モノポール

磁荷が存在するとしたときのマクスウェル方程式を考えます。その結果を量子力学に適用し、磁荷と電荷の関係を出します。
ゲージ変換については知っているとしています。

　マクスウェル方程式はヘヴィサイド・ローレンツ単位系で

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t)\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0$$

とします。$\boldsymbol{E}$ は電場、$\boldsymbol{B}$ は磁場 (磁束密度)、ρ は電荷密度、$\boldsymbol{j}$ は電流密度、c は光速です。これらの $\boldsymbol{E}$ を $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{B}$ を $-\boldsymbol{E}$ にすると

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t)\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$$

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=0\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=0$$

$$(\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{B}\ ,\ \boldsymbol{B}\Rightarrow-\boldsymbol{E})$$

これらから分かるように、今の入れ替えに対して $\rho=0,\boldsymbol{j}=0$ なら同じ式のままです。そうすると、$\rho\neq0,\boldsymbol{j}\neq0$ でも電場と磁場の入れ替えに対して式が変わらないと出来れば、式の構造として綺麗になります。
　そんな電場と磁場に関して対称な形にするためには、電荷密度 ρ に対応する ρ_M、電流密度 $\boldsymbol{j}$ に対応する $\boldsymbol{j}_M$ が存在すればいいという仮定が出てきます。つまり、マクスウェル方程式を

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t)\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\rho_M(\boldsymbol{x},t)\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{c}\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x},t)$$

とします。このようにマクスウェル方程式が書けるとすれば、電場に関する量から磁場に関する量への変換では符号を変えず、その逆では符号は反転するという要求をすることで、電場と磁場の入れかえに対して

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\rho_M(\boldsymbol{x},t)\ ,\ -\nabla\times\boldsymbol{E}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{c}\boldsymbol{j}_M(\boldsymbol{x},t)$$

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\rho(\boldsymbol{x},t)\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{c}(\boldsymbol{x},t)$$

$$(\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{B}\ ,\ \rho\Rightarrow\rho_M\ ,\ \boldsymbol{j}\Rightarrow\boldsymbol{j}_M\ ,\ \boldsymbol{B}\Rightarrow-\boldsymbol{E}\ ,\ \rho_M\Rightarrow-\rho\ ,\ \boldsymbol{j}_M\Rightarrow-\boldsymbol{j})$$

となり、同じ式のままです。電場の式と対称に書かれていることからも分かるように、ρ_M と $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{M}}$ が存在するためには電荷 e に対応する磁荷（magnetic charge）e_M が存在することが前提となります。磁荷を持つ粒子をモノポール (magnetic monopole) と言います (磁荷のことをモノポールと言う場合もある)。また、ρ_M を磁荷密度 (magnetic charge density)、$\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{M}}$ を磁流密度 (magnetic current density) と呼びます。
　例えば原点に磁荷 e_M をおいたとき、位置 $\boldsymbol{r}$ において磁場は

$$\boldsymbol{B} = \frac{e_M}{4\pi|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{e_M}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (r = |\boldsymbol{r}| \ , \ \boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}) \tag{1}$$

となります (電場での話をそのまま適用しただけ)。$\boldsymbol{e}_r$ は動径方向 ($\boldsymbol{r}$ 方向) の単位ベクトルです。このときの ρ_M は原点に e_M が置かれているだけなので

$$\rho_M = e_M\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

となっています。

しかし、すぐに分かる問題点が出てきます。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の定義は

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

と与えられています。しかし、これは磁場の性質とは無関係にベクトル計算の関係から

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$$

なので、磁荷があるときの $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \rho_M$ を作れません。というわけで、ディラックによるこれの対処を見ていきます。ここから、原点に磁荷 e_M が置かれている場合のみを扱います。

まず、$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \rho_M$ を満たすようにベクトルポテンシャルを導入します。そのために、階段関数 Θ を利用します。階段関数は $\tau < 0$ では $\Theta(\tau) = 0$、$\tau > 0$ では $\Theta(\tau) = 1$ です。そして、階段関数の微分はデルタ関数なので

$$\frac{d}{d\tau}\Theta(\tau) = \delta(\tau)$$

となっています。この性質から z 軸方向において

$$\nabla\cdot(\Theta(-z)\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z) = \frac{\partial}{\partial z}\Theta(-z)\delta(x)\delta(y) = -\delta(z)\delta(x)\delta(y) = -\delta^3(\boldsymbol{x})$$

とできます（原点に磁荷を置いてるために球対称なのでどの方向でも同じ）。$\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルです。つまり、(2) から

$$-e_M\nabla\cdot(\Theta(-z)\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z) = \rho_M$$

このため

$$\nabla\cdot(\frac{e_M}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r + e_M\Theta(-z)\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z) = 0$$

となっているので、括弧部分を $\nabla\times\boldsymbol{A}$ とすれば $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$ になります。よって

$$\frac{e_M}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r = \nabla\times\boldsymbol{A} - e_M\Theta(-z)\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z \tag{3}$$

として、磁荷による磁場を書けます。これに ∇ を作用させれば、右辺第一項は消え、第二項は ρ_M となります。

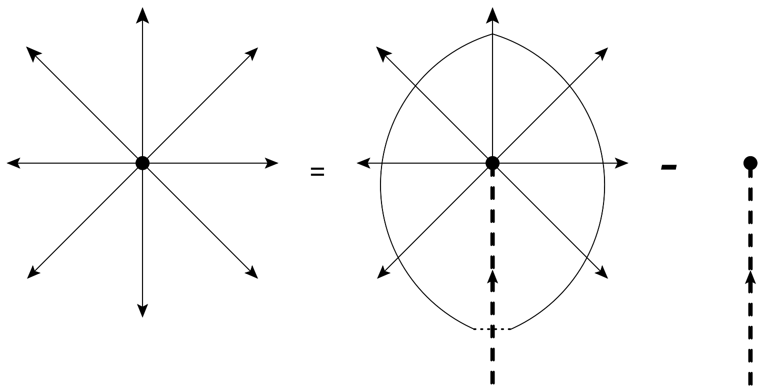

図 1

次に原点を囲む任意の閉曲面 S によって磁荷は

$$e_M = \int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}$$

と書けることを考えます。面積ベクトル $\boldsymbol{S}$ の方向は外向きに取ります。これは閉曲面 S で囲まれた領域 V を球として、ガウスの定理と $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \rho_M$ を使えば

$$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = \int_V dV(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) = \int_V dV\ \rho_M = e_M\int_V d^3x\ \delta^3(\boldsymbol{x}) = e_M \tag{4}$$

として出てきています。しかし、この積分は $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ なら、

$$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = \int_V dV(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) = \int_V dV(\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})) = 0$$

となり、矛盾が起きます。また、この式を言い換えただけですが、3 次元での閉曲面において、ストークスの定理は閉曲線を C として

$$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = \int_S d\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \int_C d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A} = 0$$

となり、同様の結果になります（閉曲面に対する閉曲線 C は存在しないから 0）。$d\boldsymbol{s}$ は閉曲線の接ベクトル方向です。この結果から、この領域において微分が成立する、つまり特異性がない場合 (4) にならないと言えます。というわけで、特異性を与えます。

すでに求めた (3) を見てみると、負の z 軸上で特異性があることが分かります ($\Theta(-z)\delta(x)\delta(y)$ のため)。つまり、負の z 軸を外すようにした閉曲面を考えればいいです。そして、その外した面の大きさがなくなる極限 (面積 0 の極限) において (閉曲面に空いた穴が塞がる極限)、(4) が再現されるとします。

ここまでの話を図 1 にしています。放射状に伸びているのが磁場で、右辺第一項の囲っている楕円みたいなのが閉曲面です。閉曲面の下側の点線部分が閉曲面から外される面で、そこを通過している太い点線が特異性の部分です。つまり、(3) は負の z 軸上に特異性を持つベクトルポテンシャルを導入し、そこから特異性を作っている部分 (太い点線部分) を引くことで、磁場 (1) を作っていることを表しています。この特異性は Dirac string と呼ばれます。ちなみに、ディラックは特異性を原点から無限大まで伸びている細いソレノイドがくっ付いているとして与えました。

というわけで、負の z 軸上に特異性を持つ $\boldsymbol{A}$ を求めます。原点を中心にする半径 r の球を z 軸に平行に θ_0 の位置で切って、円 S_{circle} を作り、そこを磁場が通っているとします。θ_0 は z 軸からの角度で（原点から r、z 軸から θ_0 の位置で z 軸に平行に切る)、極座標を (r,θ,ϕ) とします。

この円での立体角はよくある話 (直円錐の場合) から、$r=1$ とすれば

$$2\pi(1-\cos\theta_0)$$

となっています。球の全立体角は 4π です。そして、全磁荷は e_M なので、この円に対する磁荷は、立体角の割合から (θ_0 は θ と書くようにします)

$$\frac{2\pi(1-\cos\theta)}{4\pi}e_M = \frac{1}{2}e_M(1-\cos\theta)$$

なので、S_{circle} において

$$\frac{1}{2}e_M(1-\cos\theta) = \int_{S_{circle}} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}$$

そしてストークスの定理を使えば、その円の閉曲線 (円周) から

$$\int_{S_{circle}} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = \int_{S_{circle}} d\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \int_{circle} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{s}$ の線積分は円周に沿ったものです。これから

$$\frac{1}{2}e_M(1-\cos\theta) = \int_{circle} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}$$

となります。

右辺を計算します。適当に座標軸を設定すれば、$\boldsymbol{A}$ は ϕ 方向のみにできるとして $\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi) = A(r,\theta)\boldsymbol{e}_\phi$ とします。円 $\boldsymbol{S}_{circle}$ は z 軸に平行に切ることで作っているために、線積分は半径 $r\sin\theta$ の円の円周上で行われます ($\boldsymbol{e}_\phi$ 方向の積分)。このため ds は円周上の微小要素 $r\sin\theta d\phi$ のことなので

$$\int_{circle} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_\phi = r\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi$$

$d\boldsymbol{s}$ をまじめに求めるなら

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}(\phi+d\phi)-\boldsymbol{r}(\phi) = d\phi\frac{d\boldsymbol{r}}{d\phi} &= d\phi\frac{d}{d\phi}(r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta) \\
&= d\phi(-r\sin\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\cos\phi,\ 0) \\
&= r\sin\theta d\phi(-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0) \\
&= r\sin\theta d\phi\boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned}$$

とすればいいです。よって、$A(r,\theta)$ は積分とは無関係で、単純に

$$\int_{circle} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A} = A(r,\theta)r\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi A(r,\theta)r\sin\theta$$

よって、ベクトルポテンシャルは

$$\frac{1}{2}e_M(1-\cos\theta) = 2\pi A(r,\theta)r\sin\theta$$
$$A = \frac{e_M}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\boldsymbol{A} = \frac{e_M}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi \qquad (\theta\neq\pi)$$

$\theta\neq\pi$ は、$\theta=\pi$ で $\sin\theta$ が 0 ($\cos\theta$ は -1) になってしまうからです。というわけで、負の z 軸上 ($\theta=\pi$) に特異性を持つベクトルポテンシャルが求まりました。

ちなみに直交座標 (x,y,z) に書き換えるのは簡単です。直交座標と極座標の関係

$$\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x\sin\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\phi$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\ ,\ \cos\theta = \frac{z}{r}$$
$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r\sin\theta}\ ,\ \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r\sin\theta}$$

から

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi = \frac{r}{\sqrt{x^2+y^2}}(1-\frac{z}{r})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ry}{x^2+y^2}(1-\frac{z}{r}) = \frac{y(r-z)}{r^2-z^2} = \frac{y}{r+z}$$
$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi = \frac{rx}{x^2+y^2}(1-\frac{z}{r}) = \frac{x(r-z)}{r^2-z^2} = \frac{x}{r+z}$$

これらを使えば、直交座標 (x,y,z) において

$$\boldsymbol{A} = \frac{e_M}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}(-\sin\phi,\cos\phi,0) = \frac{e_M}{4\pi r}\frac{1}{r+z}(-y,x,0)$$

となります。

求められた $\boldsymbol{A}$ から、実際に $\nabla\times\boldsymbol{A}$ によって磁場 (1) が出てくることを確かめます (ただし、$\theta=\pi$ では定義できないことに注意)。$\boldsymbol{A}$ の導出を巻き戻していけば、原点に磁荷があるときの B になるので、一致することは予想できます。

ベクトルポテンシャルは ϕ 成分 A_ϕ しか持っていないので、$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ を r,θ 方向の単位ベクトルとして（数学の「極座標」参照）

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{e}_r\big(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}+\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_\phi\big)+\boldsymbol{e}_\theta\big(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r}A_\phi\big)+\boldsymbol{e}_\phi\big(\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}A_\theta\big)\\
&=\boldsymbol{e}_r\big(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_\phi\big)+\boldsymbol{e}_\theta\big(-\frac{\partial A_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r}A_\phi\big)\\
&=\boldsymbol{e}_r\big(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_\phi\big)+\boldsymbol{e}_\theta\big(-\frac{\partial A_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r}A_\phi\big)
\end{aligned}
$$

第二項は

$$
\frac{\partial A_\phi}{\partial r}=-\frac{1}{r}A_\phi
$$

なので消えます。第一項での θ 微分は

$$
\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}=\frac{e_M}{4\pi r}(\frac{\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta)=\frac{e_M}{4\pi r}\frac{\sin^2\theta-\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{e_M}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_\varphi&=\frac{e_M}{4\pi r}\frac{1}{r}(\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta})\\
&=\frac{e_M}{4\pi r}\frac{1}{r}\frac{1-\cos\theta+\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{e_M}{4\pi r}\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{e_M}{4\pi r}\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_r=\frac{e_M}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{B}
$$

となり、ベクトルポテンシャルの定義を満たしていることが確認できます。

これで古典論において矛盾なく磁荷が導入できました。次に量子力学に持って行きます。そのために、$\boldsymbol{A}$ の形を分離して書き直します (ディラックが行った方法でなく Yang と Wu によって与えられた方法)。$\boldsymbol{A}$ は $\theta=\pi$ での特異性を避けるように

$$
\begin{aligned}
U_+:\ \boldsymbol{A}_+&=\frac{e_M}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi\quad(\theta<\pi-a)\\
U_-:\ \boldsymbol{A}_-&=\frac{e_M}{4\pi r}\frac{-1-\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi\quad(\theta>a)
\end{aligned}
$$

とします。それぞれの領域 $U_\pm$ は図 2 で与えているものです。$U_\pm$ の範囲から分かるように、$A_\pm$ は特異性を持たない領域で定義されています。単純に領域を切っただけなので、(1) を両方とも再現します。

ここで、ゲージ変換を持ち込みます。電磁気はベクトルポテンシャルの

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)+\nabla\Lambda(\boldsymbol{x},t)
$$

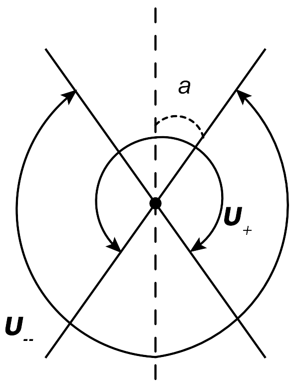

図 2

というゲージ変換に対して不変です。これを今の領域に持ち込みます。今はベクトルポテンシャルが領域によって 2 つに分かれていますが、$U_\pm$ は共通領域 U_0 を持ちます。そして、この共通領域のある点に複数のベクトルポテンシャルの形があろうと (例えば今の場合 $\theta=\pi/2$ で $\boldsymbol{A}_\pm$ は明らかに一致しない)、磁場は観測量なのでその点で 1 つの値しか持ちません。つまり、共通領域におけるベクトルポテンシャルはゲージ変換で繋がっていなければいけません（ゲージ変換で物理は変わらない)。

というわけで、共通領域 U_0 において $\boldsymbol{A}_+$ と $\boldsymbol{A}_-$ をゲージ変換で一致させます。これは簡単で、$\boldsymbol{A}_+$ と $\boldsymbol{A}_-$ の差が $\nabla\Lambda$ になればいいだけです。$\boldsymbol{A}_+$ と $\boldsymbol{A}_-$ の差は

$$\boldsymbol{A}_+ - \boldsymbol{A}_- = \frac{e_M}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi - \frac{e_M}{4\pi r}\frac{-1-\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi = \frac{e_M}{4\pi r}\frac{2}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi$$

$\nabla\Lambda$ を $\boldsymbol{A}_+ - \boldsymbol{A}_-$ と一致させるには、$\nabla\Lambda$ も $\boldsymbol{e}_\phi$ 成分のみを持つ必要があるので

$$\nabla\Lambda = \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Lambda$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Lambda &= \frac{e_M}{4\pi r}\frac{2}{\sin\theta}\\ \frac{\partial}{\partial\phi}\Lambda &= \frac{e_M}{2\pi}\\ \Lambda &= \frac{e_M}{2\pi}\phi \qquad (5)\end{aligned}$$

これはまだ古典的な話です。

量子力学に持っていくために、電磁場があるときのシュレーディンガー方程式を使います。これは「スピン」で求めてるように、ローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t))$$

から作れます。$e>0$ としています。今の単位系では光速 c がローレンツ力の第二項にいます。なので、これから出てくる電磁場ありでのシュレーディンガー方程式は

$$\Big(\frac{\hbar^2}{2m}\big(i\nabla+\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{A}\big)^2+eA_0\Big)\psi=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \tag{6}$$

$A_0(\boldsymbol{x},t)$ はスカラーポテンシャルです。しかし、c があっても煩わしいだけなので、$c=1$ としてしまいます (ついでに $\hbar$ も 1 にしてもいいですが、一応残しておきます)。ここで求めた $\boldsymbol{A}$ を入れれば

$$U_+:\ \Big(\frac{\hbar^2}{2m}\big(i\nabla+\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}_+\big)^2+eA_0\Big)\psi_+=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_+$$
$$U_-:\ \Big(\frac{\hbar^2}{2m}\big(i\nabla+\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}_-\big)^2+eA_0\Big)\psi_-=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_-$$

そして、U_+ と U_- の共通領域 U_0 で $\boldsymbol{A}_+$ と $\boldsymbol{A}_-$ はゲージ変換によって行き来できます。そうすると、波動関数 $\psi_\pm$ も 1 つの値しか持たないために、共通領域 U_0 の同じ点における ψ_+ と ψ_- を繋げる物理に影響を与えない変換を持つはずです。

　このことをもっと統一的に言い直します。まず、(6) は電磁場のゲージ変換

$$A_0(\boldsymbol{x},t)\ \Rightarrow\ A'_0(\boldsymbol{x},t)=A_0(\boldsymbol{x},t)-\frac{\partial\Lambda(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)+\nabla\Lambda(\boldsymbol{x},t) \tag{7b}$$

に対して不変 (式の形が変わらない) になっていません。しかし、波動関数も

$$\psi(\boldsymbol{x},t)\ \Rightarrow\ \psi'(\boldsymbol{x},t)=\exp[i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\boldsymbol{x},t)]\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{7c}$$

と変換すると不変になります。exp 部分は位相変換の形なので確率振幅の計算に影響しません (絶対値を取れば 1 になる)。ちなみに c を残すなら

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\ ,\ \exp[i\frac{e}{\hbar c}\Lambda]\psi \tag{8}$$

となります。(6) がゲージ変換 (7a),(7b),(7c) で不変になることは下の補足で示しています。

　つまり、量子力学のゲージ変換では波動関数が (7b) と変換されることを使い、$\boldsymbol{A}_\pm$ を共通領域 U_0 でゲージ変換によって繋げたように、波動関数もゲージ変換 (7b) で繋げます。そうすると、共通領域 U_0 において (5) から

$$\psi_+=e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\psi_-$$
$$\psi_+=\ \exp[\frac{iee_M}{2\pi\hbar}\phi]\psi_-$$

となります。これは $\phi=0$ なら $\psi_+=\psi_-$ です。そして、ϕ は 0 から 2π までの値を持ちますが、波動関数の値は 1 つになるべきなので、ϕ が一周すれば元の値に戻るはずです。つまり、$\phi=2\pi$ でも $\psi_+=\psi_-$ となるべきです。このことは

$$\psi_+=\exp[\frac{iee_M}{2\pi\hbar}2\pi]\psi_-=\psi_-$$

を意味するので、exp の性質から

$$\frac{ee_M}{2\pi\hbar} = \pm n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

という条件になります。よって、磁荷 e_M と電荷との関係

$$e_M = \frac{2\pi\hbar}{e} n$$

を与えます。このように磁荷が離散的な値を持つことになり、これをディラックの量子化条件と言います。この関係は $ee_M = 2\pi\hbar n$ を意味するので、素粒子の電荷が離散的である理由 (電荷の量子化) が磁荷の存在によって説明出来ることになります（磁荷が存在すれば)。

最後に e_M の大きさを求めます。今の単位系 (ヘヴィサイド・ローレンツ単位系) では

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

なので、$c = 1$ としないときの波動関数のゲージ変換の形 (8) から c を戻して計算してみると

$$\frac{e_M^2}{e^2} = \frac{4\pi^2\hbar^2 c^2}{e^4} n^2 = \frac{1}{4}(\frac{4\pi\hbar c}{e^2})^2 n^2 \simeq \frac{(137)^2}{4} n^2$$

このように、$n = 1$ でさえ e_M^2 は e^2 の約 5000 倍になります。

他にも t'Hooft と Polyakov によって、ゲージ理論における対称性の破れとソリトン解の話から磁荷が導入されることが示されています。現在ではこの話（大統一理論関連）から磁荷に出会うことが多いと思います。

・補足

電磁場を含めているシュレーディンガー方程式 (6) がゲージ変換 (7a),(7b),(7c) で不変になっていることを確かめます。

(6) の 2 乗部分は後ろに ψ がいることを考慮して

$$\begin{aligned}
(i\nabla + \frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}')^2 =& -\nabla^2 + i\frac{e}{\hbar}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}') + 2i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}'\cdot\nabla + \frac{e^2}{\hbar^2}\boldsymbol{A}'^2 \\
=& -\nabla^2 + i\frac{e}{\hbar}\nabla\cdot(\boldsymbol{A} + \nabla\Lambda) + 2i\frac{e}{\hbar}(\boldsymbol{A} + \nabla\Lambda)\cdot\nabla + \frac{e^2}{\hbar^2}(\boldsymbol{A} + \nabla\Lambda)^2 \\
=& -\nabla^2 + 2i\frac{e}{\hbar}(\boldsymbol{A} + \nabla\Lambda)\cdot\nabla + i\frac{e}{\hbar}(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla^2\Lambda) + \frac{e^2}{\hbar^2}(\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Lambda + (\nabla\Lambda)^2)
\end{aligned}$$

$\nabla\psi'$ は

$$\nabla\psi' = \nabla(e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\psi) = \frac{ie}{\hbar}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\nabla\Lambda)\psi + e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\nabla\psi$$

$\nabla^2\psi'$ は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\psi' &= \nabla\cdot\nabla\psi' \\
&= \nabla\cdot(\frac{ie}{\hbar}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\nabla\Lambda)\psi + e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\nabla\psi) \\
&= -\frac{e^2}{\hbar^2}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\nabla\Lambda)\cdot(\nabla\Lambda)\psi + \frac{ie}{\hbar}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\nabla^2\Lambda)\psi + \frac{ie}{\hbar}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\nabla\Lambda)\cdot(\nabla\psi) + \frac{ie}{\hbar}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\nabla\Lambda)\cdot(\nabla\psi) + e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\nabla^2\psi \\
&= e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\big(-\frac{e^2}{\hbar^2}(\nabla\Lambda)^2\psi + \frac{ie}{\hbar}(\nabla^2\Lambda)\psi + 2\frac{ie}{\hbar}(\nabla\Lambda)\cdot(\nabla\psi) + \nabla^2\psi\big)
\end{aligned}
$$

これらから

$$
\begin{aligned}
(i\nabla + \frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}')^2\psi' = &-e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\big(-\frac{e^2}{\hbar^2}(\nabla\Lambda)^2\psi + \frac{ie}{\hbar}(\nabla^2\Lambda)\psi + 2\frac{ie}{\hbar}(\nabla\Lambda)\cdot(\nabla\psi) + \nabla^2\psi\big) \\
&+ 2i\frac{e}{\hbar}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\boldsymbol{A} + \nabla\Lambda)\cdot(\frac{ie}{\hbar}(\nabla\Lambda)\psi + \nabla\psi) \\
&+ i\frac{e}{\hbar}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\nabla\boldsymbol{A} + \nabla^2\Lambda)\psi + \frac{e^2}{\hbar^2}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}\nabla\Lambda + (\nabla\Lambda)^2)\psi \\
= &\, e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\big((\frac{e^2}{\hbar^2}(\nabla\Lambda)^2\psi + \frac{ie}{\hbar}(\nabla^2\Lambda)\psi - 2\frac{ie}{\hbar}(\nabla\Lambda)\cdot(\nabla\psi) - \nabla^2\psi) \\
&+ 2i\frac{e}{\hbar}(\frac{ie}{\hbar}\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\Lambda)\psi + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi + \frac{ie}{\hbar}(\nabla\Lambda)^2\psi + (\nabla\Lambda)\cdot(\nabla\psi)) \\
&+ i\frac{e}{\hbar}(\nabla\boldsymbol{A} + \nabla^2\Lambda)\psi + \frac{e^2}{\hbar^2}(\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Lambda + (\nabla\Lambda)^2)\psi\big) \\
= &\, e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\big(-\nabla^2 + i\frac{e}{\hbar}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\psi + 2i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\cdot\nabla + \frac{e^2}{\hbar^2}\boldsymbol{A}^2\big)\psi \\
= &\, e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}(i\nabla + e\boldsymbol{A})^2\psi
\end{aligned}
$$

$A_0'\psi'$ と (6) の右辺の時間微分は

$$
\begin{aligned}
&A_0'\psi' = e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}A_0\psi - e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\psi \\
&\frac{\partial}{\partial t}\psi' = \frac{\partial}{\partial t}(e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\psi) = \frac{ie}{\hbar}e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\psi + e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\frac{\partial}{\partial t}\psi
\end{aligned}
$$

よって

$$
(\frac{\hbar^2}{2m}(i\nabla + \frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}')^2 + eA_0')\psi' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'
$$

$$
e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\frac{\hbar^2}{2m}(i\nabla + \frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A})^2\psi + ee^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}A_0\psi - ee^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\psi = -ee^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\psi + i\hbar e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}\frac{\partial}{\partial t}\psi
$$

$$
(\frac{\hbar^2}{2m}(i\nabla + \frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A})^2 + eA_0)\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi
$$

となり、ゲージ変換によって式の形は変わりません。