ランダウ準位

調和振動子の生成、消滅演算子の利用の例として磁場中の電子の運動を扱います。
ランダウ準位は量子ホール効果と関係していますが、そういった話は割愛して生成、消滅演算子によって固有値と波動関数が求まる例として扱います (磁場中の運動なので古典的なサイクロトロン運動との比較なんかを見てみるのもいいかもしれません)。
ハットを付けて区別しませんが、$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}$ は演算子です。ただし、$\boldsymbol{A}$ は位置の関数で、位置の演算子はそのまま座標なので、$\boldsymbol{A}$ はそれほど気にしなくていいです。

ここでの計算では、演算子は波動関数に作用するものとして、微分の作用の仕方を、例えば

$$\frac{\partial}{\partial x}(x+y) = \frac{\partial x}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x}$$

としている場合があるので注意してください。
磁場 $\boldsymbol{B}$ が z 軸方向に掛かっているとします ($\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$)。そうすると、磁場の方向の直角方向に力が掛かるので、電子は xy 平面上で磁場の影響を受けます。というわけで、三次元ですが、x, y の二次元平面のみで考えます。また、磁場と言っていますが、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度です。明確に区別しなくてはいけない状況ではないので磁場と言ってしまいます。
今は、磁場のみを考えるので、ハミルトニアンは (「パウリ方程式」参照)

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2$$

$\boldsymbol{p}$ は三次元運動量、e は電荷、$\boldsymbol{A}$ が三次元ベクトルポテンシャル ($\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$) です。ここで

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}$$

というように置き換えます。一応成分でも書けば

$$(p_x - eA_x, p_y - eA_y, p_z - eA_z) = (\Pi_x, \Pi_y, \Pi_z)$$

となります。すでに言ったように、z 軸は無視して 2 次元として

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\Pi}^2 = \frac{1}{2m}(\Pi_x^2 + \Pi_y^2) = \frac{1}{2m}(\Pi_x - i\Pi_y)(\Pi_x + i\Pi_y)$$

これは調和振動子と同じ形をしています。
演算子化して Π_x と Π_y の交換関係を見てみると

$$
\begin{aligned}
[\Pi_x, \Pi_y] &= [p_x - eA_x, p_y - eA_y] \\
&= [-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - eA_x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - eA_y] \\
&= -\hbar^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + i\hbar e\frac{\partial A_y}{\partial x} + i\hbar eA_y\frac{\partial}{\partial x} + ie\hbar A_x\frac{\partial}{\partial y} + e^2A_xA_y \\
&\quad - (-\hbar^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar e\frac{\partial A_x}{\partial y} + i\hbar eA_x\frac{\partial}{\partial y} + i\hbar eA_y\frac{\partial}{\partial x} + e^2A_yA_x) \\
&= i\hbar e\frac{\partial A_y}{\partial x} - i\hbar e\frac{\partial A_x}{\partial y} \\
&= i\hbar eB \quad \Big((0,0,B) = \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\Big)
\end{aligned}
$$

eB が消えるように上手く置き換えれば、この交換関係を $i\hbar$ にすることができます。なので、Π_x, Π_y は位置と共役運動量の関係と同じように、正準共役な組み合わせと考えられます。そうすると、調和振動子での生成、消滅演算子が $x + ip$ の形で書けていたのに対応して

$$
a = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{eB}}(\Pi_x + i\Pi_y)\ ,\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{eB}}(\Pi_x - i\Pi_y)
$$

とできます (Π_x, Π_y はエルミート演算子)。係数は余計なものが出てこないようにつけているものです。これによって

$$
\begin{aligned}
a^\dagger a &= \frac{1}{2\hbar eB}(\Pi_x - i\Pi_y)(\Pi_x + i\Pi_y) \\
&= \frac{1}{2\hbar eB}(\Pi_x^2 + i\Pi_x\Pi_y - i\Pi_y\Pi_x + \Pi_y^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar eB}(\Pi_x^2 + i[\Pi_x, \Pi_y] + \Pi_y^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar eB}(\Pi_x^2 - \hbar eB + \Pi_y^2) \\
&= \frac{1}{2\hbar eB}(2mH - \hbar eB) \\
\frac{mH}{\hbar eB} &= a^\dagger a + \frac{1}{2} \\
\frac{H}{\hbar\omega_c} &= a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (\omega_c = \frac{eB}{m}) \\
H &= \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

となって調和振動子のときと同じになります。ω_c はサイクロトロン振動数 (cyclotron frequency) と呼ばれます。

また、$a, a^\dagger$ の交換関係は

$$
\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\
&= \frac{1}{2\hbar^2}\frac{\hbar}{eB}[(\Pi_x + i\Pi_y)(\Pi_x - i\Pi_y) - (\Pi_x - i\Pi_y)(\Pi_x + i\Pi_y)] \\
&= \frac{1}{2\hbar eB}[\Pi_x^2 + \Pi_y^2 - i\Pi_x\Pi_y + i\Pi_y\Pi_x - (\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + i\Pi_x\Pi_y - i\Pi_y\Pi_x)] \\
&= \frac{-i}{\hbar eB}[\Pi_x, \Pi_y] \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となり、調和振動子と同じです。

というわけで、磁場があるときのハミルトニアン演算子は生成・消滅演算子 $a^\dagger, a$ によって

$$
H = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2})
$$

と書け、ハミルトニアン演算子の固有値は調和振動子と同じように離散的な値を持つことになります。この離散的な値をランダウ準位 (Landau level) と言います。

これで固有値は分かったので、次に固有関数 (波動関数) を求めます。そのために、$\boldsymbol{A}$ を固定してハミルトニアン演算子を展開し、元の座標系 (x, y) が見やすい生成・消滅演算子を作ることにします。

電磁場の特徴として、いろいろなゲージを取れるという性質があります (電磁気学の「マクスウェル方程式・ゲージ変換」参照)。磁場中での問題を扱うときに使われる主なゲージとして、ランダウゲージと対称ゲージという二つがあります。対称ゲージではベクトルポテンシャルを

$$
\boldsymbol{A} = (-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0)
$$

ランダウゲージでは

$$
\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)
$$

と取ります。ランダウゲージを使う方が簡単になります。

ここでは対称ゲージを取ることで $\boldsymbol{A}$ を固定します。対称ゲージは分数量子ホール効果を扱うときに取られたりします。対称ゲージを使ってハミルトニアン演算子を計算します。ハミルトニアン演算子は

$$
H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}^2 + e^2\boldsymbol{A}^2 - e\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} - e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p})
$$

$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$ は

$$
\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} = -i\hbar(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})\cdot(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0) = -i\hbar(-\frac{B}{2}y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{B}{2}x\frac{\partial}{\partial y})
$$

$$
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p} = -i\hbar(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0)\cdot(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = -i\hbar(-\frac{B}{2}y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{B}{2}x\frac{\partial}{\partial y})
$$

このようになっているので $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$ です。これはたまたま等しくなっているだけで、常に等しくなるわけではないです。これを使ってさらに変形させていくと

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}^2 + e^2\boldsymbol{A}^2 - 2e\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}) \\
&= \frac{1}{2m}\Big(-\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) + \frac{e^2B^2}{4}(x^2+y^2) + ie\hbar B(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})\Big) \\
&= \frac{1}{2m}\Big(-\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \frac{e^2B^2}{4}(x^2+y^2) + ie\hbar B(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})\Big) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

これを見て分かるように、z 成分は絡んでこないのでこれ以降は完全に無視します。
　次に

$$
l = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}
$$

というのを定義します。これはラーモア半径 (Larmor radius) と呼ばれます。これとサイクロトロン振動数 $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$ を使って変形すると

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \frac{m\omega_c^2}{8}(x^2+y^2) + i\frac{\hbar m\omega_c}{2m}(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) \qquad (l^2 = \frac{\hbar}{m\omega}) \\
&= -\frac{\hbar^2 l^2}{2ml^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \frac{m\omega_c^2 l^2}{8l^2}(x^2+y^2) + i\frac{\hbar\omega_c}{2}(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= (-\frac{\hbar\omega_c}{2}l^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \frac{\hbar\omega_c}{8}\frac{1}{l^2}(x^2+y^2) + i\frac{\hbar\omega_c}{2}(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{2}\Big(-l^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \frac{1}{4}\frac{1}{l^2}(x^2+y^2) + i(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})\Big)
\end{aligned}
$$

ここでさらに、$x = \sqrt{2}lX$, $y = \sqrt{2}lY$ という置き換えをすれば

$$
\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{\sqrt{2}l}\frac{\partial}{\partial X} \ , \ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{2}l}\frac{\partial}{\partial Y}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\hbar\omega_c}{2}(-\frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}) + \frac{1}{2}(X^2+Y^2) + i(-Y\frac{\partial}{\partial X} + X\frac{\partial}{\partial Y})) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{4}(-\frac{\partial^2}{\partial X^2} + Y^2 - 2iY\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + X^2 + 2iX\frac{\partial}{\partial Y})
\end{aligned}
$$

この形を見ると、括弧の中で生成、消滅演算子を作れれば調和振動子と同じ形になるのが予想できます。
　新しい座標として

$$
Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+iY) \ , \ \overline{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-iY)
$$

という複素座標を作ります (Z は z 軸の座標ではないです)。$\overline{Z}$ と書いていますが、Z の複素共役です。微分は

$$\frac{\partial}{\partial X}=\frac{\partial Z}{\partial X}\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{\partial\overline{Z}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})\ ,\ \frac{\partial}{\partial Y}=\frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{\partial\overline{Z}}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}=\frac{i}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial Z}-\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})$$

このように変換されます。調和振動子での生成、消滅演算子 $a^\dagger, a$ は位置と運動量によって大雑把には

$$a=(x+ip)\ ,\ a^\dagger=(x-ip)$$

という形なので、これを真似て座標 x を Z として

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}(Z+\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})\ ,\ a^\dagger=(Z^\dagger+(\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})^\dagger)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{Z}-\frac{\partial}{\partial Z})$$

このようなものを作ります。$(\partial/\partial\overline{Z})^\dagger$ が $-\partial/\partial Z$ となるのは、$\partial/\partial Z$ は X, Y によって

$$\frac{\partial}{\partial Z}=\frac{\partial}{\partial X}-i\frac{\partial}{\partial Y}=\frac{1}{i}i\frac{\partial}{\partial X}-i\frac{\partial}{\partial Y}$$

このようになっており、微分演算子に $-i$ をかけたものはエルミート演算子になるという性質 (運動量演算子がそうなっている) から

$$(\frac{\partial}{\partial Z})^\dagger=[\frac{-1}{i}(-i\frac{\partial}{\partial X})+(-i\frac{\partial}{\partial Y})]^\dagger=\frac{1}{i}(-i\frac{\partial}{\partial X})+(-i\frac{\partial}{\partial Y})=-\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}=\frac{\partial}{\partial X}+i\frac{\partial}{\partial Y}=\frac{1}{i}i\frac{\partial}{\partial X}+i\frac{\partial}{\partial Y}\Big)$$

となるためです。後で必要になるので、先に $a^\dagger a$、$aa^\dagger$ を計算してくおくと

$$a^\dagger a=\frac{1}{2}(\overline{Z}-\frac{\partial}{\partial Z})(Z+\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})=\frac{1}{2}(\overline{Z}Z+\overline{Z}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}-1-Z\frac{\partial}{\partial Z}-\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})$$

$$aa^\dagger=\frac{1}{2}(Z+\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})(\overline{Z}-\frac{\partial}{\partial Z})=\frac{1}{2}(Z\overline{Z}-Z\frac{\partial}{\partial Z}+1+\overline{Z}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}-\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}\frac{\partial}{\partial Z})$$

ハミルトニアン演算子を Z を使って書き換えれば

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\hbar\omega_c}{4}\big(-\frac{\partial^2}{\partial X^2} + Y^2 - 2iY\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + X^2 + 2iX\frac{\partial}{\partial Y}\big) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{4}\big(-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^2 - \frac{(Z-\overline{Z})^2}{2} - \frac{2i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}(Z-\overline{Z})}{2i}(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}) - \frac{-1}{2}(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^2 + \frac{(Z+\overline{Z})^2}{2} \\
&\qquad + 2i\frac{\sqrt{2}}{2}(Z+\overline{Z})\frac{i}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})\big) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{4}\big(-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^2 - \frac{(Z-\overline{Z})^2}{2} - (Z-\overline{Z})(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^2 + \frac{(Z+\overline{Z})^2}{2} \\
&\qquad - (Z+\overline{Z})(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})\big) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{4}\big(-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^2 - \frac{(Z^2 + \overline{Z}^2 - Z\overline{Z} - \overline{Z}Z)}{2} - (Z-\overline{Z})(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^2 \\
&\qquad + \frac{(Z^2 + \overline{Z}^2 + Z\overline{Z} + \overline{Z}Z)}{2} - (Z+\overline{Z})(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})\big) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{4}\big(-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^2 + (Z\overline{Z} + \overline{Z}Z) - (Z-\overline{Z})(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}) - (Z+\overline{Z})(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})\big) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{4}\big(-2\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} + 2\overline{Z}Z - 2Z\frac{\partial}{\partial Z} + 2\overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\big) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{2}\big(-\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} + \overline{Z}Z - Z\frac{\partial}{\partial Z} + \overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\big) \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{2}\big(-\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} + \overline{Z}Z - Z\frac{\partial}{\partial Z} + \overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} - 1\big) + \frac{\hbar\omega}{2}
\end{aligned}
$$

第一項は $2a^\dagger a$ と一致しているので

$$
H = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2})
$$

というわけで、完全に調和振動子の場合と一致した形になります。ただし、まだ $a^\dagger$ と a が生成、消滅演算子になっているのか分からないので確かめます。

まず、a と $a^\dagger$ の交換関係が 1 になっているのかを見ると

$$
[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = \frac{1}{2}(Z\overline{Z} - Z\frac{\partial}{\partial Z} + 1 + \overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\frac{\partial}{\partial Z}) - \frac{1}{2}(\overline{Z}Z + \overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} - 1 - Z\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} = 1
$$

$Z, \overline{Z}$ は座標なので交換します ($Z\overline{Z} = \overline{Z}Z$)。1 になっているので、生成・消滅演算子として使えます。そして $a^\dagger a$ は粒子数演算子 N となります。

消滅演算子が作用すると消える基底状態 $\psi_0(Z, \overline{Z})$ は

$$
a\psi_0(Z, \overline{Z}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z + \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})\psi_0(Z, \overline{Z}) = 0
$$

を解けば求まります。解はすぐに分かるように

$$
\psi_0(Z, \overline{Z}) = A\exp[-Z\overline{Z}]
$$

となります。これが最低ランダウ準位です。これに $a^\dagger$ を作用させていけば n 状態での波動関数を作ることが出来ます。

規格化は (規格化定数を A として)

$$\int dxdy\ |A|^2\exp[-2Z\overline{Z}]=1$$

なので

$$\exp[-2Z\overline{Z}]=\exp[-(X^2+Y^2)]=\exp[-\frac{x^2+y^2}{2l^2}]$$

から

$$\int dxdy|A|^2\exp[-2Z\overline{Z}]=|A|^2\int dx\exp[-\frac{x^2}{2l^2}]\int dy\exp[-\frac{y^2}{2l^2}]=|A|^2 2\pi l^2$$

よって、A は

$$A=\sqrt{\frac{1}{2\pi l^2}}$$

となります。

さらに今の場合、磁場が掛かっていると古典論の場合では円運動する、ということから推測すれば軌道角運動量が絡んでいるだろうと予想できます (スピン角運動量は見ていないのでこれ以降角運動量と書きます)。今は xy 平面の二次元で見ているので角運動量

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$$

の z 成分 $L_z=xp_y-yp_x$ だけが寄与します。これを演算子化して

$$L_z=-i\hbar x\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar y\frac{\partial}{\partial x}$$

これを今まで見てきたのと同じ構造にもっていきます。

$$\begin{aligned}
L_z=&-i\hbar x\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar y\frac{\partial}{\partial x}\\
=&-i\hbar X\frac{\partial}{\partial Y}+i\hbar Y\frac{\partial}{\partial X}\\
=&\frac{\hbar X}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial Z}-\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})+\frac{i\hbar Y}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})\\
=&\frac{\hbar(Z+\overline{Z})}{2}(\frac{\partial}{\partial Z}-\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})+\frac{\hbar(Z-\overline{Z})}{2}(\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})\\
=&\frac{\hbar}{2}(Z\frac{\partial}{\partial Z}-Z\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}+\overline{Z}\frac{\partial}{\partial Z}-\overline{Z}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})+\frac{\hbar}{2}(Z\frac{\partial}{\partial Z}+Z\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}-\overline{Z}\frac{\partial}{\partial Z}-\overline{Z}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})\\
=&\hbar(Z\frac{\partial}{\partial Z}-\overline{Z}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}})
\end{aligned}$$

そして、新しく

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{Z} + \frac{\partial}{\partial Z})\ ,\ b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})$$

として

$$b^\dagger b = \frac{1}{2}(Z - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})(\overline{Z} + \frac{\partial}{\partial Z}) = \frac{1}{2}(Z\overline{Z} + Z\frac{\partial}{\partial Z} - 1 - \overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\frac{\partial}{\partial Z})$$
$$bb^\dagger = \frac{1}{2}(\overline{Z} + \frac{\partial}{\partial Z})(Z - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}) = \frac{1}{2}(\overline{Z}Z - \overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} + 1 + Z\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}})$$

$b^\dagger b$ と $a^\dagger a$ を比べることで

$$L_z = \hbar(b^\dagger b - a^\dagger a)$$

と出来ることがわかります。このように書いてたことから予想できるように、$b, b^\dagger$ の交換関係が

$$[b, b^\dagger] = \frac{1}{2}(\overline{Z}Z - \overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} + 1 + Z\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}) - \frac{1}{2}(Z\overline{Z} + Z\frac{\partial}{\partial Z} - 1 - \overline{Z}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}} - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\frac{\partial}{\partial Z}) = 1$$

となるので、$b^\dagger, b$ も生成、消滅演算子です。これは今の状況から分かるように角運動量の一部に対するものです。つまり、角運動量の固有値は ($b^\dagger b$ の固有値を m、$a^\dagger a$ を n として)

$$L_z = \hbar(b^\dagger b - a^\dagger a)\ \Rightarrow\ \hbar(m - n)\quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となります。
　このことから、磁場が掛かっているとき波動関数を区別する状態が二つあることになります。つまり

$$\psi_{n,m}(Z, \overline{Z}) = (b^\dagger)^m (a^\dagger)^n \psi_{0,0}(Z, \overline{Z})$$

このことからも分かるように、ランダウ準位でのエネルギーは縮退しています。本当は係数として $1/\sqrt{n!m!}$ というのが入りますが無視します。この場合での基底状態は

$$a\psi_{0,0}(Z, \overline{Z}) = b\psi_{0,0}(Z, \overline{Z}) = 0$$

で求めることができ、これはすでに求めた

$$\psi_{0,0}(Z, \overline{Z}) = \exp[-Z\overline{Z}]$$

として成り立っています。最低ランダウ準位は $n = 0$ の場合なので、$m \neq 0$ の形も求めると (面倒なので係数は無視します)

$$
\begin{aligned}
(b^\dagger)^m \psi_{0,0}(Z,\overline{Z}) &= (b^\dagger)^m \exp[-Z\overline{Z}] \\
&= (Z - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^m \exp[-Z\overline{Z}] \\
&= (Z - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^{m-1} (2Z) \exp[-Z\overline{Z}] \\
&= (Z - \frac{\partial}{\partial \overline{Z}})^{m-2} (2Z)^2 \exp[-Z\overline{Z}]
\end{aligned}
$$

これが続いていくので

$$
\psi_{0,m}(Z,\overline{Z}) = CZ^m \exp[-Z\overline{Z}]
$$

C は係数を正確に残しておけば簡単に求められます (規格化定数 A もここにいれてます)。これを元の (x,y) 座標に戻せば

$$
\begin{aligned}
\psi_{0,m}(x,y) &= C(X+iY)^m \exp[-\frac{X^2+Y^2}{2}] \\
&= \frac{C}{l^m}(x+iy)^m \exp[-\frac{x^2+y^2}{4l^2}]
\end{aligned}
$$

となっています。exp 内が x^2+y^2 なんていう分かりやすい格好をしていることから予想できるように、電子は円周上にいます ($x^2+y^2=r^2$ とすれば半径 $r=\sqrt{2m}l$ 上で確率が最大。これを出すときには規格化定数 A の中にいる l を考慮してください)。