調和振動子のコヒーレント状態

量子論のいろいろな分野で出てくるコヒーレント状態の導入部分を見ていきます。
複素数の実部には r、虚部には i の添え字を付けています。

「調和振動子」での結果をまとめておきます。1 次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{1}$$

ω は角振動数です。変形することで

$$H = \hbar\omega a^* a \qquad (a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + i\frac{p}{m\omega}))$$

これからハミルトニアン演算子と生成、消滅演算子 $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ は

$$\begin{aligned}
&\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \\
&\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{X} - i\frac{\hat{P}}{m\omega}) \ , \ \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{X} + i\frac{\hat{P}}{m\omega}) \\
&[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1
\end{aligned}$$

位置演算子を $\hat{X}$、運動量演算子を $\hat{P}$ としていて、生成、消滅演算子で書けば

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \ , \ \hat{P} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

ハミルトニアン演算子の固有状態 $|E_n\rangle$ は

$$\hat{H}|E_n\rangle = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})|E_n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|E_n\rangle$$

として、個数演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有値 $n = 0, 1, 2, \ldots$ を与えます。なので、$|E_n\rangle$ は $|n\rangle$ と表記することにし、基底状態は $|0\rangle$ $(\hat{a}|0\rangle = 0)$ とします。生成、消滅演算子を作用させると

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \ , \ \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$|n\rangle$ による波動関数 $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ は

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n}}(\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} \exp[-\frac{\hbar}{2m\omega}x^2]H_n(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}x)$$

$$H_n(s) = (-1)^n e^{s^2}\frac{d^n}{ds^n}e^{-s^2} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

H_n はエルミート多項式です。$n = 0$ のときは

$$\psi_0(x) = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} \exp[-\frac{\hbar}{2m\omega}x^2] \tag{2}$$

となっています。

$|n\rangle$ による波動関数は求められていますが、違う状態を使って別の波動関数を作ります。ここで作りたいのは、古典的な調和振動子 (単振動) の解 x_c のときに一番高い確率を与える波動関数です。もっと直接的に言えば、波動関数による確率密度 $|\psi|^2$ が x_c を中心とするガウス分布になる場合です。そのために、期待値が古典的な解になる状態を作ります。

$|n\rangle$ での期待値を先に見ておきます。位置演算子 $\hat{X}$ を $|n\rangle, |n'\rangle$ で挟むと

$$\langle n'|\hat{X}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n'|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\langle n'|n+1\rangle + \sqrt{n}\langle n'|n-1\rangle)$$

ハミルトニアン演算子 (エルミート演算子) の固有状態なので直交していることから

$$\langle n'|n \pm 1\rangle = \delta_{n', n\pm 1}$$

位置演算子に時間依存性を持たせると

$$\hat{X}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{X}e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

なので

$$\begin{aligned}\langle n'|\hat{X}(t)|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n'|e^{i\hat{H}t/\hbar}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})e^{-i\hat{H}t/\hbar}|n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}e^{iE_{n'}t/\hbar}e^{-iE_n t/\hbar}\delta_{n', n+1} + \sqrt{n}e^{iE_{n'}t/\hbar}e^{-iE_n t/\hbar}\delta_{n', n-1})\end{aligned}$$

クロネッカーデルタから $n' = n \pm 1$ のとき以外は 0 なので

$$e^{i(E_{n'} - E_n)t/\hbar}\delta_{n', n\pm 1} = e^{i(n'-n)\omega t}\delta_{n', n\pm 1} = e^{i(n\pm 1 - n)\omega t}\delta_{n', n\pm 1} = e^{\pm i\omega t}\delta_{n', n\pm 1}$$

となり

$$\langle n'|\hat{X}(t)|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}e^{i\omega t}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}e^{-i\omega t}\delta_{n',n-1})$$

$e^{\pm i\omega t}$ を含んでいるので古典的な解 x_c とは似ていますが、異なっています。
　というわけで、x_c となる状態 $|z\rangle$ が存在すると仮定して

$$\langle z|\hat{X}(t)|z\rangle = x_c = A^*e^{i\omega t} + Ae^{-i\omega t} = 2A_r\cos\omega t + 2A_i\sin\omega t = x_c \qquad (A = A_r + iA_i)$$

実数の解にするために、任意定数を複素数 A とその複素共役 A^* にしています。任意の状態は完全直交系の状態で展開できるので、$|n\rangle$ で展開することにして

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

この C_n を求めます。規格化から

$$\langle z|z\rangle = \sum_{n,n'=0}^{\infty}\langle n'|C_{n'}^*C_n|n\rangle = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty}C_n^*C_n = \sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2 = 1$$

期待値は

$$\begin{aligned}\langle z|\hat{X}(t)|z\rangle =& \sum_{n,n'=0}^{\infty} C_{n'}^*C_n\langle n'|\hat{X}(t)|n\rangle \\ =& \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sum_{n,n'=0}^{\infty}C_{n'}^*C_n\sqrt{n+1}e^{i\omega t}\delta_{n',n+1} + \sum_{n,n'=0}^{\infty}C_{n'}^*C_n\sqrt{n}e^{-i\omega t}\delta_{n',n-1}) \\ =& \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^*C_n\sqrt{n+1}e^{i\omega t} + \sum_{n=0}^{\infty}C_n^*C_{n+1}\sqrt{n+1}e^{-i\omega t})\end{aligned}$$

括弧内の第 2 項は $n=0$ のとき $0-1$ になってしまうので、$+1$ ずらしています。これが

$$A^*e^{i\omega t} + Ae^{-i\omega t} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}(C_{n+1}^*C_ne^{i\omega t} + C_{n+1}C_n^*e^{-i\omega t})$$

となればいいので

$$\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^*C_n\sqrt{n+1} = A^*$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^*C_n\sqrt{n+1} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}A^* \tag{3}$$

$|z\rangle$ によるハミルトニアン演算子の期待値は (1) になるべきなので

$$\begin{aligned}
\langle z|\hat{H}|z\rangle &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \\
&= \frac{m\omega^2}{2}(-A_r\sin\omega t + A_i\cos\omega t)^2 + \frac{m\omega^2}{2}(2A_r\cos\omega t + 2A_i\sin\omega t)^2 \\
&= 2m\omega^2(A_r^2\sin^2\omega t + A_i^2\cos^2\omega t + A_r^2\cos^2\omega t + A_i^2\sin^2\omega t) \\
&= 2m\omega^2(A_r^2 + A_i^2) \\
&= 2m\omega^2|A|^2
\end{aligned}$$

量子論での調和振動子との対応を取るために零点エネルギーを加えることにして

$$\langle z|\hat{H}|z\rangle = 2m\omega^2|A|^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

左辺は $|n\rangle$ の完全性から

$$\begin{aligned}
\langle z|\hat{H}|z\rangle &= \sum_{n,n'=0}^{\infty}\langle z|n'\rangle\langle n'|\hat{H}|n\rangle\langle n|z\rangle \\
&= \sum_{n,n'=0}^{\infty}E_n\langle z|n'\rangle\langle n'|n\rangle\langle n|z\rangle \\
&= \sum_{n,n'=0}^{\infty}\langle z|n'\rangle\langle n|z\rangle E_n\delta_{n',n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\langle z|n'\rangle\langle n|z\rangle E_n
\end{aligned}$$

$\langle n|z\rangle$ は

$$\begin{aligned}
&\langle n|z\rangle = \langle n|\sum_{n'=0}^{\infty}C_{n'}|n'\rangle = \sum_{n'=0}^{\infty}C_{n'}\langle n|n'\rangle = C_n \\
&\langle z|n'\rangle = (\langle n'|z\rangle)^* = C_{n'}^*
\end{aligned}$$

なので

$$\langle z|\hat{H}|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}E_nC_n^*C_n = \sum_{n=0}^{\infty}\hbar\omega(n+\frac{1}{2})|C_n|^2 = \hbar\omega\sum_{n=0}^{\infty}n|C_n|^2 + \frac{\hbar\omega}{2}\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2 = \hbar\omega\sum_{n=0}^{\infty}n|C_n|^2 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

よって

$$\hbar\omega\sum_{n=0}^{\infty} n|C_n|^2 = 2m\omega^2|A|^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|C_n|^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}|A|^2$$

$n = 0$ のとき 0 なので 1 ずらして

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|C_{n+1}|^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}|A|^2 \tag{4}$$

(3) と (4) において、A を

$$z = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}A \tag{5}$$

と置き換えると

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}^* C_n \sqrt{n+1} = z^*$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}^* C_{n+1}(n+1) = z^* z$$

これらから

$$C_{n+1} = \frac{z}{\sqrt{n+1}}C_n$$

C_n は

$$n = 0 : C_1 = zC_0$$

$$n = 1 : C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}zC_1 = \frac{z^2}{\sqrt{2}}C_0$$

$$n = 2 : C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}zC_2 = \frac{z^2}{\sqrt{3\times 2}}C_1 = \frac{z^3}{\sqrt{3\times 2}}C_0$$

と続くので

$$C_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}C_0$$

規格化から

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2 \\
&= |C_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^*)^n z^n}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}} \\
&= |C_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n!} \\
&= |C_0|^2 e^{|z|^2} \\
|C_0|^2 &= e^{-|z|^2} \\
C_0 &= e^{-|z|^2/2}
\end{aligned}
$$

より一般的には位相因子 $e^{i\delta}$ がつきますが省きます。よって

$$
C_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}e^{-|z|^2/2}
$$

となり、期待値が古典的な解となる状態 $|z\rangle$ はハミルトニアン演算子の固有状態 $|n\rangle$ の重ね合わせとして

$$
|z\rangle = e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle
$$

と与えられます。これを調和振動子のコヒーレント状態 (coherent state) と言います。コヒーレントは量子光学での単語からです。コヒーレント状態は 1926 年にシュレーディンガーが最初に導入し、1960 年代に Glauber, Klauder, Sudarshan が再定式化しました。

波動関数を求めます。$|z\rangle$ を時間依存させた $|z;t\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
|z;t\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|z\rangle = e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\hat{H}t/\hbar}|n\rangle &= e^{-|z|^2/2}e^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\omega t}|n\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2}e^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-i\omega t}z)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle
\end{aligned}
$$

$|n\rangle$ は生成演算子によって

$$
|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle
$$

として作られるので

$$
\begin{aligned}
|z;t\rangle &= e^{-|z|^2/2} e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ze^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2} e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z(t)\hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \qquad (z(t) = ze^{-i\omega t}) \\
&= e^{-|z|^2/2} e^{-i\omega t/2} e^{z(t)\hat{a}^\dagger} |0\rangle
\end{aligned}
$$

そうすると、コヒーレント状態による波動関数 $\psi(x,t)$ は

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) = \langle x|z;t\rangle &= e^{-|z|^2/2} e^{-i\omega t/2} \langle x| e^{z(t)\hat{a}^\dagger} |0\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2} e^{-i\omega t/2} \langle x| \exp[z(t)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{X} - i\frac{\hat{P}}{m\omega})]|0\rangle
\end{aligned}
$$

ハウスドルフの公式

$$
e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \exp\big[-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]\big] \tag{6}
$$

と、交換関係

$$
\begin{aligned}
[\hat{X},\hat{P}] &= i\hbar \\
[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X}, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{-i}{m\omega}\hat{P}] &= i\hbar\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{-i}{m\omega} \\
[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X}, -i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{P}] &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

から

$$
\exp[z(t)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{X} - i\frac{\hat{P}}{m\omega})] = \exp[z(t)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X})] \exp[-iz(t)\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{P}] \exp[-\frac{1}{4}z^2(t)]
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= e^{-|z|^2/2} e^{-i\omega t/2} e^{-z^2(t)/4} \langle x| \exp[z(t)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X}] \exp[-iz(t)\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{P}]|0\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2} e^{-i\omega t/2} e^{-z^2(t)/4} \exp[z(t)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x] \langle x| \exp[-iz(t)\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{P}]|0\rangle
\end{aligned}
$$

運動量演算子は

$$e^{-i\hat{P}\Delta x/\hbar}|x\rangle = |x+\Delta x\rangle$$

として、位置の平行移動を行うので

$$\langle x|\exp[-iz(t)\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{P}]|0\rangle = \langle x|\exp[-\frac{i}{\hbar}\hat{P}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}z(t)]|0\rangle = \langle x-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}z(t)|0\rangle$$

そして、(2) から

$$\langle x|0\rangle = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}\exp[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2]$$

なので

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}e^{-|z|^2/2}e^{-i\omega t/2}e^{-z^2(t)/4}\exp[z(t)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x]\exp[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}z(t))^2] \\
&= (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}e^{-i\omega t/2}\exp[-\frac{|z|^2}{2}-\frac{z^2(t)}{4}+z(t)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x-\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x-\frac{z(t)}{\sqrt{2}})^2]
\end{aligned}$$

exp 内は、(5) で z を A に戻せば

$$\begin{aligned}
&-\frac{|z|^2}{2}-\frac{z^2e^{-2i\omega t}}{4}+ze^{-i\omega t}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x-\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x-\frac{ze^{-i\omega t}}{\sqrt{2}})^2 \\
&= -\frac{|z|^2}{2}-\frac{z^2e^{-2i\omega t}}{4}+ze^{-i\omega t}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x-\frac{1}{2}(\frac{m\omega}{\hbar}x^2+\frac{z^2e^{-2i\omega t}}{2}-2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{ze^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}x) \\
&= -\frac{1}{2}|A|^2\frac{2m\omega}{\hbar}-\frac{1}{4}A^2\frac{2m\omega}{\hbar}e^{-2i\omega t}+A\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x \\
&\quad -\frac{1}{2}(\frac{m\omega}{\hbar}x^2+\frac{2m\omega}{\hbar}A^2\frac{e^{-2i\omega t}}{2}-2A\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}x) \qquad (z=\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}A) \\
&= -|A|^2\frac{m\omega}{\hbar}-\frac{1}{2}A^2\frac{m\omega}{\hbar}e^{-2i\omega t}+A\frac{m\omega}{\hbar}e^{-i\omega t}x-(\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2+\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}A^2e^{-2i\omega t}-A\frac{m\omega}{\hbar}e^{-i\omega t}x) \\
&= \frac{m\omega}{\hbar}(-|A|^2-\frac{1}{2}A^2e^{-2i\omega t}+Ae^{-i\omega t}x-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}A^2e^{-2i\omega t}-Ae^{-i\omega t}x)) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}(x^2+2|A|^2+2A^2e^{-2i\omega t}-4Ae^{-i\omega t}x)
\end{aligned}$$

x_c を含むようにして

$$
\begin{aligned}
x^2+&2|A|^2+2A^2e^{-2i\omega t}-4Ae^{-i\omega t}x\\
&=x^2-2(A^*e^{i\omega t}+Ae^{-i\omega t})x+2|A|^2+2A^2e^{-2i\omega t}+2A^*e^{i\omega t}x-2Ae^{-i\omega t}x\\
&=(x-x_c)^2-x_c^2+2|A|^2+2A^2e^{-2i\omega t}+2(A^*e^{i\omega t}-Ae^{-i\omega t})x\\
&=(x-x_c)^2-(A^{*2}e^{2i\omega t}+A^2e^{-2i\omega t}+2|A|^2)+2|A|^2+2A^2e^{-2i\omega t}+2(A^*e^{i\omega t}-Ae^{-i\omega t})x\\
&=(x-x_c)^2-A^{*2}e^{2i\omega t}+A^2e^{-2i\omega t}+2(A^*e^{i\omega t}-Ae^{-i\omega t})x
\end{aligned}
$$

第 2 項と第 3 項は

$$
\begin{aligned}
A^{*2}e^{2i\omega t}-A^2e^{-2i\omega t}&=A^{*2}(\cos(2\omega t)+i\sin(2\omega t))-A^2(\cos(2\omega t)-i\sin(2\omega t))\\
&=(A^{*2}-A^2)\cos(2\omega t)+i(A^{*2}+A^2)\sin(2\omega t)
\end{aligned}
$$

これは

$$
\begin{aligned}
&A^{*2}-A^2=(iA+A^*)^2-2iAA^*=(B+iB)^2-2i|A|^2=2i(B^2-|A|^2)\quad (B=A_r-A_i)\\
&A^{*2}+A^2=(A^*+A)^2-2AA^*=4A_r^2-2|A|^2
\end{aligned}
$$

となるので、純虚数です。第 4 項と第 5 項でも

$$
\begin{aligned}
A^*e^{i\omega t}-Ae^{-i\omega t}&=A^*(\cos\omega t+i\sin\omega t)-A(\cos\omega t-i\sin\omega t)\\
&=(A^*-A)\cos\omega t+i(A^*+A)\sin\omega t\\
&=-2iA_i\cos\omega t+2iA_r\sin\omega t
\end{aligned}
$$

となって、純虚数です。というわけで、第 1 項以外は位相因子としてまとめて

$$
\psi(x,t)=(\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}\exp[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_c(t))^2]e^{i\lambda(x,t)}
$$

これの確率密度は

$$
|\psi(x,t)|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-x_c(t))^2] \tag{7}
$$

となり、目的通りに古典的な解 x_c を中心とするガウス分布になっています。

コヒーレント状態の性質を見ていきます。重要な性質は、コヒーレント状態は消滅演算子の固有状態になっていることです。これは簡単に分かって

$$
\begin{aligned}
\hat{a}|z\rangle &= e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}\hat{a}|n+1\rangle \quad (\hat{a}|0\rangle = 0) \\
&= e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}\sqrt{n+1}|n\rangle \\
&= ze^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= z|z\rangle
\end{aligned}
$$

2 行目で 1 ずらしてます。このため、コヒーレント状態は消滅演算子の固有状態として定義されます。時間依存しているときは

$$
|z;t\rangle = e^{-|z|^2/2}e^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-i\omega t}z)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle
$$

から、固有値は

$$
\begin{aligned}
\hat{a}|z;t\rangle = \hat{a}e^{-i\hat{H}t/\hbar}|z\rangle &= e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}e^{-i\hat{H}t/\hbar}|n\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}e^{-iE_nt/\hbar}\hat{a}|n\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2}e^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-i\omega t}z)^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle \\
&= e^{-i\omega t}ze^{-|z|^2/2}e^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-i\omega t}z)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= e^{-i\omega t}z|z;t\rangle
\end{aligned}
$$

となります。

消滅演算子の固有状態とすることから始めても同じ結果が導けるのを見ておきます。消滅演算子の固有状態を $|\alpha\rangle$ として

$$
\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle
$$

消滅演算子はエルミート演算子ではないので α は複素数です（α は観測可能量ではない)。ハミルトニアン演算子の固有状態 $|n\rangle$ で展開して

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \sum_n C_n|n\rangle$$

消滅演算子を作用させると

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \alpha\sum_n C_n|n\rangle \tag{8}$$

C_n を求めます。消滅演算子の作用から

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\hat{a}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle$$

$|0\rangle$ が一番下になるように 1 ずらしています。これと (8) から

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$
$$C_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}C_n$$

これは上での C_n と同じ式なので、$|\alpha\rangle$ は $|z\rangle$ です。このように、消滅演算子の固有状態としても同じものが求められます。

コヒーレント状態の内積を求めます。α とは異なる固有値 β の固有状態を $|\beta\rangle$ とします。展開は同じなので

$$|\beta\rangle = \sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}e^{-|\beta|^2/2}|n\rangle$$

内積を取ると

$$\begin{aligned}
\langle\beta|\alpha\rangle &= e^{-|\beta^2|/2}e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\beta^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}\langle m|n\rangle \\
&= e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\beta^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}\delta_{mn} \\
&= e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\beta^*)^n}{n!} \\
&= e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2}e^{\alpha\beta^*}
\end{aligned}$$

消滅演算子はエルミート演算子ではないので、異なるコヒーレント状態は直交していません。絶対値の 2 乗は

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \exp[-(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha\beta^*+\alpha^*\beta] = \exp[-|\alpha-\beta|^2]$$

となり、$|\alpha-\beta|\to 0$ で 1 になります。

$|\alpha\rangle\langle\alpha|$ は

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{-|\alpha|^2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\alpha^m\alpha^{*n}}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}|m\rangle\langle n|$$

$\alpha = re^{i\phi}$ ($r=|\alpha|, \phi$ は実数) とすれば

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{-r^2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{r^{m+n}}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}e^{i(m-n)\phi}|m\rangle\langle n|$$

これを α の実部 α_r、虚部 α_i での $d\alpha_r d\alpha_i$ で積分します。これは複素平面での 2 次元積分なので、r,ϕ による極座標の積分にすれば

$$d\alpha_r d\alpha_i = rdrd\phi$$

となり

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha_r\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha_i|\alpha\rangle\langle\alpha| &= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}|m\rangle\langle n|\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi}d\phi\ r^{m+n+1}e^{-r^2}e^{i(m-n)\phi} \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}|m\rangle\langle n|2\pi\delta_{mn}\int_0^{\infty}dr\ r^{m+n+1}e^{-r^2} \\
&= 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|n\rangle\langle n|\int_0^{\infty}dr\ rr^{2n}e^{-r^2} \\
&= 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|n\rangle\langle n|\frac{1}{2}\int_0^{\infty}d\rho\ \rho^n e^{-\rho} \qquad (\rho=r^2\ ,\ d\rho=2rdr) \\
&= \pi\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\
&= \pi
\end{aligned}$$

使っている積分は

$$\int_0^{2\pi}d\phi\ e^{i(m-n)\phi} = 2\pi\delta_{mn}\ ,\ \int_0^{\infty}d\rho\ \rho^n e^{-\rho} = n!$$

左は数学の「フーリエ級数」、右は「ガンマ関数」を見てください。よって、コヒーレント状態では

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \qquad (d^2\alpha = d\alpha_r d\alpha_i)$$

となっています。

コヒーレント状態はハミルトニアン演算子の固有状態ではないので、分散は 0 になりません。これは簡単に確かめられます。期待値は

$$\begin{aligned}\langle\hat{H}\rangle = \langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle = \hbar\omega\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})|\alpha\rangle &= \hbar\omega\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\\ &= \hbar\omega\alpha^*\alpha\langle\alpha|\alpha\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\\ &= \hbar\omega(|\alpha|^2+\frac{1}{2})\end{aligned}$$

コヒーレント状態による期待値は $\langle\hat{A}\rangle$ と表記しています。$\hat{H}^2$ は

$$\hat{H}^2 = \hbar^2\omega^2(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}) = \hbar^2\omega^2(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{4})$$

なので

$$\langle\hat{H}^2\rangle = \langle\alpha|\hat{H}^2|\alpha\rangle = \hbar^2\omega^2\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{4})|\alpha\rangle$$

第 1 項は

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = |\alpha|^2\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)|\alpha\rangle = |\alpha|^2(|\alpha|^2+1)$$

となるので

$$\langle\hat{H}^2\rangle = \hbar^2\omega^2(|\alpha|^2(|\alpha|^2+1)+|\alpha|^2+\frac{1}{4}) = \hbar^2\omega^2(|\alpha|^4+2|\alpha|^2+\frac{1}{4})$$

そうすると、分散 $(\Delta H)^2$ は

$$\begin{aligned}(\Delta H)^2 = \langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2 &= \hbar^2\omega^2(|\alpha|^4+2|\alpha|^2+\frac{1}{4}) - \hbar^2\omega^2(|\alpha|^2+\frac{1}{2})^2\\ &= \hbar^2\omega^2(|\alpha|^4+2|\alpha|^2+\frac{1}{4}-|\alpha|^4-|\alpha|^2-\frac{1}{4})\\ &= \hbar^2\omega^2|\alpha|^2\end{aligned}$$

標準偏差は $\Delta H = \hbar\omega|\alpha|$ となり、コヒーレント状態がハミルトニアン演算子の固有状態になっていないためにエネルギーの値に幅が出来ています。

不確定性関係を求めます。位置演算子の期待値は

$$\langle\hat{X}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha|(\alpha^* + \alpha)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha^* + \alpha)$$

運動量演算子では

$$\langle\hat{P}\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})|\alpha\rangle\langle\hat{X}\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha|(\alpha^* - \alpha)|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha^* - \alpha)$$

$\hat{X}^2$ では

$$\begin{aligned}
\langle\hat{X}^2\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)|\alpha\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + \langle\alpha|\hat{a}\hat{a}|\alpha\rangle + \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle + \langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + \langle\alpha|\hat{a}\hat{a}|\alpha\rangle + \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle + \langle\alpha|(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|\alpha\rangle)
\end{aligned}$$

第 1 項の $\hat{a}^\dagger$ はどちらも左側に作用して $(\alpha^*)^2$、第 2 項の $\hat{a}$ はどちらも右側に作用して α^2 になるので

$$\langle\hat{X}^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}((\alpha^*)^2 + \alpha^2 + |\alpha|^2 + |\alpha|^2 + 1) = \frac{\hbar}{2m\omega}((\alpha + \alpha^*)^2 + 1)$$

$\hat{P}^2$ では

$$\begin{aligned}
\langle\hat{P}^2\rangle &= -\frac{m\hbar\omega}{2}\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger)|\alpha\rangle \\
&= -\frac{m\hbar\omega}{2}(\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + \langle\alpha|\hat{a}\hat{a}|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle - \langle\alpha|(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|\alpha\rangle) \\
&= -\frac{m\hbar\omega}{2}((\alpha^*)^2 + \alpha^2 - 2|\alpha|^2 - 1) \\
&= -\frac{m\hbar\omega}{2}((\alpha - \alpha^*)^2 - 1)
\end{aligned}$$

これらから

$$\begin{aligned}
(\Delta X)^2 &= \langle\hat{X}^2\rangle - \langle\hat{X}\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}((\alpha + \alpha^*)^2 + 1) - \frac{\hbar}{2m\omega}(\alpha^* + \alpha)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \\
(\Delta P)^2 &= \langle\hat{P}^2\rangle - \langle\hat{P}\rangle^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}((\alpha - \alpha^*)^2 - 1) + \frac{\hbar}{2m\omega}(\alpha - \alpha^*)^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}
\end{aligned}$$

よって

$$\Delta X \Delta P = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}\frac{m\hbar\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}$$

となり、コヒーレント状態では不確定性関係の最小値を与えます。これは、元々古典的な解を中心とするガウス分布になるように求めたことから予想できる結果で、コヒーレント状態は古典論に近い状況を与えます。

最後にコヒーレント状態が基底状態の平行移動で与えられることを見ます。位置の平行移動の演算子は運動量演算子によって

$$e^{-i\hat{P}x_0/\hbar}$$

と与えられます。生成、消滅演算子で書くと

$$\exp[-\frac{i}{\hbar}x_0\hat{P}] = \exp[\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}x_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a})]$$

これを参考にして、複素数 z によって

$$D(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} = e^{-|z|^2/2}e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-z^*\hat{a}} \qquad ([\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1)$$

とします。最右辺へはハウスドルフの公式 (6) を使っています。エルミート共役は

$$D^\dagger = (e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}})^\dagger = e^{z^*\hat{a} - z\hat{a}^\dagger} = e^{-|z|^2/2}e^{-z\hat{a}^\dagger}e^{z^*\hat{a}}$$

$DD^\dagger$ は交換関係が

$$\begin{aligned}
[z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}, z^*\hat{a} - z\hat{a}^\dagger] &= [z\hat{a}^\dagger, z^*\hat{a}] - [z\hat{a}^\dagger, z\hat{a}^\dagger] - [z^*\hat{a}, z^*\hat{a}] + [z^*\hat{a}, z\hat{a}^\dagger] \\
&= zz^*[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + zz^*[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるので

$$DD^\dagger = \exp[z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a} + z^*\hat{a} - z\hat{a}^\dagger] = 1$$

$D^\dagger = D^{-1}$ からユニタリー演算子です。位置演算子と運動量演算子で書くと

$$\begin{aligned} D(z) =& \exp[z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}] = \exp[z_r(\hat{a}^\dagger - a) + iz_i(\hat{a}^\dagger + a)] \quad (z = z_r + iz_i) \\ =& \exp[\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{X} - x_0\hat{P})] \quad (x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}z_r \ , \ p_0 = \sqrt{2\hbar m\omega}z_i) \\ =& e^{ip_0\hat{X}/\hbar}e^{-ix_0\hat{P}/\hbar}\exp[-\frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}p_0x_0[\hat{X}, -\hat{P}]] \\ =& e^{-ip_0x_0/2}e^{ip_0\hat{X}/\hbar}e^{-ix_0\hat{P}/\hbar} \end{aligned}$$

$D^{-1} = D^\dagger$ は

$$D^{-1} = \exp[-\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{X} - x_0\hat{P})]$$

これで位置演算子を挟むと

$$\begin{aligned} D\hat{X}D^{-1} =& \exp[\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{X} - x_0\hat{P})]\hat{X}\exp[-\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{X} - x_0\hat{P})] \\ =& \hat{X} + \frac{i}{\hbar}[p_0\hat{X} - x_0\hat{P}, \hat{X}] + \frac{1}{2}(\frac{i}{\hbar})^2[p_0\hat{X} - x_0\hat{P}, [p_0\hat{X} - x_0\hat{P}, \hat{X}]] + \cdots \end{aligned}$$

ハウスドルフの公式

$$e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-\lambda\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]\lambda + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]\lambda^2 + \cdots$$

を使っています。交換関係は

$$[p_0\hat{X} - x_0\hat{P}, \hat{X}] = p_0[\hat{X}, \hat{X}] - x_0[\hat{P}, \hat{X}] = i\hbar x_0$$

なので

$$D\hat{X}D^{-1} = \hat{X} - x_0$$

同様に

$$\begin{aligned} D\hat{P}D^{-1} =& \exp[\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{X} - x_0\hat{P})]\hat{P}\exp[-\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{X} - x_0\hat{P})] \\ =& \hat{P} + \frac{i}{\hbar}[p_0\hat{X} - x_0\hat{P}, \hat{P}] + \frac{1}{2}(\frac{i}{\hbar})^2[p_0\hat{X} - x_0\hat{P}, [p_0\hat{X} - x_0\hat{P}, \hat{P}]] + \cdots \\ =& \hat{P} - p_0 \end{aligned}$$

となるので、D は位相空間における平行移動の演算子です。
　基底状態に作用させると

$$
\begin{aligned}
D(z)|0\rangle &= e^{-|z|^2/2}e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-z^*\hat{a}}|0\rangle = e^{-|z|^2/2}e^{z\hat{a}^\dagger}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z^*\hat{a})^n}{n!}|0\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2}e^{z\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(za^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \\
&= e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sqrt{n!}|n\rangle \\
&= |z\rangle
\end{aligned}
$$

となり、コヒーレント状態になります。このため、コヒーレント状態は位相空間における基底状態の平行移動から作られる状態と言えます。

・補足
　消滅演算子の固有状態として (7) を求めます。消滅演算子を波動関数 $\psi(x,t)$ に作用させると

$$
\hat{a}\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{X}+i\frac{\hat{P}}{m\omega})\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx})\psi(x,t)
$$

$\psi(x,t)$ を固有状態として

$$
\begin{aligned}
\hat{a}\psi(x,t) &= \alpha(t)\psi(x,t) \quad (\alpha(t)=\alpha e^{-i\omega t}) \\
\frac{d\psi}{dx} &= \frac{m\omega}{\hbar}(\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha(t)-x)\psi \\
\frac{d\psi}{\psi} &= \frac{m\omega}{\hbar}(\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha(t)-x)dx \\
\psi(x,t) &= C\exp[\frac{m\omega}{\hbar}(-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha(t)x)]
\end{aligned}
$$

C は任意定数です。これの確率密度は

$$
\begin{aligned}
|\psi(x,t)|^2 &= |C|^2\exp[\frac{m\omega}{\hbar}(-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha(t)x-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha^*(t)x)] \\
&= |C|^2\exp[\frac{m\omega}{\hbar}(-x^2+\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\alpha(t)+\alpha^*(t))x)]
\end{aligned}
$$

exp 内は、$\alpha=|\alpha|e^{i\delta}$ として

$$
\begin{aligned}
-x^2+\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\alpha(t)+\alpha^*(t))x =& -x^2+\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\alpha e^{-i\omega t}+\alpha^* e^{i\omega t})x \\
=& -x^2+\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(|\alpha|e^{i\delta}e^{-i\omega t}+|\alpha|e^{-i\delta}e^{i\omega t})x \\
=& -x^2+\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|\alpha|(\cos(\omega t-\delta)-i\sin(\omega t-\delta)+\cos(\omega t-\delta)+i\sin(\omega t-\delta))x \\
=& -x^2+2\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|\alpha|\cos(\omega t-\delta)x \\
=& -(x-\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|\alpha|\cos(\omega t-\delta))^2+\frac{2\hbar}{m\omega}|\alpha|^2\cos^2(\omega t-\delta)
\end{aligned}
$$

第 1 項の三角関数部分は古典的な調和振動子の解なので

$$
|\psi(x,t)|^2=|C|^2\exp[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-x_c(t))^2]\exp[2|\alpha|^2\cos^2(\omega t-\delta)]
$$

ガウス積分から

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}dx|\psi(x,t)|^2 &= |C|^2e^{2|\alpha|^2\cos^2(\omega t-\delta)}\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-x_c)^2] \\
&= |C|^2e^{2|\alpha|^2\cos^2(\omega t-\delta)}\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2] \\
&= |C|^2e^{2|\alpha|^2\cos^2(\omega t-\delta)}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}
\end{aligned}
$$

なので、1 に規格化すると

$$
|C|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-2|\alpha|^2\cos^2(\omega t-\delta)}
$$

よって

$$
|\psi(x,t)|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-x_c(t))^2]
$$

となり、(7) になります。また、生成演算子の固有状態を考えないのは

$$
\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{X}-i\frac{\hat{P}}{m\omega})=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx})
$$

として、d/dx の符号が消滅演算子のときの反対なので、解が x の増加に対して減少しないからです。