クレブシュ・ゴルダン係数の符号

クレブシュ・ゴルダン係数には符号の取り方に任意性があり、それをどう決めているのかを見ていきます。
途中でクレブシュ・ゴルダン係数の漸化式も求めています。
演算子にハットをつけていません。

ここでの表記をまとめておきます。角運動量演算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ での z 成分 A_z, B_z の固有状態を

$$A_z|j_A, m_A\rangle = \hbar m_A|j_A, m_A\rangle \quad (-j_A \le m_A \le j_A)$$
$$B_z|j_B, m_B\rangle = \hbar m_B|j_B, m_B\rangle \quad (-j_B \le m_B \le j_B)$$

$j_{A,B}$ は 0 以上の整数か半整数です。この 2 つの状態からテンソル積「$\otimes$」によって

$$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = |j_A, m_A\rangle \otimes |j_B, m_B\rangle$$

として、状態を作ります。この状態に対しては、I を恒等演算子として

$$A_z \otimes I \ , \ I \otimes B_z$$

としたものが作用し

$$(A_z \otimes I)|j_A, m_A\rangle \otimes |j_B, m_B\rangle = A_z|j_A, m_A\rangle \otimes |j_B, m_B\rangle = \hbar m_A|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$
$$(B_z \otimes I)|j_A, m_A\rangle \otimes |j_B, m_B\rangle = |j_A, m_A\rangle \otimes B_z|j_B, m_B\rangle = \hbar m_B|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

ただし、テンソル積を書くのも面倒なので

$$A_z|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar m_A|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

と書いてしまいます。
$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ とした角運動量演算子の固有状態を $|(j_A, j_B)j, m\rangle$ と書くことにして

$$J_z|(j_A, j_B)j, m\rangle = \hbar m|(j_A, j_B)j, m\rangle \quad (|j_A - j_B| \le j \le j_A + j_B \ , \ -j \le m \le j)$$

$|(j_A, j_B)j, m\rangle$ は

$$|(j_A, j_B)j, m\rangle = \sum_{m_A=-j_A}^{j_A} \sum_{m_B=-j_B}^{j_B} \langle j_A, m_A; j_B, m_B|(j_A, j_B)j, m\rangle|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

として展開されます (線形結合)。このときの係数をクレブシュ・ゴルダン係数と言い

$$C(j_A, j_B, j : m_A, m_B, m) = \langle j_A, m_A; j_B, m_B | j, m\rangle$$

と表記します。クレブシュ・ゴルダン係数では左側の j_A, j_B から $|(j_A, j_B)j, m\rangle$ の (j_A, j_B) が判断できるので省いて書くことにしています。クレブシュ・ゴルダン係数は $m = m_A + m_B$ のときに 0 でない実数です。実数なので

$$C(j_A, j_B, j : m_A, m_B, m) = \langle j_A, m_A; j_B, m_B | j, m\rangle = \langle j, m | j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

となります。

m を上下させる上昇、下降演算子 $J_\pm = A_\pm + B_\pm$ は

$$J_\pm |(j_A, j_B)j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\,|(j_A, j_B)j, m \pm 1\rangle$$
$$A_\pm |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \sqrt{j_A(j_A+1) - m_A(m_A \pm 1)}\,|j_A, m_A \pm 1; j_B, m_B\rangle$$
$$B_\pm |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \sqrt{j_B(j_B+1) - m_B(m_B \pm 1)}\,|j_A, m_A; j_B, m_B \pm 1\rangle$$

となっています。

$|(j_A, j_B)j, m\rangle,\ |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ は規格化されているとして、完全性と直交性は

$$\sum_{j=|j_A - j_B|}^{j_A + j_A} \sum_{m=-j}^{j} |(j_A, j_B)j, m\rangle\langle (j_A, j_B)j, m| = 1 \tag{1a}$$

$$\langle (j'_A, j'_B)j', m' | (j_A, j_B)j, m\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm} \tag{1b}$$

$$\sum_{m_A=-j_A}^{j_A} \sum_{m_B=-j_B}^{j_B} |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle\langle j_A, m_A; j_B, m_B| = 1 \tag{1c}$$

$$\langle j'_A, m'_A; j'_B, m'_B | j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \delta_{j'_A j_A}\delta_{j'_B j_B}\delta_{m'_A m_A}\delta_{m'_B m_B} \tag{1d}$$

これらから

$$\delta_{j'j}\delta_{m'm} = \langle (j'_A, j'_B)j', m' | (j_A, j_B)j, m\rangle = \sum_{m_A, m_B} \langle (j'_A, j'_B)j', m' | j_A, m_A; j_B, m_B\rangle\langle j_A, m_A; j_B, m_B | (j_A, j_B)j, m\rangle$$

として、クレブシュ・ゴルドン係数の正規直交関係を与えます。これは並びを変えて

$$\delta_{j'j}\delta_{m'm} = \sum_{m_A, m_B} \langle j_A, m_A; j_B, m_B | (j'_A, j'_B)j', m'\rangle\langle j_A, m_A; j_B, m_B | (j_A, j_B)j, m\rangle$$

とも書けます。また、(1d) で $j_A = j'_A,\ j_B = j'_B$ として、$|(j_A, j_B)j, m\rangle$ の完全性を使うと

$$\begin{aligned}
\delta_{m'_A m_A}\delta_{m'_B m_B} &= \langle j_A, m'_A; j_B, m'_B | j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&= \sum_j \sum_m \langle j_A, m'_A; j_B, m'_B | (j_A, j_B)j, m\rangle\langle (j_A, j_B)j, m | j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&= \sum_j \sum_m \langle j_A, m'_A; j_B, m'_B | (j_A, j_B)j, m\rangle\langle j_A, m_A; j_B, m_B | (j_A, j_B)j, m\rangle
\end{aligned}$$

として、j,m の和による直交関係になります。

クレブシュ・ゴルダン係数の符号がどうなっているのか見るために、$j_A=1/2,\ j_B=1/2$ の場合を求めます。このときは

$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})j,m\rangle=\sum_{m_A=-1/2}^{1/2}\sum_{m_B=-1/2}^{1/2}\langle\frac{1}{2},m_A;\frac{1}{2},m_B|j,m\rangle|\frac{1}{2},m_A;\frac{1}{2},m_B\rangle$$

クレブシュ・ゴルダン係数は

$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},j:m_A,m_B,m)=\langle\frac{1}{2},m_A;\frac{1}{2},m_B|j,m\rangle$$

j は $0,1$ なので、$j=0,m=0$ と $j=1,m=\pm1$ となる 3 個の状態を計算します。

j が最大の j_{max} で m が j_{max} での状態を求めて、そこから下降演算子を作用させて最小の m までの状態を求めます。その後に、$|(j_A,j_B)j_{max},j_{max}-1\rangle$ と $|(j_A,j_B)j_{max}-1,j_{max}-1\rangle$ とが直交することを利用して $|(j_A,j_B)j_{max}-1,j_{max}-1\rangle$ を求めて、そこに下降演算子を作用させて最小の m までの状態を求めます。これを繰り返して全ての状態を求めます。

今の j の最大は 1 なので、$m=1$ の $|(\frac{1}{2},\frac{1}{2});1,1\rangle$ から求めます。$m=1$ なので、展開は $m_A=m_B=1/2$ のみが消えずに残り

$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,1\rangle=\sum_{m_A,m_B}\langle\frac{1}{2},m_A;\frac{1}{2},m_B|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})j,m\rangle|\frac{1}{2},m_A;\frac{1}{2},m_B\rangle=\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}|1,1\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \tag{2}$$

ベクトル表記にすれば $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{w}$ という形なので、$|\boldsymbol{v}|^2=1,\ |\boldsymbol{w}|^2=1$ に規格化されているなら

$$|\boldsymbol{v}|^2=c\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=1\ ,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=c|\boldsymbol{w}|^2=c$$

から、$c^2=1$ です。よって

$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1:\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}|1,1\rangle=\pm1$$

この符号が最初に出てくるクレブシュ・ゴルドン係数の任意性です。このときは慣習的に $+1$ を選ぶことになっています。

m が最大のときが求まったので、下降演算子 $J_-=A_-+B_-$ を使って下げていきます。作用させると

$$J_-|(\frac{1}{2},\frac{1}{2});1,1\rangle=\hbar\sqrt{1\times(1+1)-1\times(1-1)}|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,0\rangle=\hbar\sqrt{2}|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,0\rangle$$

(2) の右辺では

$$\begin{aligned}J_-|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle&=A_-|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle+B_-|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\\&=\hbar\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}\big(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle+|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\big)\\&=\hbar\big(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle+|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\big)\end{aligned}$$

よって

$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \tag{3}$$

右辺の第 1 項と第 2 項の係数から

$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1:-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) = \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1:\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0) = \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

と分かります。クレブシュ･ゴルダン係数 $C(j_A,j_B,j:m_A,m_B,m)$ は展開の係数であるので、C での j_A,j_B,m_A,m_B は展開した各項での $\langle j_A,m_A;j_B,m_B|$ が対応し、j,m は展開される $|(j_A,j_B)j,m\rangle$ が対応します。

(3) に J_- を作用させれば

$$J_-|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,-1\rangle$$
$$(A_-+B_-)|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = B_-|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$
$$(A_-+B_-)|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = A_-|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

2 番目は $m_A=-1/2$ は最小なので A_- を作用させれば消え、3 番目は $m_B=-1/2$ は最小なので B_- を作用させれば消えます。これらから

$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,-1\rangle = |\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$
$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1:-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}.-1) = \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|1,-1\rangle = 1$$

となります。

$j=0$ の状態は

$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})0,0\rangle = C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0:-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0:\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \tag{4}$$

1 に規格化されているので、第 1 項と第 2 項の係数は c_1,c_2 と書いてしまって

$$1 = \langle(\frac{1}{2},\frac{1}{2})0,0|(\frac{1}{2},\frac{1}{2});0,0\rangle = c_1^2+c_2^2$$

そして、$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,0\rangle$ に直交するので、直交性から

$$\begin{aligned}0 &= \langle(\frac{1}{2},\frac{1}{2})0.0|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle(\frac{1}{2},\frac{1}{2})0.0|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle(\frac{1}{2},\frac{1}{2})0.0|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ &= \frac{c_1}{\sqrt{2}}+\frac{c_2}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって

$$c_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ c_2 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これが次に出てくる符号の任意性です。このときは

$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0:-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) = \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}|0,0\rangle = c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0:\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0) = \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|0,0\rangle = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

と選ばれます。

まとめると、$j_A = j_B = 1/2$ のときは

$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,1\rangle = |\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$
$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$
$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})1,-1\rangle = |\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$
$$|(\frac{1}{2},\frac{1}{2})0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

クレブシュ・ゴルダン係数は

$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1:\frac{1}{2},\frac{1}{2},1) = 1$$
$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1:-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1:\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1:-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}.-1) = 1$$
$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0:\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$C(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0:-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となります。

このように、j, m が最大のときと、直交するとして状態を求めるときに符号の任意性が現れます。これらの符号をどう取るかに決まりがあります。それが何か見る前に、もう 1 つ具体的に見ておきます。

今度は $j_A = 1, j_B = 1/2$ とします。このときの取れる状態は表 1 にまとめています。$j = m = 3/2$ では

$$\begin{aligned}|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle &= \sum_{m_A=-1}^{1}\sum_{m_B=-1/2}^{1/2} C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:m_A,m_B,\frac{3}{2})|1,m_A;\frac{1}{2},m_B\rangle \\ &= C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:1,\frac{1}{2},\frac{3}{2})|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\end{aligned}$$

$j \backslash m$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\vert\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$	$\vert\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$	$\vert\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle$	$\vert\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle$
$\frac{1}{2}$		$\vert\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$	$\vert\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$	

表 1: $j_A=1, j_B=1/2$ の可能な状態 $|(j_A,j_B)j,m\rangle = |j,m\rangle$

これも符号は $+1$ に取ることにして

$$|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = |1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = \langle 1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = 1$$

J_- を作用させれば

$$J_-|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)-\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

$$A_-|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + B_-|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \hbar|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

となるので、$j=3/2, m=1/2$ では

$$|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \tag{5}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \langle 1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \langle 1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

これに J_- を作用させて

$$J_-|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

$$A_-|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + B_-|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \hbar|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

$$A_-|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

3 番目は m_B が最小値 $-1/2$ なので、B_- が作用したら消えます。これから、$j=3/2, m=-1/2$ では

$$2|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\big(\sqrt{2}|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + |1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\big) + \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{2}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

$$|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

なので

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\langle 1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\langle 1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

J_- を作用させて

$$J_-|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\hbar\sqrt{3}|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle$$
$$B_-|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=\hbar|1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$
$$A_-|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\hbar\sqrt{2}|1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

2 番目は m_A の最小値 -1 なので、A_- の作用で消えます。これらから、$j=3/2,m=-3/2$ では

$$\sqrt{3}|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}|1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$
$$|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle=|1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

なので

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:-1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})=\langle 1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle=1$$

これは m の最小値 $-j$ の場合なので、$m=j$ と同じようになっています。
$|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ に直交する $|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ の展開は

$$|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=c_1|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle+c_2|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\qquad(c_1^2+c_2^2=1)$$

そうすると、(5) から

$$\langle(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},\frac{1}{2}|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}c_1+\sqrt{\frac{2}{3}}c_2=0$$

となるので

$$|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$
$$C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=c_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})=c_2=-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

この符号の取り方も決まりに従ってます。これに J_- を作用させて $m=-1/2$ にすれば

$$
\begin{aligned}
&J_-|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\
&A_-|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\
&A_-|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + B_-|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \hbar|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

これらから

$$
\begin{aligned}
|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\Big(\sqrt{2}|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + |1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\Big) \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) &= c_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \\
C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) &= c_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

まとめると

$$
\begin{aligned}
&|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = |1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\
&|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\
&|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\
&|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle = |1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\
&|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\
&|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

クレブシュ・ゴルダン係数は

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:1,\frac{1}{2},\frac{3}{2})=1$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:-1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})=1$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

と求まります。

どういう決まりで符号を決めているのかをはっきりさせます。決め方は単純で、$m=j$ での $|(j_A,j_B)j,m\rangle$ は

$$|(j_A,j_B)j,j\rangle=\sum_{m_A}\sum_{m_B}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|j,j\rangle|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle\quad(m_A+m_B=j)$$

となっていて、このとき m_A が最大値 j_A ならクレブシュ・ゴルダン係数は正になるように符号を選ぶとしています。$j_A=1,j_B=1/2$ で見ると

$$|(1,\frac{1}{2})j,j\rangle=\sum_{m_A}\sum_{m_B}\langle 1,m_A;\frac{1}{2},m_B|j,j\rangle|1,m_A;\frac{1}{2},m_B\rangle\quad(m_A+m_B=j)$$

符号を選んでいるのは $j=m=3/2$ と $j=m=1/2$ のときで、$j=3/2$ では

$$|(1,\frac{1}{2})\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle=\langle 1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{2}{3}\rangle|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\ \Rightarrow\ \langle 1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{2}{3}\rangle=+1$$

なので、$m_A=1$ のとき正に選んでいます。$j=1/2$ では

$$|(1,\frac{1}{2})\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=\langle 1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle+\langle 1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

$$\Rightarrow\ \langle 1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=+\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ \langle 1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

なので、$m_A = 1$ のとき正に選んでいます。表 1 で言えば、一番左上から斜めに右下へと進んでいる部分が対応します。この対応が具体的に求めたときの手順になります。

手順を言っておきます。まず、最大の j_{max} での $m = j_{max}$ の状態求め (表 1 での 1 番左上)、そのときの m_A が最大になるクレブシュ・ゴルダン係数を正になるように符号を決めます。そこから、J_- によって m を下げていった状態を求めます (表 1 の 1 番上の行)。次に、$j_{max} - 1, m = j_{max} - 1$ の状態は $j_{max}, m = j_{max} - 1$ の状態と直交することを使って求めます (表 1 での左上から 1 つ右下にいった状態)。このとき、直交の式から符号の任意性が現れるので、ここも m_A が最大でのクレブシュ・ゴルダン係数が正になるように符号を決めます。それに J_- を作用させて m を下げた状態を求めていきます。これを最後まで繰り返します。

このようにして符号を決めることを phase convention と言います。式にすれば

$$\langle j_A, j_A; j_B, j - j_A | (j_A, j_B); j, j\rangle \geq 0$$

とするということです。これに従うため、$|(1, \frac{1}{2})\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ は $|(1, \frac{1}{2})\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ と直交するとして求めるほうが簡単ですが、そうせずに $|(1, \frac{1}{2})\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ に J_- を作用させて求めました。

符号を m_A が最大のとき正になると決めているために、クレブシュ・ゴルダン係数の j_A, j_B の並びを変えると符号が変わります。実際に、$j_A = 1/2,\ j_B = 1$ としてみます。$j = m = 3/2$ では

$$|(\frac{1}{2}, 1)\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sum_{m_A=-1}^{1}\sum_{m_B=-1/2}^{1/2} C(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} : m_A, m_B, \frac{3}{2})|\frac{1}{2}, m_A; 1, m_B\rangle = C(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} : \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1\rangle$$

このときは正にとるので

$$C(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} : \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) = 1$$

J_- を作用させて

$$J_-|(\frac{1}{2}, 1)\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|(\frac{1}{2}, 1)\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$
$$A_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1\rangle + B_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1\rangle = \hbar|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\rangle + \hbar\sqrt{2}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\rangle$$
$$\Rightarrow\ |(\frac{1}{2}, 1)\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\rangle$$

これに直交する状態は

$$|(\frac{1}{2}, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = C(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\rangle + C(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\rangle$$

なので

$$C^2(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) + C^2(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = 1$$
$$\sqrt{\frac{1}{3}}C(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{2}{3}}C(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = 0$$

m_A が最大の 1/2 になっている第 2 項のクレブシュ・ゴルダン係数が正として符号を決めると

$$C(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}:-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})=-\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ C(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}:\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$j_A=1,j_B=1/2$ での結果を比べると

$$\begin{aligned}C(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}:1,\frac{1}{2},\frac{3}{2})=1\ &\Leftrightarrow\ C(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}:\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})=1\\ C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{2}{3}}\ &\Leftrightarrow\ C(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}:-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})=-\sqrt{\frac{2}{3}}\\ C(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}:0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\sqrt{\frac{1}{3}}\ &\Leftrightarrow\ C(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}:\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{3}}\end{aligned}\tag{6}$$

というわけで、クレブシュ・ゴルダン係数での j_A,j_B の並びを逆にしたとき、符号が変わる場合と変わらない場合が現れます。

どういうときに符号が変わるのかを示します。そのために、クレブシュ・ゴルダン係数の漸化式を求めます。

クレブシュ・ゴルダン係数の間に $J_\pm$ を入れると

$$\langle j_A,m_A;j_B,m_B|J_\pm|j,m\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|j,m\pm1\rangle\tag{7}$$

$\langle j_A,m_A;j_B,m_B|$ に作用していると見ると、$A_\pm,B_\pm$ はエルミート演算子ではなく、$A_\pm^\dagger=(A_x+iA_y)^\dagger=A_x-iA_y=A_\mp$ なので

$$\langle j_A,m_A|A_\pm=(A_\pm^\dagger|j_A,m_A\rangle)^\dagger=(A_\mp|j_A,m_A\rangle)^\dagger=\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\mp1)}\langle j_A,m_A\mp1|$$

これを使えば

$$\begin{aligned}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|J_\pm&=\langle j_A,m_A;j_B,m_B|(A_\pm+B_\pm)\\&=\hbar\sqrt{j_A(j_A+1)-m_A(m_A\mp1)}\langle j_A,m_A\mp1;j_B,m_B|\\&\quad+\hbar\sqrt{j_B(j_B+1)-m_B(m_B\mp1)}\langle j_A,m_A;j_B,m_B\mp1|\end{aligned}$$

これから、(7) は

$$\begin{aligned}&\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|j,m\pm1\rangle\\&=\ \hbar\sqrt{j_A(j_A+1)-m_A(m_A\mp1)}\langle j_A,m_A\mp1;j_B,m_B|j,m\rangle\\&\quad+\hbar\sqrt{j_B(j_B+1)-m_B(m_B\mp1)}\langle j_A,m_A;j_B,m_B\mp1|j,m\rangle\end{aligned}\tag{8}$$

として、クレブシュ・ゴルドン係数の漸化式になります。これは m をずらして

$$
\begin{aligned}
&\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\mp 1)}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|j,m\rangle \\
&\quad= \hbar\sqrt{j_A(j_A+1)-m_A(m_A\mp 1)}\langle j_A,m_A\mp 1;j_B,m_B|j,m\mp 1\rangle \\
&\qquad+\hbar\sqrt{j_B(j_B+1)-m_B(m_B\mp 1)}\langle j_A,m_A;j_B,m_B\mp 1|j,m\mp 1\rangle
\end{aligned}
$$

としていることもあります。漸化式と直交性からもクレブシュ・ゴルダン係数の具体的な値を求められます。

符号の話に戻ります。(8) で $m=j$ とし、左辺の $\pm$ を $+$ にして

$$
\begin{aligned}
&\hbar\sqrt{j(j+1)-j(j+1)}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|j,j+1\rangle \\
&\quad= \hbar\sqrt{j_A(j_A+1)-m_A(m_A-1)}\langle j_A,m_A-1;j_B,m_B|j,j\rangle \\
&\qquad+\hbar\sqrt{j_B(j_B+1)-m_B(m_B-1)}\langle j_A,m_A;j_B,m_B-1|j,j\rangle
\end{aligned}
\tag{9}
$$

左辺は消えて

$$
\langle j_A,m_A-1;j_B,m_B|j,j\rangle=-\frac{\sqrt{j_B(j_B+1)-m_B(m_B-1)}}{\sqrt{j_A(j_A+1)-m_A(m_A-1)}}\langle j_A,m_A;j_B,m_B-1|j,j\rangle
$$

m_B を 1 ずらして m_B+1 として

$$
\langle j_A,m_A-1;j_B,m_B+1|j,j\rangle=-\frac{\sqrt{j_B(j_B+1)-m_B(m_B+1)}}{\sqrt{j_A(j_A+1)-m_A(m_A-1)}}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|j,j\rangle
$$

これを繰り返します。規則性を見やすくするためにルート部分を

$$
\begin{aligned}
j(j+1)-m(m+1)&=(j+m+1)(j-m)\\
j(j+1)-m(m-1)&=(j-m+1)(j+m)
\end{aligned}
$$

と書き換えて

$$
\langle j_A,m_A-1;j_B,m_B+1|j,j\rangle=-\frac{\sqrt{(j_B+m_B+1)(j_B-m_B)}}{\sqrt{(j_A-m_A+1)(j_A+m_A)}}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|j,j\rangle \tag{10}
$$

とします。

(9) で m_A-1 として (10) を入れると

$$
\begin{aligned}
\langle j_A,m_A-2;j_B,m_B+1|j,j\rangle &= \frac{\sqrt{(j_B+m_B+1)(j_B-m_B)}}{\sqrt{(j_A-m_A+2)(j_A+m_A-1)}}\langle j_A,m_A-1;j_B,m_B|j,j\rangle \\
\langle j_A,m_A-2;j_B,m_B+2|j,j\rangle &= -\frac{\sqrt{(j_B+m_B+2)(j_B-m_B-1)}}{\sqrt{(j_A-m_A+2)(j_A+m_A-1)}}\langle j_A,m_A-1;j_B,m_B+1|j,j\rangle \\
&=(-1)^2\frac{\sqrt{(j_B+m_B+2)(j_B-m_B-1)}}{\sqrt{(j_A-m_A+2)(j_A+m_A-1)}}\frac{\sqrt{(j_B+m_B+1)(j_B-m_B)}}{\sqrt{(j_A-m_A+1)(j_A+m_A)}}\langle j_A,m_A;j_B,m_B|j,j\rangle
\end{aligned}
$$

分子は

$$(j_B+m_B+2)(j_B-m_B-1)(j_B+m_B+1)(j_B-m_B)=(j_B+m_B+2)(j_B+m_B+1)(j_B-m_B)(j_B-m_B-1)$$

これだけから規則性を拾ってしまうと、左辺の状態が m_A-k, m_B+k になるまで繰り返したとき

$$\frac{(j_B+m_B+k)!}{(j_B+m_B)!}\frac{(j_B-m_B)!}{(j_B-m_B-k)!}$$

となります。分母も同様に

$$\frac{(j_A-m_A+k)!}{(j_A-m_A)!}\frac{(j_A+m_A)!}{(j_A+m_A-k)!}$$

となっているので

$$\begin{aligned}&\langle j_A, m_A-k; j_B, m_B+k|j,j\rangle\\ &\qquad=(-1)^k\sqrt{\frac{(j_B+m_B+k)!(j_B-m_B)!}{(j_B+m_B)!(j_B-m_B-k)!}\frac{(j_A+m_A-k)!(j_A-m_A)!}{(j_A-m_A+k)!(j_A+m_A)!}}\langle j_A, m_A; j_B, m_B|j,j\rangle\end{aligned}$$

$m_A=j_A,\ m_B=j-j_A$ とし、k を $k=j_A-k'$ と置き換えることにすると

$$\begin{aligned}&\langle j_A, k'; j_B, j-k'|j,j\rangle\\ &\qquad=(-1)^{j_A-k'}\sqrt{\frac{(j+j_B-k')!(j_A+j_B-j)!}{(j+j_B-j_A)!(j_B-j+k')!}\frac{(j_A+k')!}{(j_A-k')!(2j_A)!}}\langle j_A, j_A; j_B, j-j_A|j,j\rangle\end{aligned} \tag{11}$$

このため

$$\langle j_A, j_A; j_B, j-j_A|j,j\rangle$$

が分かれば、$j, m=j$ に関するクレブシュ・ゴルダン係数が求まります。ただし、符号は

$$\langle j_A, j_A; j_B, j-j_A|(j_A, j_B); j,j\rangle\geq 0$$

となるように決めているので、(11) から、クレブシュ・ゴルダン係数には

$$(-1)^{j_A-k'}\langle j_A, k'; j_B, j-k'|j,j\rangle\geq 0$$

という制限がつきます。$k'=m_A$ とすれば、今は $j=m=m_A+m_B$ から

$$(-1)^{j_A-m_A}\langle j_A, m_A; j_B, m_B|(j_A, j_B)j,j\rangle\geq 0 \tag{12}$$

m_A は $-j_A+1, -j_A+2, \ldots, j_A$ なので、$j_A - m_A$ は半整数にならないです。A, B の並びをはっきりさせるために (j_A, j_B) を省略せずに書いています。A, B の並びを逆にすると

$$(-1)^{j_B - m_B}\langle j_B, m_B; j_A, m_A|(j_B, j_A)j, j\rangle \geq 0 \tag{13}$$

2 つの角運動量演算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を合わせて作った状態としてだけで $|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ と $|(j_A, j_B); j, j\rangle$ を与えているので、並びを変えても確率振幅に影響が出るような差はなく、絶対値で消える位相因子の差だけがあるはずです。そして、クレブシュ・ゴルダン係数は実数で、(12) と (13) はどちらも正です。正に固定されているために (12) と (13) には位相因子の違いはなくなっているので、これらは等しいとできて

$$\langle j_A, m_A; j_B, m_B|(j_A, j_B)j, j\rangle = (-1)^{j_A + j_B - m_A - m_B}\langle j_B, m_B; j_A, m_A|(j_B, j_A)j, j\rangle$$

$(-1)^{-(j_A - m_A)} = (-1)^{j_A - m_A}$ を使っています。なので

$$|(j_A, j_B)j, j\rangle = (-1)^{j_A + j_B - j}|(j_B, j_A)j, j\rangle \quad (j = m_A + m_B)$$

$m = j$ の状態に下降演算子を作用させることで状態が求まっていき、$(-1)^{j_A + j_B - j}$ は演算子の作用に影響しないことから

$$|(j_A, j_B)j, m\rangle = (-1)^{j_A + j_B - j}|(j_B, j_A)j, m\rangle$$

よって、クレブシュ・ゴルダン係数においても

$$\langle j_A, m_A; j_B, m_B|(j_A, j_B)j, m\rangle = (-1)^{j_A + j_B - j}\langle j_B, m_B; j_A, m_A|(j_B, j_A)j, m\rangle$$

となり、入れ替えに対する符号の関係になります。

$j_A = 1, j_B = 1/2$ とすると

$$\langle 1, m_A; \frac{1}{2}, m_B|(1, \frac{1}{2})j, m\rangle = (-1)^{3/2 - j}\langle \frac{1}{2}, m_B; 1, m_A|(\frac{1}{2}, 1)j, m\rangle$$

$j = 1/2,\ m = 1/2$ では

$$\langle 1, m_A; \frac{1}{2}, m_B|(1, \frac{1}{2})\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = -\langle \frac{1}{2}, m_B; 1, m_A|(\frac{1}{2}, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$
$$C(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} : m_A, m_B, \frac{1}{2}) = -C(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : m_B, m_A, \frac{1}{2})$$

なので

$$C(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -C(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$
$$C(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} : 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -C(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} : \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

となり、(6) と同じになります。