N}^2(B)|\psi\rangle} \tag{4b}$$

という記号も定義します。これは測定前の観測量と測定後の測定装置での観測量の差なので、測定誤差と言えます。

今の測定において

$$\langle\psi|\hat{\alpha}_{out}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}_{in}|\psi\rangle \tag{5a}$$

$$\langle\psi|\hat{\beta}_{out}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{B}_{in}|\psi\rangle \tag{5b}$$

という関係が成立していることを仮定します。これは unbiased condition と呼ばれます。測定前の $A, B$ と測定後の $\alpha, \beta$ の期待値の差が 0 という条件で、このような測定が可能という仮定です (測定結果から測定前の期待値が分かる)。

計算で必要な関係を出します。任意の状態 $|\Psi\rangle$ に対して

$$\langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle = 0 \tag{6}$$

となる演算子を考えます。これは unbiased condition

$$\langle\psi|\big(\hat{\alpha}_{out} - \hat{A}_{in}\big)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{N}(A)|\psi\rangle = 0\ ,\ \langle\psi|\big(\hat{\beta}_{out} - \hat{B}_{in}\big)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{N}(B)|\psi\rangle = 0$$

と同じ形です。ここで、もう 1 つ任意の状態 $|\Psi'\rangle$ を導入して

$$a_1 = \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle + \langle\Psi'|\hat{O}|\Psi'\rangle + \langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle + \langle\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle$$
$$a_2 = \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle + \langle\Psi'|\hat{O}|\Psi'\rangle - \langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle - \langle\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle$$
$$a_3 = \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle + \langle i\Psi'|\hat{O}|i\Psi'\rangle + \langle\Psi|\hat{O}|i\Psi'\rangle + \langle i\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle$$
$$a_4 = \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle + \langle i\Psi'|\hat{O}|i\Psi'\rangle - \langle\Psi|\hat{O}|i\Psi'\rangle - \langle i\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle$$

というのを作れば

$$\begin{aligned}
a_1 - a_2 - ia_3 + ia_4 &= 2\langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle + 2\langle\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle - 2i\langle\Psi|\hat{O}|i\Psi'\rangle - 2i\langle i\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle \\
&= 2\langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle + 2\langle\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle + 2\langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle - 2\langle\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle \qquad (\langle i\Psi| = -i\langle\Psi|,\ |i\Psi\rangle = i|\Psi\rangle) \\
&= 4\langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle
\end{aligned}$$

なので

$$\langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle = \frac{1}{4}(a_1 - a_2 - ia_3 + ia_4)$$

というのが出てきます。$a_1$ は項をまとめると

$$\begin{aligned}
a_1 &= \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle + \langle\Psi'|\hat{O}|\Psi'\rangle + \langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle + \langle\Psi'|\hat{O}|\Psi\rangle \\
&= \big(\langle\Psi| + \langle\Psi'|\big)\hat{O}\big(|\Psi\rangle + |\Psi'\rangle\big) \\
&= \langle\Psi + \Psi'|\hat{O}|\Psi + \Psi'\rangle
\end{aligned}$$

同様に

$$\alpha_2 = \langle\Psi - \Psi'|\hat{O}|\Psi - \Psi'\rangle$$
$$\alpha_3 = \langle\Psi + i\Psi'|\hat{O}|\Psi + i\Psi'\rangle$$
$$\alpha_4 = \langle\Psi - i\Psi'|\hat{O}|\Psi - i\Psi'\rangle$$

となります。そうすると、(6) から $\hat{O}$ を任意の状態で挟んだものは 0 になるとしているので、$\alpha_{1,2,3,4} = 0$ です。よって、任意の状態 $|\Psi\rangle, |\Psi'\rangle$ に対して、(6) であるなら

$$\langle\Psi|\hat{O}|\Psi'\rangle = 0 \tag{7}$$

となります。

$\hat{\alpha}^2_{out}$ の期待値を見てみると、unbiased condition (5a) が (6) になっているので (7) を使うことで

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{\alpha}^2_{out}|\psi\rangle &= \langle\psi|\big(\hat{A}^2_{in} + \hat{N}^2(A) + \hat{A}_{in}\hat{N}(A) + \hat{N}(A)\hat{A}_{in}\big)|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\big(\hat{A}^2_{in} + \hat{N}^2(A) + \hat{A}_{in}\hat{N}(A) + \hat{N}(A)\hat{A}_{in}\big)|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\hat{A}^2_{in}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{A}_{in}\hat{N}(A)|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}(A)\hat{A}_{in}|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\hat{A}^2_{in}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle + \langle\psi'|\hat{N}(A)|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}(A)|\psi'\rangle \quad (\hat{A}_{in}|\psi\rangle) = |\psi'\rangle) \\
&= \langle\psi|\hat{A}^2_{in}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle
\end{aligned} \tag{8}$$

今は $|\psi\rangle = |\phi\otimes\phi_{app}\rangle$ ですが、(7) は成立しています。これに標準偏差 (2) と誤差 (4a) を使えば

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{\alpha}^2_{out}|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{A}^2_{in}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle \\
\langle\psi|\hat{\alpha}^2_{out}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{\alpha}_{out}|\psi\rangle^2 &= \langle\psi|\hat{A}^2_{in}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{\alpha}_{out}|\psi\rangle^2 \\
\sigma^2(\alpha) &= \langle\psi|\hat{A}^2_{in}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{\alpha}_{out}|\psi\rangle^2 \\
&= \langle\psi|\hat{A}^2_{in}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}_{in}|\psi\rangle^2 \\
&= \sigma^2(A) + \epsilon^2(A)
\end{aligned} \tag{9}$$

下から 2 行目にいくときに unbiased condition を使っています。$B$ でも同じことをするたけなので

$$\sigma^2(\beta) = \sigma^2(B) + \epsilon^2(B)$$

となります。今の状況設定では標準偏差と測定誤差はこのような関係を持っています。

次に $\hat{A}_{in}$ と $\hat{B}_{in}$ の交換関係を見てみると

$$\begin{aligned}
[\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}] &= [\hat{\alpha}_{out} - \hat{N}(A), \hat{\beta}_{out} - \hat{N}(B)] \\
&= [\hat{\alpha}_{out}, \hat{\beta}_{out}] - [\hat{\alpha}_{out}, \hat{N}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{\beta}_{out}] + [\hat{N}(A), \hat{N}(B)]
\end{aligned}$$

今は $A, B$ を同時に測定する状況を考えていて、量子論で同時測定が可能であるためには演算子が交換する必要があるので (交換するなら $\hat{O}_1\hat{O}_2|O\rangle = \hat{O}_2\hat{O}_1|O\rangle$ なので、それぞれがもう一方の測定に干渉しない)、$\hat{\alpha}_{out}$ と $\hat{\beta}_{out}$ は交換するとします ($\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}$ は測定前なので交換できる必要はない)。よって

$$\begin{aligned}
[\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}] &= -[\hat{\alpha}_{out}, \hat{N}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{\beta}_{out}] + [\hat{N}(A), \hat{N}(B)] \\
&= -[\hat{A}_{in}, \hat{N}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{N}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{B}_{in}] - [\hat{N}(A), \hat{N}(B)] + [\hat{N}(A), \hat{N}(B)] \\
&= -[\hat{A}_{in}, \hat{N}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{B}_{in}] - [\hat{N}(A), \hat{N}(B)] \\
-\langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}]|\psi\rangle &= \langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{N}(B)]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{B}_{in}]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{N}(B)]|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{N}(B)]|\psi\rangle
\end{aligned} \tag{10}$$

最後へは (7) を使って (8) と同じことをしています。
　これの右辺でロバートソンの不等式を使うと

$$\sigma(N(A))\sigma(N(B)) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{N}(B)]|\psi\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\right|$$

$\sigma(N)$ は unbiased condition のために

$$\sigma(N(A)) = \sqrt{\langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{N}(A)|\psi\rangle^2} = \sqrt{\langle\psi|\hat{N}^2(A)|\psi\rangle} = \epsilon(A)$$

なので

$$\epsilon(A)\epsilon(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\right|$$

という測定誤差に対する不等式が求まります。これは 1988 年に Arthurs と Goodman によって示され、Arthurs-Goodman の不等式と呼ばれます。また $\hat{\alpha}_{out}$ と $\hat{\beta}_{out}$ のロバートソンの不等式から

$$\sigma(\alpha)\sigma(\beta) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|[\hat{\alpha}_{out},\hat{\beta}_{out}]|\psi\rangle\right|$$

これの右辺は

$$\begin{aligned}
\langle\psi|[\hat{\alpha}_{out},\hat{\beta}_{out}]|\psi\rangle &= \langle\psi|[\hat{A}_{in}+\hat{N}(A),\hat{B}_{in}+\hat{N}(B)]|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{N}(B)]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{B}_{in}]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{N}(B)]|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{N}(B)]|\psi\rangle \\
&= 2\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle
\end{aligned}$$

最後で (10) を使っています。よって標準偏差による

$$\sigma(\alpha)\sigma(\beta) \geq \left|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\right|$$

という不等式も出てきます。ちなみに、一般化される前の位置と運動量に対しての場合は 1965 年に Arthurs と Kelly によって示されました。
　今度は 2 つの同時測定でなく観測量 $A$ だけを測定し、$B$ は $A$ の測定による擾乱を受けるとします。これはハイゼンベルクの不確定性関係を再定式化しようとするものです。$A$ の測定装置の観測量は $M$ とします。また、unbiased condition は与えません
　$A$ に対しては状態 $|\psi\rangle = |\phi\otimes\phi_{app}\rangle$ を使って測定誤差として

$$\epsilon(A) = \sqrt{\langle\psi|(\hat{M}_{out}-\hat{A}_{in})^2|\psi\rangle}$$

$B$ に対しては、$A$ の測定による擾乱の影響が知りたく、それは測定前と後での $B$ の差なので

$$\eta(B) = \sqrt{\langle\psi|(\hat{B}_{out} - \hat{B}_{in})^2|\psi\rangle}$$

とします。$\hat{M}_{out}$ と $\hat{A}_{in}$ の差と $\hat{B}_{out}$ と $\hat{B}_{in}$ の差を

$$\hat{M}_{out} = \hat{A}_{in} + \hat{N}(A)$$
$$\hat{B}_{out} = \hat{B}_{in} + \hat{D}(B)$$

と書きます。$\hat{D}$ は disturbance operator と呼ばれます。このとき $\hat{A}_{in}$ と $\hat{B}_{in}$ の交換関係は

$$\begin{aligned}[\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}] &= [\hat{M}_{out} - \hat{N}(A), \hat{B}_{out} - \hat{D}(B)] \\ &= [\hat{M}_{out}, \hat{B}_{out}] - [\hat{M}_{out}, \hat{D}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{B}_{out}] + [\hat{N}(A), \hat{D}(B)]\end{aligned}$$

測定結果 $\hat{M}_{out}$ は測定装置、擾乱の結果 $\hat{B}_{out}$ は測定対象の系という異なった系なので、交換することを要求して

$$\begin{aligned}[\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}] =& \ -[\hat{M}_{out}, \hat{D}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{B}_{out}] + [\hat{N}(A), \hat{D}(B)] \\ =& \ -[\hat{A}_{in}, \hat{D}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{D}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{B}_{in}] - [\hat{N}(A), \hat{D}(B)] + [\hat{N}(A), \hat{D}(B)] \\ =& \ -[\hat{A}_{in}, \hat{D}(B)] - [\hat{N}(A), \hat{B}_{in}] - [\hat{N}(A), \hat{D}(B)]\end{aligned}$$

状態 $|\psi\rangle$ で挟んで三角不等式を使えば

$$\langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{D}(B)]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{B}_{in}]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{D}(B)]|\psi\rangle = \ -\langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}]|\psi\rangle$$
$$\left|\langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{D}(B)]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{B}_{in}]|\psi\rangle + \langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{D}(B)]|\psi\rangle\right| = \left|\langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}]|\psi\rangle\right|$$
$$\left|\langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{D}(B)]|\psi\rangle\right| + \left|\langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{B}_{in}]|\psi\rangle\right| + \left|\langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{D}(B)]|\psi\rangle\right| \geq \left|\langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{B}_{in}]|\psi\rangle\right|$$

さらに誤差 $\epsilon(A)$ と標準偏差 $\sigma(N(A))$ の差を見てみると

$$\begin{aligned}\epsilon(A) - \sigma(N(A)) &= \sqrt{\langle\psi|(\hat{M}_{out} - \hat{A}_{in})^2|\psi\rangle} - \sqrt{\langle\psi|(\hat{M}_{out} - \hat{A}_{in})^2|\psi\rangle - \langle\psi|(\hat{M}_{out} - \hat{A}_{in})|\psi\rangle^2} \\ &\geq 0 \\ \epsilon(A) &\geq \sigma(N(A))\end{aligned}$$

これを $\hat{N}(A)$ と $\hat{D}(B)$ をロバートソンの不等式に当てはめた

$$\sigma(N(A))\sigma(D(B)) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{D}(B)]|\psi\rangle\right|$$

に使うと

$$\epsilon(A)\sigma(D(B)) \geq \sigma(N(A))\sigma(D(B)) \geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{D}(B)]|\psi\rangle\big|$$

そして、擾乱 $\eta(B)$ と標準偏差 $\sigma(D(B))$ の差は

$$\begin{aligned}\eta(B)-\sigma(D(B)) &= \sqrt{\langle\psi|(\hat{B}_{out}-\hat{B}_{in})^2|\psi\rangle}-\sqrt{\langle\psi|(\hat{B}_{out}-\hat{B}_{in})^2|\psi\rangle-\langle\psi|(\hat{B}_{out}-\hat{B}_{in})|\psi\rangle^2}\\ &\geq 0\\ \eta(B) &\geq \sigma(D(B))\end{aligned}$$

となっていることを入れれば

$$\epsilon(A)\eta(B) \geq \epsilon(A)\sigma(D(B)) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{D}(B)]|\psi\rangle|$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{D}(B)]|\psi\rangle\big|+\frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{D}(B)]|\psi\rangle\big|+\frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\big| &\geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\big|\\ \epsilon(A)\eta(B)+\frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{D}(B)]|\psi\rangle\big|+\frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\big| &\geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\big|\end{aligned}$$

これの左辺第二項は

$$\begin{aligned}\sigma(A_{in})\sigma(D(B)) &\geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{D}(B)]|\psi\rangle\big|\\ \sigma(A_{in})\eta(B) &\geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{D}(B)]|\psi\rangle\big|\end{aligned}$$

第三項は

$$\begin{aligned}\sigma(N(A))\sigma(B_{in}) &\geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\big|\\ \epsilon(A)\sigma(B_{in}) &\geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{N}(A),\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\big|\end{aligned}$$

なので

$$\epsilon(A)\eta(B)+\sigma(A_{in})\eta(B)+\epsilon(A)\sigma(B_{in}) \geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi|[\hat{A}_{in},\hat{B}_{in}]|\psi\rangle\big|$$

となります。これが小澤の不等式で、2003 年に小澤正直によって示されました (「Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement」, Phys.Rev.A 67,(2003),042105 (arXiv:quant-ph/0207121))。小澤の不等式において

$$\left|\langle\psi|[\hat{A}_{in}, \hat{D}(B)]|\psi\rangle\right| + \left|\langle\psi|[\hat{N}(A), \hat{B}_{in}]|\psi\rangle\right| = 0$$

のとき、ハイゼンベルクの不確定性関係 (1) になることが分かります。つまり、擾乱の寄与と $A_{in}$、測定の寄与と $B_{in}$ が交換するときにハイゼンベルクの不確定性関係になります。

小澤の不等式は 2012 年に実験で実証されたようです。これは「Experimental demonstration of a universally valid error-disturbance uncertainty relation in spin-measurements」, Nature Physics 8 (3),185 (arXiv:1201.1833 [quant-ph]) です。