

ベルの不等式

EPR 問題に触れてからベルの不等式を出します。ベルの不等式を出すだけならすぐ終わるので、ベルの不等式だけが知りたい人はそこに飛んでください。細かいことには触れずに概観を見ていきます。

ベルの不等式が導出された頃までの話なので、最近のことが知りたい人は「Research on Hidden Variable Theories: a review of recent progresses」(quant-ph/0701071) や「Quantum entanglement」(quant-ph/0702225) なんかを見てください。

話の始まりは 1935 年におけるアインシュタイン (Einstein)、ポドルスキー (Podolsky)、ローゼン (Rosen) による主張 (アインシュタインの量子力学の解釈への反論) で、この論文は EPR 論文と呼ばれます。この主張は簡単に言ってしまうと、波動関数による量子力学は不完全であるということです (量子力学そのものは否定していません)。まずは、これを見ていきます。

EPR 論文の主張の前提としているのは

- (i) 実在性 (reality)
- (ii) 局所性 (locality)

というもの。 (i) は、物理量の値を確実に予言 (決定) できる時 (観測対象の状態を変化させることなしに)、その物理量に対応する物理的実在性の要素 (element of physical reality) が存在するとします。 (ii) は、2 つの系があったとき、片方の系の観測は遠く離れたもう片方の系に影響を与えないということです。 (i) での物理的実在性の要素が理論に含まれているなら、その理論は完全 (completeness) だとされます。

EPR 論文には明確には書かれていませんが、観測に対しての前提があります。それは、観測方法は観測者が自由に選べるということです。これがないと後で見るような、位置と運動量を自由に観測することが観測側の問題として出来なくなります。これは観測をどう考えるかという主観的な問題が絡んでくるので、観測方法は自由に選べるという前提は成立しているとして無視します。

量子力学では、演算子 A とその固有状態 $|A\rangle$ による

$$A|A\rangle = a|A\rangle$$

は実在の例となっています (演算子 A に対応する物理量 a が状態を変えずに確定する)。もっと具体的には、波動関数 $\psi = e^{ipx/\hbar}$ に対して、運動量演算子を作用させた

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{ipx/\hbar} = p e^{ipx/\hbar}$$

これも実在の例となります。

しかし、ある 2 つの物理量に対応する演算子 A, B が交換しないとき ($AB \neq BA$)、片方の物理量を確定することはもう片方の物理量を曖昧にします。このため、量子力学は (i), (ii) の要求のもとで

- 波動関数による記述は完全ではない
- 交換しない 2 つの演算子に対応する 2 つの物理量は同時に実在とならない

のどちらかではないかとアインシュタインらは考えました。

これによってどうなるのか見てみます。そのために、波動関数による記述は完全 (波動関数による実在で記述される量子力学は完全) だと仮定します。

まず、2 つの粒子を用意して、それぞれの系を 1, 2 とします。これらを合わせたときの波動関数を $\psi(x_1, x_2)$ とします。 x_1, x_2 はそれぞれの粒子の位置です。この 2 粒子は、ある時間 t から時間 t' まで相互作用し、 t' 以降は相互作用していないとします。今は t' 以降の相互作用していない状態を考えます。

相互作用していないので、系 1 の直交する固有関数 $u_i(x_1)$ によって

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_i C_i(x_2) u_i(x_1)$$

と展開できます。 $u_i(x_1)$ は演算子 O の固有関数だとします。これは別の固有関数 $v_i(x_1)$ でも

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_i C'_i(x_2) v_i(x_1)$$

と書けて、 $v_i(x_1)$ は O' の固有関数だとします。ここで大事なことは、2つの粒子は相互作用してなく、系1の演算子の作用、つまり系1に観測を行っても系2には影響を与えないとする点です。

これらに演算子を作用させると、射影仮説 (波束の収縮) から、演算子を作用させて適当な $u_i(x_1), v_j(x_1)$ の固有値 a_k, b_l ($i = k, j = l$) を取り出したとき

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_i C_i(x_2) u_i(x_1) \Rightarrow C_k(x_2) u_k(x_1)$$

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_j C'_j(x_2) v_j(x_1) \Rightarrow C'_l(x_2) v_l(x_1)$$

となります。このときの、系2での $C_k(x_2), C'_l(x_2)$ は系1での観測の影響を受けないとしているので、 $C_k(x_2), C'_l(x_2)$ は実在を含んでいると考えられます。なので、そのような実在を含んでいるなら波動関数による記述は完全とできます。

これらを踏まえて2つの異なる演算子を作用させるとどうなるのか見ます。そのために具体的な波動関数を作ります。演算子 O, O' は運動量演算子 P と位置演算子 X とし、 $P_{1,2}, X_{1,2}$ をそれぞれ系1, 2の運動量演算子と位置演算子とします。波動関数をデルタ関数 $\delta(x_1 - x_2 + x_0)$ とします。これはデルタ関数の定義から

$$\psi(x_1, x_2) = 2\pi\hbar\delta(x_1 - x_2 + x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(x_1 - x_2 + x_0)\right]$$

x_0 は定数で、 p は運動量です。これは2つの系の位置を表す x_1, x_2 が分離した形で書けないので、エンタングル状態です。このため、EPR論文はエンタングル状態を最初に示したのものにもなっています。

\exp の x_1 を分ければ

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(-x_2 + x_0)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}px_1\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(-x_2 + x_0)\right] u_p(x_1)$$

と書けて、明らかに $u_p(x_1)$ は運動量演算子の固有関数で

$$P_1 u_p(x_1) = p u_p(x_1) \quad (P_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1})$$

このように p を固有値に持ちます。そして、残っている部分も

$$P_2 \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(-x_2 + x_0)\right] = -p \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(-x_2 + x_0)\right] \quad (P_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2})$$

となるので、運動量演算子 P_2 の固有関数で固有値は $-p$ です。これで、系1の粒子の運動量と系2の粒子の運動量が求められました。これは系1の運動量を p と観測すれば、系2の運動量はその符号を反転した $-p$ に決まると言えます (系1の観測は系2に影響しないために、系2の運動量は実在)。簡単に言えば、全体の運動量は0なので、片方が $+p$ になればもう片方は $-p$ になるということです。

次にもう1つの演算子である位置演算子を同じ波動関数に作用させます。そのために、デルタ関数を使って

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(x_1 - x_2 + x_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(x - x_2 + x_0)\right] \delta(x_1 - x)$$

と変形させます。これから、

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$$

とできます。 $\delta(x_1 - x)$ は位置演算子 X_1 の固有関数で固有値は x です。これは

$$X_1 \phi_x(x_1) = x \phi_x(x_1)$$

となるためには

$$X_1 \delta(x_1 - x) = x \delta(x_1 - x) \quad (\psi(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) \delta(x_1 - x))$$

となっていればいからです。そうすると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(x - x_2 + x_0)\right] \delta(x_1 - x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x_1 - x) \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(x - x_2 + x_0)\right] \\ &= 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x_1 - x) \delta(x - x_2 + x_0) \\ &= 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_2 + x_0) v_x(x_1) \end{aligned}$$

となり、残っている部分もデルタ関数です。これは位置演算子 X_2 の固有関数となり、固有値は $x + x_0$ です。よって、位置演算子による系 1, 2 の固有値が求まりました。これも、系 1 の位置を観測すれば、系 2 の位置が決まると言えます (系 1 の観測は系 2 に影響を与えないので、系 2 の位置は実在)。このときは 2 つの粒子の位置の差は x_0 なので、片方が x ならもう片方は $x + x_0$ になるということです。

というわけで、同じ波動関数に対して、系 1 に運動量演算子もしくは位置演算子を作用させた後、系 2 の運動量演算子もしくは位置演算子の固有値が決まっています。つまり、系 2 に影響を与えない (系 2 の状態を変えない) 系 1 の観測によって、系 2 の運動量と位置が決定できると言えます (確実に値を予言できる)。よって、今の場合で系 2 の運動量と位置は実在となり、運動量と位置に対応する物理的実在性の要素が存在することになります。しかし、運動量演算子と位置演算子は

$$PX - XP = -i\hbar$$

となっているために、交換しません。なので、確定する (実在する) はずはないです。これが EPR 問題と呼ばれるものです。

ここまでの話で言えることは、波動関数による記述が完全なら、交換しない演算子の物理量は同時に実在するということです。このため、波動関数による記述が完全でないなら、交換しない演算子の物理量は同時に実在しないと言う事が出来 (これの逆も言える)。よって、量子力学の演算子に対する要求が正しいなら、量子力学は完全ではなくなります。

EPR 論文での例で使われた波動関数はかなり特殊で、よく分からないものです。これに対して、1957 年にボーム (Bohm) とアハラノフ (Aharonov) はスピンの状態を使って、EPR 問題の例を示しました。こちらのほうが分かりやすいのでよく出てきます。ボームとアハラノフは、スピン $1/2$ を持つ粒子を 2 つ用意し (それぞれの系を A, B とします)、この系 A, B による合成系を考えました。このとき、合成系のスピン演算子を S とし、 S_3 が S^2 と同時固有状態を持つとします。そして、合成系の状態として、1 重項である

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+3\rangle_A|-3\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|-3\rangle_A|+3\rangle_B$$

を使います (「スピン $1/2$ 」参照)。 $|0, 0\rangle$ はこの合成系でのスピンが 0 で、合成系での S^2, S_3 の固有値が 0 であることを表しています。 $|\pm\rangle_A|\mp\rangle_B$ の左側が系 A 、右側が系 B の状態で、テンソル積を省いて書いています。 $|\pm 3\rangle_{A,B}$

は系 A, B のスピン演算子 A_3, B_3 の固有状態で、固有値が $\pm 1/2$ です。ここから、 S_a ($a = 1, 2, 3$) は系 A もしくは系 B でのスピン演算子を指します。

まず、この 1 重項に対して、系 A に S_3 の観測を行い固有値 $+1/2$ を取り出したとすれば、射影仮説から系 B の固有値は $-1/2$ となります。

次に、1 重項は回転しても変わらないことを使います。スピンの状態の回転は

$$|\pm; e\rangle = R_n(\theta)|\pm_3\rangle = \exp[-\frac{i}{2}\theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}]|\pm_3\rangle = (\cos \frac{\theta}{2} - i(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2})|\pm_3\rangle$$

で与えられます。 σ はパウリ行列、 \mathbf{n} は任意の回転軸の単位ベクトル、 e は回転後にスピンの向いている方向の単位ベクトルです。これによって、回転した後も 1 重項は

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+; e\rangle_A |-; e\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|-; e\rangle_A |+; e\rangle_B$$

と書けます (回転不変性)。

回転させることでスピンの方向を第三成分方向 $|\pm_3\rangle$ から第一成分方向にした $|\pm_1\rangle$ によって、 $|0, 0\rangle$ を

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+_1\rangle_A |-_1\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|-_1\rangle_A |+_1\rangle_B$$

とします。これに対して、系 A に S_1 の観測を行うことで $+1/2$ の固有値を取り出したとすれば、系 B のスピンは $-1/2$ に決まります。

この状況は、EPR 論文での話と類似していることが分かります。系 A と系 B はある時間まで相互作用していて、観測する段階では相互作用していないとし、系 A の観測は系 B に影響を与えないとします (局所性)。

第三成分方向のスピンとして、系 A の観測において S_3 によって固有値が $+1/2$ になれば、系 B は S_3 に対して固有値は $-1/2$ と決まります。そして、第一成分方向のスピンに取り直して S_1 の観測を行えば、系 A の観測において S_1 によって固有値が $+1/2$ となれば、系 B の S_1 に対して固有値は $-1/2$ と決まります。

というわけで、系 B の S_1, S_3 に対応するスピンは実在です。しかし、スピン演算子 S_1, S_3 は

$$[S_1, S_3] = i\epsilon_{132}S_2 = -iS_2 \neq 0$$

なので交換しません。よって、今の話でも EPR 論文と同じ結論となります。このように、スピン $1/2$ の場合の方が分かりやすい状況になっています。そして、スピンは実験で検証できる対象です。

このようにして、EPR 問題は局所性と実在性による問題を起こしました。EPR 問題は哲学の領域の問題として流されそうなものですが、1964 年にベル (Bell) によって局所性と実在性は検証可能な問題へと変わりました。それを見ていきます。

まず、波動関数の確率解釈に対してアインシュタインが主張したように、何かのパラメータを使うことで物理量を予言 (決定) できるとします。そのパラメータを λ とし、これによって物理量が決定されているとします (λ の正体は不明でもいい)。なので、 λ によって実在性を与えます。そして、 λ は何かしらの確率分布を作っているとし、その確率分布は $\rho(\lambda)$ とし

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1 \quad (\rho(\lambda) \geq 0)$$

と規格化されているとします (積分範囲は λ の取れる範囲)。確率分布 $\rho(\lambda)$ を作るのは、観測結果のばらつきを $\rho(\lambda)$ によって表現するためです (実験結果はばらついているから)。言い換えれば、 λ ごとに観測量は決まってい、観測結果としてはその λ ごとの値が得られるとするためです。このパラメータ λ を隠れた変数 (hidden variable) と呼びます。

このとき、物理量 $O(\lambda)$ の期待値は

$$\bar{O} = \int d\lambda \rho(\lambda) O(\lambda)$$

と定義します。わざわざ隠れた変数を導入したのは、隠れた変数によって量子力学を再現できるとするためなので、これは量子力学での期待値 $\langle \psi | O | \psi \rangle$ と一致するとします。

ちなみに、ベルの前にノイマン (Neumann) による隠れた変数に対する定理が存在していました (1932 年)。これは長い間信用されていたようです (ベルによって否定された。ベル以前から否定する話はあったがほとんど無視されていた)。

スピン $1/2$ 粒子による系 A と系 B を用意し、この合成系による 1 重項に対して、今の設定を適用します。 1 重項なので、状況はボームとアハラノフによる場合と同じです。系 A, B のスピンを観測すれば $\pm 1/2$ が得られるので、スピンの実験結果に対応する系 A, B の λ を含む関数を

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$$

と表すことにします。 \mathbf{a}, \mathbf{b} はそれぞれの系でのスピンを観測する方向を表す単位ベクトルです。 $\pm 1/2$ にすると、これによる係数が出てしまって煩わしいので ± 1 にします (スピンの符号を取り出している)。

局所性を要求し、それぞれの系は片方の単位ベクトルを含むようにはしません (系 A では \mathbf{a} のみ、系 B では \mathbf{b} のみとすれば、片方の系の方向とは無関係になる)。このときの期待値を

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{A(\mathbf{a})B(\mathbf{b})} = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \quad (1)$$

とします。これは量子力学でのスピンの期待値と一致すべきものです。

ここで量子力学の結果に対応させるために 1 つ仮定を入れます。 1 重項におけるスピンの期待値 (系 A, B による合成系での 1 重項におけるスピンの期待値) は、パウリ行列 σ を使えば

$$\langle \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(B)} \rangle = \langle 0, 0 | \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(B)} | 0, 0 \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2)$$

となっています (「スピン $1/2$ 」参照)。 $\boldsymbol{\sigma}^{(A, B)}$ は系 A, B での固有値 ± 1 のスピン演算子 ($S = \sigma/2$) です。これが同じ方向を向いている $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{e}$ のとき

$$\langle \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(B)} \rangle = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = -1$$

となることを再現させます。

そのために仮定として、同じ単位ベクトルであるとき

$$A(\mathbf{e}, \lambda) = -B(\mathbf{e}, \lambda)$$

とします。この仮定によって (1) は

$$\begin{aligned} P(\mathbf{e}, \mathbf{e}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{e}, \lambda) B(\mathbf{e}, \lambda) \\ &= - \int d\lambda \rho(\lambda) A^2(\mathbf{e}, \lambda) \\ &= - \int d\lambda \rho(\lambda) \quad (A^2(\mathbf{e}, \lambda) = 1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

となり、一致します。というわけで、期待値を仮定から

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)$$

と書き換えます。

ここから式変形を行います。まず、もう1つ単位ベクトル \mathbf{b}' を用意して

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = - \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}) + \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}')$$

λ は省いて書いています。このとき

$$A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}') = A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}') \quad (A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}') = 1)$$

であることを使えば

$$-A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}) + A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}') = A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}') (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}'))$$

なので

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}') (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}'))$$

右辺の絶対値を取ると

$$\left| \int dx f(x) \right| \leq \int dx |f(x)|$$

から

$$\left| \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}') (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}')) \right| \leq \int d\lambda |\rho A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}') (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}'))|$$

$A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b})$ の絶対値は1を超えることはないので

$$\left| \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}') (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}')) \right| \leq \int d\lambda |\rho (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}'))|$$

定義から、 ρ は正で、 $\rho(\lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{b}', \lambda)$ は ρ より大きくならないので

$$\int d\lambda |\rho (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}'))| = \int d\lambda \rho (1 - A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}'))$$

よって

$$\begin{aligned} \left| \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}) A(\mathbf{b}') (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}')) \right| &\leq \int d\lambda |\rho (-1 + A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}'))| \\ &= \int d\lambda \rho (1 - A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}')) \\ &= \int d\lambda \rho - \int d\lambda \rho A(\mathbf{b}) A(\mathbf{b}') \\ &= 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \end{aligned}$$

となることから

$$|P(a, b) - P(a, b')| \leq 1 + P(b, b')$$

これをベルの不等式と呼びます。ベルの不等式の導出には量子力学の基本的な要請が使われていないことに注意してください(ただし、量子力学の結果に対応させるための仮定を入れている)。また、このような期待値に関する不等式全般をベルの不等式と呼んでいます。

これに量子力学の結果を入れてみます。隠れた変数による $P(a, b)$ は量子力学での期待値と一致するとして作っている、 P は 2 つのスピン期待値 (2) です。それぞれの単位ベクトル間の角度を $\theta_{AB}, \theta_{AB'}, \theta_{BB'}$ として

$$P(a, b) = -\cos \theta_{AB}$$

$$P(a, b') = -\cos \theta_{AB'}$$

$$P(b, b') = -\cos \theta_{BB'}$$

これらをベルの不等式に入れば

$$|-\cos \theta_{AB} + \cos \theta_{AB'}| \leq 1 - \cos \theta_{BB'}$$

これは角度を上手く選ぶと不等式が成立しない場合があることが分かります。例えば

$$\theta_{AB} = \frac{\pi}{4}, \theta_{AB'} = \frac{3\pi}{4}, \theta_{BB'} = \frac{\pi}{2} \quad (\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \frac{\pi}{2} = 0)$$

と選べば

$$|-\cos \theta_{AB} + \cos \theta_{AB'}| = |-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}| = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$1 - \cos \theta_{BB'} = 1$$

なので

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \geq 1$$

となり、不等式が成立しなくなります。つまり、量子力学はベルの不等式を満たしていません。

ベルの不等式では $A(e, \lambda) = -B(e, \lambda)$ を仮定していますが、この仮定を外しても同様の不等式を導けます。出発点は同じで

$$P(a, b) - P(a, b') = \int d\lambda \rho A(a) B(b) - \int d\lambda \rho A(a) B(b')$$

絶対値 $|A(a)|$ は 1 を超えないことから

$$\begin{aligned}
\left| \int d\lambda \rho A(\mathbf{a})B(\mathbf{b}) - \int d\lambda \rho A(\mathbf{a})B(\mathbf{b}') \right| &= \left| \int d\lambda \rho A(\mathbf{a})(B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}')) \right| \\
&\leq \int d\lambda \rho |A(\mathbf{a})| |B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}')| \\
&\leq \int d\lambda \rho |B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}')|
\end{aligned}$$

よって

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| \leq \int d\lambda \rho |B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}')| \quad (3)$$

という関係が出てきます。

これとは別に、新しく単位ベクトル \mathbf{a}' を用意して、同様にすれば

$$P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}')B(\mathbf{b}) + \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}')B(\mathbf{b}') = \int d\lambda \rho A(\mathbf{a}')(B(\mathbf{b}) + B(\mathbf{b}'))$$

となることから

$$|P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq \int d\lambda \rho |B(\mathbf{b}) + B(\mathbf{b}')| \quad (4)$$

(3),(4) の右辺は $B = \pm 1$ から

$$\cdot B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}') = 0, \quad B(\mathbf{b}) + B(\mathbf{b}') = \pm 2$$

$$\cdot B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}') = \pm 2, \quad B(\mathbf{b}) + B(\mathbf{b}') = 0$$

という組み合わせしか作れないので、(3),(4) を足せば

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2 \quad (5)$$

という不等式が出てきます。もしくは、組み合わせから

$$A(\mathbf{a})(B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}')) + A(\mathbf{a}')(B(\mathbf{b}) + B(\mathbf{b}')) = \pm 2$$

を作って ($A = \pm 1$ なので符号が変わるだけ)、絶対値を取って、 ρ をかけて λ で積分すれば

$$\begin{aligned}
&|A(\mathbf{a})(B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}')) + A(\mathbf{a}')(B(\mathbf{b}) + B(\mathbf{b}'))| = 2 \\
&\int d\lambda \rho |A(\mathbf{a})(B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}')) + A(\mathbf{a}')(B(\mathbf{b}) + B(\mathbf{b}'))| = \\
&|\int d\lambda \rho (A(\mathbf{a})(B(\mathbf{b}) - B(\mathbf{b}')) + A(\mathbf{a}')(B(\mathbf{b}) + B(\mathbf{b}')))| \leq \\
&|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2
\end{aligned} \quad (6)$$

となります。(5) や (6) は Clauser-Horne-Shimony-Holt(CHSH) の不等式と呼ばれ、仮定が入っていないためにベルの不等式より一般的です。ベルの不等式と言った時、CHSH の不等式を指すことが多いです。また、導出から分かるように $B(b) \pm B(b')$ が 0 か ± 2 になることを利用しているために、組み合わせを変えれば

$$|P(a, b) + P(a, b') + P(a', b) - P(a', b')| \leq 2$$

とすることも出来ます。

ベルの不等式がどうやって導かれたかを見直しておきます。ベルの不等式は、スピン 1/2 による 1 重項でのスピンの期待値に対して、局所性と隠れた変数を導入することで導かれています。このとき、隠れた変数 λ によって観測量を決定できるとし、その λ が従う確率分布によって期待値を定義しています。つまり、ベルの不等式は、理論に局所性があり、隠れた変数によって記述できるなら成立するものです。

そうして導かれたベルの不等式に量子力学でのスピンの期待値を入れると、成立しません。これはベルの定理と呼ばれ、局所性と隠れた変数を持つ理論は量子力学の結果を再現できないことを指します。

ベルの不等式が現実で成立しているかどうかは、スピンの観測によって検証することが可能です。その結果はベルの不等式を壊すというものです。しかし、だからと言って、何が原因でベルの不等式が成立していないかを完全に実証することは出来ていません (ベルの不等式を壊す結果は得られるが、局所性と実在性のどれが原因か判別出来ていない)。このため、非局所性での隠れた変数の理論が作られたりしています (arXiv:0801.2241v2 とかその参考文献とか)。

ベルの不等式の実験自体にも問題があり、抜け穴 (loophole) と呼ばれる問題を持っています。簡単に言えば、局所性 (片方の粒子の観測がもう片方に影響を与えない) を再現できているのかということと、検出効率の問題です。現在では抜け穴は同時になくすることは出来ないようですが、片方だけならほぼなくすることが出来ているようです。

ベルの不等式とエンタングル状態の関係もいろいろあります。例えば、2 粒子における純粋状態でのエンタングル状態は CHSH 不等式を壊すという定理があります (Gisin の定理)。しかし、3 粒子以上だと、ベルの不等式を壊さないエンタングル状態が存在します。こちら辺の話は例えば、quant-ph/0311180 なんかを見てください。

というわけで、ベルの不等式関係の話はまだいろいろと調べられています。