D 行列の計算

$j = 1/2$ と 1 での D 行列を求めます。

一般形を使わずに D 行列を求める手順を示します。具体的に $j = 1/2, 1$ として見ていきます。D 行列は

$$\begin{aligned}
D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) =\ & \langle j,m'|\hat{U}(\alpha,\beta,\gamma)|j,m\rangle = \langle j,m'|e^{-i\alpha\hat{J}_3/\hbar}e^{-i\beta\hat{J}_2/\hbar}e^{-i\gamma\hat{J}_3/\hbar}|j,m\rangle \\
&= e^{-i\alpha m'}e^{-i\gamma m}\langle j,m'|e^{-i\beta\hat{J}_2/\hbar}|j,m\rangle \\
&= e^{-i(\alpha m'+\gamma m)}d^{(j)}_{m'm}(\beta)
\end{aligned}$$

ここでは角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$ と書きます。$\hat{U}$ はオイラー角 α, β, γ による回転行列、$|j,m\rangle$ は $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ と $\hat{J}_3$ の固有状態、j は 0 以上の整数か半整数、$m = -j, -j+1, \ldots, j$ です。$\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ の $|j,m\rangle$ による表現行列は、「ウィグナーの D 行列」で求めているように

$$J_1 = \langle j,m'|\hat{J}_1|j,m\rangle = \frac{1}{2}(C^+_{j,m}\delta_{m',m+1} + C^-_{j,m}\delta_{m',m-1}) \tag{1a}$$

$$J_2 = \langle j,m'|\hat{J}_2|j,m\rangle = \frac{1}{2i}(C^+_{j,m}\delta_{m',m+1} - C^-_{j,m}\delta_{m',m-1}) \tag{1b}$$

$$J_3 = \langle j,m'|\hat{J}_3|j,m\rangle = \hbar m\langle j,m'|j,m\rangle = \hbar m\delta_{m'm} \tag{1c}$$

$C^{\pm}_{j,m}$ は

$$C^{\pm}_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}$$

となっています。

- $j = 1/2$

  $j = 1/2$ では $m = \pm 1/2$ なので、固有状態 $|j,m\rangle$ は 2 つになり

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\ ,\ |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \tag{2}$$

  この 2 つの固有状態は直交しているので、$\hat{J}_3$ の行列 $(J_3)_{m'm} = \langle j,m'|\hat{J}_3|j,m\rangle$ の成分は直交性 (m, m' が等しければ 1、そうでなければ 0) から

$$\begin{aligned}
&(1,1) : \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\hat{J}_3|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar}{2} \\
&(1,2) : \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\hat{J}_3|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = 0 \\
&(2,1) : \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\hat{J}_3|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = 0 \\
&(2,2) : \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\hat{J}_3|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = -\frac{\hbar}{2}
\end{aligned}$$

と与えられます。成分との対応は $m=1/2$ を 1、$m=-1/2$ を 2 としています。

(1a) で $j=j'=1/2$ とすれば、今の $\hat{J}_1$ の行列の成分は

$$\langle\frac{1}{2},m'|\hat{J}_1|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}\delta_{m',-1/2}\ \Rightarrow\ \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\hat{J}_1|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=0\ ,\ \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\hat{J}_1|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=\frac{\hbar}{2}$$

$$\langle\frac{1}{2},m'|\hat{J}_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1)}\delta_{m',1/2}\ \Rightarrow\ \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\hat{J}_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=0\ ,\ \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\hat{J}_1|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\frac{\hbar}{2}$$

と求まります。上は (1,1) 成分と (2,1) 成分、下は (2,2) 成分と (1,2) 成分です。$\hat{J}_2$ では $m=1/2$ での符号が反転するので、i で割って $m=1/2$ の符号を反転させたものです (成分で言えば (2,1))。

よって、$\hat{J}_i$ の (2) における行列は

$$J_1=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\sigma_1\ ,\ J_2=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\sigma_2\ ,\ J_3=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\sigma_3$$

となります。σ_i をパウリ行列 (pauli matrix) と呼び、頻繁に出てきます。

積を計算すれば分かるように σ_i は、I を単位行列として

$$\sigma_i^2=I\ ,\ \sigma_i^3=\sigma_i\ ,\ \sigma_i^4=I\ ,\ \ldots\ \Rightarrow\ \sigma_i^{2n}=I\ ,\ \sigma_i^{2n+1}=\sigma_i\quad(n=0,1,2,\ldots)$$

となっています。これを使うと、2×2 行列 $d^{(1/2)}$ は

$$\begin{aligned}
d^{(1/2)}_{m'm}&=\langle\frac{1}{2},m'|e^{-i\beta\hat{J}_2/\hbar}|\frac{1}{2},m\rangle\\
&=\langle\frac{1}{2},m'|\frac{1}{2},m\rangle+(-i\frac{\beta}{\hbar})\langle\frac{1}{2},m'|\hat{J}_2|\frac{1}{2},m\rangle+\frac{1}{2}(-i\frac{\beta}{\hbar})^2\langle\frac{1}{2},m'|\hat{J}_2^2|\frac{1}{2},m\rangle+\cdots\\
d^{(1/2)}&=\exp[-\frac{i}{2}\beta\sigma_2]\\
&=I+(-\frac{i}{2}\beta\sigma_2)+\frac{1}{2}(-\frac{i}{2}\beta\sigma_2)^2+\frac{1}{3!}(-\frac{i}{2}\beta\sigma_2)^3+\frac{1}{4!}(-\frac{i}{2}\beta\sigma_2)^4+\cdots\\
&=I-\frac{i}{2}\beta\sigma_2-\frac{1}{2!}(\frac{\beta}{2})^2I+\frac{i}{3!}(\frac{\beta}{2})^3\sigma_2+\frac{1}{4!}(\frac{\beta}{2})^4I+\cdots\\
&=I-\frac{1}{2!}(\frac{\beta}{2})^2I+\frac{1}{4!}(\frac{\beta}{2})^4I+\cdots\\
&\quad-i\sigma_2\frac{\beta}{2}+i\sigma_2\frac{1}{3!}(\frac{\beta}{2})^3-i\sigma_2\frac{1}{5!}(\frac{\beta}{2})^5\\
&=I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\frac{\beta}{2})^{2n}-i\sigma_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\frac{\beta}{2})^{2n+1}\\
&=I\cos\frac{\beta}{2}-i\sigma_2\sin\frac{\beta}{2}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}&-\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2}&\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と求まります。D 行列にするなら

$$D^{(1/2)}_{m'm} = e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}d^{(j)}_{m'm}(\beta)$$

$$D^{(1/2)} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\dfrac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\dfrac{\beta}{2} \\ e^{-i(-\alpha+\gamma)/2}\sin\dfrac{\beta}{2} & e^{-i(-\alpha-\gamma)/2}\cos\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

となります。

- $J=1$

  $J=1$ も手間が増えるだけで同様に求められます。$j=1$ での固有状態は

$$|1,1\rangle\ ,\ |1,0\rangle\ ,\ |1,-1\rangle$$

として、3 次元ベクトル空間の基底になります。このときの $\hat{J}_3$ の行列は 3×3 行列で、固有値が $0,\pm\hbar$ なので、行列成分は

$$(1,1):\langle 1,1|\hat{J}_3|1,1\rangle = \hbar$$

$$(1,2):\langle 1,1|\hat{J}_3|1,0\rangle = 0$$

$$(1,3):\langle 1,1|\hat{J}_3|1,-1\rangle = 0$$

$$(2,1):\langle 1,0|\hat{J}_3|1,1\rangle = 0$$

$$(2,2):\langle 1,0|\hat{J}_3|1,0\rangle = 0$$

$$(2,3):\langle 1,0|\hat{J}_3|1,-1\rangle = 0$$

$$(3,1):\langle 1,-1|\hat{J}_3|1,1\rangle = 0$$

$$(3,2):\langle 1,-1|\hat{J}_3|1,0\rangle = 0$$

$$(3,3):\langle 1,-1|\hat{J}_3|1,-1\rangle = -\hbar$$

成分は $m=1$ を 1、$m=0$ を 2、$m=-1$ を 3 としています。$\hat{J}_1$ は (1a) から

$$\langle 1,m'|\hat{J}_1|1,m\rangle = \frac{\hbar}{2}(\sqrt{2-m(m+1)}\delta_{m',m+1} + \sqrt{2-m(m-1)}\delta_{m',m-1})$$

このときの 0 にならない成分は

$$\langle 1,m'|\hat{J}_1|1,1\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\delta_{m',0}\ \Rightarrow\ \langle 1,0|\hat{J}_1|1,1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1,m'|\hat{J}_1|1,0\rangle = \frac{\hbar}{2}(\sqrt{2}\delta_{m',1} + \sqrt{2}\delta_{m',-1})\ \Rightarrow\ \langle 1,1|\hat{J}_1|1,0\rangle = \langle 1,-1|\hat{J}_1|1,0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1,m'|\hat{J}_1|1,-1\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\delta_{m',0}\ \Rightarrow\ \langle 1,0|\hat{J}_1|1,-1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

$\hat{J}_2$ ではこれの $m=1$ と $m=0, m'=-1$ での符号を反転させ、i で割ればいいです (成分で言えば (2,1) と (3,2))。

よって、$\hat{J}_i$ の行列は

$$J_1=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\ ,\ J_2=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\ ,\ J_3=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

となります。

d 行列を求めるために J_2 の積の規則を見つけます。$J_2=\hbar A/\sqrt{2}$ として、A は

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\ ,\ A^3=\begin{pmatrix}0&-2i&0\\2i&0&-2i\\0&2i&0\end{pmatrix}=2A$$

このため

$$A^4=2A^2\ ,\ A^5=2A^3=4A\ ,\ A^6=4A^2\ ,\ A^7=8A\ ,\ A^8=8A^2\ ,\ldots$$

と続くので

$$A^{2n}=2^{n-1}A^2\qquad(n=1,2,\ldots)$$

$$A^{2n+1}=2^nA\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

となっています。これを使うと

$$\begin{aligned}d^{(1/2)}=&\ \exp[-\frac{i}{\sqrt{2}}\beta A]\\&=I+(-\frac{i}{\sqrt{2}}\beta A)+\frac{i^2}{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}\beta A)^2+\frac{i^3}{3!}(-\frac{1}{\sqrt{2}}\beta A)^3+\cdots\\&=I-i\frac{\beta}{\sqrt{2}}A-\frac{1}{2}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^2A^2+\frac{i}{3!}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^3A^3+\frac{1}{4!}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^4A^4-\cdots\\&=I-i\frac{\beta}{\sqrt{2}}A+\frac{i}{3!}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^3A^3-\cdots\\&\quad-\frac{1}{2}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^2A^2+\frac{1}{4!}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^4A^4-\cdots\\&=I-iA\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(2n+1)!}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^{2n+1}+A^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{n-1}}{(2n)!}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^{2n}\end{aligned}$$

第 2 項は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\sqrt{2})^{2n}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\beta^{2n+1}=\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$$

なので

$$-iA\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

第 1 項と第 3 項は

$$I+A^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(2n)!}(\frac{\beta}{\sqrt{2}})^{2n}=I+\frac{1}{2}A^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}$$

0 でない成分は

$$(1,1):1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=\frac{1}{2}(1+\cos\beta)$$

$$(2,2):1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=\cos\beta$$

$$(3,3):1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=\frac{1}{2}(1+\cos\beta)$$

$$(1,3):\ -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=\frac{1}{2}(1-\cos\beta)$$

$$(3,1):\ -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^{2n}=\frac{1}{2}(1-\cos\beta)$$

まとめると

$$d^{(1)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \cos\beta & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix}$$

となります。手間が増えていきますが、同様にすればより大きな j でも求まります。

3×3 行列 $d^{(1)}$ は $\hat{J}_2$ 部分なので、単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ による $\boldsymbol{n}$ 軸周りの 3 次元回転行列

$$R_n(\theta) = \exp[-i\alpha(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M})]$$

$$\boldsymbol{M} = (M_1, M_2, M_3)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k$$

での (ローマ文字の添え字は 1,2,3)、基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ における $\boldsymbol{e}_2$ 軸周りの回転行列

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp[-i\theta M_2]$$

が出てくるように思えますが、求まった形は異なっています。この違いは演算子から作られる表現行列は基底に依存していることによります。つまり、M_i はデカルト座標での基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ での行列で、J_i はそれとは異なった基底での行列になっているということです。

基底による違いは相似変換で与えられるので、それを求めます。今の場合では M_2 を使うより M_3 を使った方が簡単なので、M_3 を使います。

M_3 はエルミート行列なので、「エルミート演算子」の補足で触れたように、相似変換に使うユニタリー行列を固有ベクトルから作れます。固有値を $\lambda^{(a)}$、固有ベクトルを $\boldsymbol{u}^{(a)}$ として

$$M_3\boldsymbol{u}^{(a)} = \lambda^{(a)}\boldsymbol{u}^{(a)}$$

(a) は固有値による区別です。このとき、ユニタリー行列 T と対角化された行列 M_3' は

$$M_3' = T^{-1}M_3T = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}\ ,\ T = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & u_1^{(3)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & u_2^{(3)} \\ u_3^{(1)} & u_3^{(2)} & u_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

$u_i^{(a)}$ の i はベクトル成分です。M_3 の固有値は

$$\det[M_3 - \lambda^{(a)}I] = 0$$

から分かります。行列式を計算すれば

$$\det[M_3 - \lambda I] = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda$$

なので、固有値は $\lambda = \pm 1, 0$ です。対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

から

$$-iu_2 = \lambda u_1 \ , \ iu_1 = \lambda u_2$$

M'_3 を J_3 に対応させたいので、$\lambda^{(a)}$ とその固有ベクトルを

$$\lambda^{(1)} = +1 : \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda^{(3)} = -1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

とします。符号の任意性がありますが、このように取ることが多いです。これらを 1 に規格化して、固有ベクトルは直交しているので

$$(\boldsymbol{u}^{(i)})^\dagger \cdot \boldsymbol{u}^{(j)} = \delta_{ij}$$

となるように $u^{(2)}$ を決めれば

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ u^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \ , \ T^{-1} = T^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

これを M_3 に使えば

$$
\begin{aligned}
T^{-1}M_3T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となって、J_3 になります。M_1, M_2 でも同様です。R_2 に対して行えば

$$
\begin{aligned}
T^{-1}R_2(\theta)T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta & \cos\theta \\ -i & 0 & -i \\ \sin\theta & \sqrt{2}\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta) & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \end{pmatrix} \\
&= d^{(1)}(\theta)
\end{aligned}
$$

となります。

J_i の基底がどうなっているのかも求めてみます。M_i はデカルト座標での回転行列から作られているので、基底はデカルト座標の基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ です。相似変換 $J_i = T^{-1}M_iT$ に対応する基底の変換は

$$
\boldsymbol{g}_i = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j T_{ji}
$$

これから、J_3 の基底は

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{e}_1T_{11} + \boldsymbol{e}_2T_{21} + \boldsymbol{e}_3T_{31} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2) \\
&\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{e}_1T_{12} + \boldsymbol{e}_2T_{22} + \boldsymbol{e}_3T_{32} = \boldsymbol{e}_3 \\
&\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{e}_1T_{13} + \boldsymbol{e}_2T_{23} + \boldsymbol{e}_3T_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}
$$

と求まります。この基底は spherical basis と呼ばれ、添え字は

$$\boldsymbol{g}_{+1} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2)\ ,\ \boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{e}_3\ ,\ \boldsymbol{g}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2)$$

と表記されます。極座標を spherical coordinate とも言うので紛らわしいですが、極座標の基底ではないです。