角運動量の合成

具体的を例を扱わない限り目的が分からない角運動量の合成の話を見ていきます。ここでは、合成した角運動量演算子の固有状態が、合成に使われた角運動量演算子の固有値によってどの範囲に制限されるのかを求めるだけです。ただ面倒な話をするだけなので、最後の結果に飛んでいいです。
補足として、途中で無視する数学的な細かいことを大雑把に説明しています。もしかしたら、先に補足を見た方が分かりやすいかもしれません。

ある 2 つの異なった独立な対象があり、それぞれが角運動量 (角運動量演算子) を持っているとします。この 2 つが合わさった全体としての角運動量をどう与えるのか見ていきます。
2 つの独立な対象の角運動量演算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は、それぞれの固有状態を $|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ として

$$\boldsymbol{A}^2|j_A, m_A\rangle = \hbar^2 j_A(j_A+1)|j_A, m_A\rangle \ , \ A_3|j_A, m_A\rangle = \hbar m_A|j_A, m_A\rangle \ , \ A_\pm|j_A, m_A\rangle = \alpha^\pm_{j_A, m_A}|j_A, m_A \pm 1\rangle$$

$$\boldsymbol{B}^2|j_B, m_B\rangle = \hbar^2 j_B(j_B+1)|j_B, m_B\rangle \ , \ B_3|j_B, m_B\rangle = \hbar m_B|j_B, m_B\rangle \ , \ B_\pm|j_B, m_B\rangle = \beta^\pm_{j_B, m_B}|j_B, m_B \pm 1\rangle$$

という関係を持っています。$|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ は規格化されていて

$$\langle j_A, m_A|j'_A, m'_A\rangle = \delta_{j_A j'_A}\delta_{m_A m'_A} \ , \ \langle j_B, m_B|j'_B, m'_B\rangle = \delta_{j_B j'_B}\delta_{m_B m'_B}$$

と与えられています。j_A, j_B は 0 以上の整数か半整数で、m_A, m_B は

$$-j_A \le m_A \le j_A \ , \ j_B \le m_B \le j_B \quad (m_{A,B} = -j_{A,B}, -j_{A,B}+1, \ldots, j_{A,B}-1, j_{A,B})$$

となっています。これから固有状態には

$$A_\pm|j_A, \pm j_A\rangle = 0 \ , \ B_\pm|j_A, \pm j_A\rangle = 0$$

という上限と下限が存在します。$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}$ の交換関係は、レヴィ・チビタ記号 $\epsilon_{abc}(\epsilon_{123} = +1)$ によって

$$[L_a, L_b] = i\hbar\epsilon_{abc}L_c \tag{1}$$

の形になっていて、$A_\pm, B_\pm = L_\pm$ と $\alpha^\pm_{j_A, m_A}, \beta^\pm_{j_B, m_B} = D^\pm_{l,n}$ は

$$L_\pm = L_1 \pm iL_2 \ , \ D^\pm_{l,n} = \hbar\sqrt{l(l+1) - n(n \pm 1)}$$

となっています。また、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は独立な対象での角運動量なので、交換しないと独立ではなくなってしまうので、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は交換します ($[A_1, B_1] = [A_1, B_2] = \cdots = 0$)。
ここで、全体の角運動量演算子は

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

で与えられると考えます (下の補足も参照)。これが角運動量演算子と言うためには、(1) が成立していればいいです ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はエルミート演算子なので、その和の $\boldsymbol{J}$ もエルミート演算子)。例えば

$$
\begin{aligned}
[J_1, J_2] &= [A_1 + B_1, A_2 + B_2] \\
&= [A_1, A_2] + [A_1, B_2] + [B_1, A_2] + [B_1, B_2] \\
&= i\hbar A_3 + i\hbar B_3 \\
&= i\hbar J_3
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は交換することを使っています。このように、実際に同じ交換関係を満たします。そうすると、当然

$$
[\boldsymbol{J}^2, J_a] = 0
$$

となっています。というわけで、$\boldsymbol{J}$ は角運動量演算子です。$\boldsymbol{J}$ を 2 つの対象 A, B から合成された角運動量として使うのは、これで上手くいくからです。

$\boldsymbol{J}$ の $\boldsymbol{J}^2$ と J_3 の同時固有関数も当然いますが、それが $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ との同時固有状態になっているのかを見ます。J_a と $\boldsymbol{A}^2$ との交換関係は

$$
\begin{aligned}
[J_1, \boldsymbol{A}^2] &= [A_1 + B_1, A_1^2 + A_2^2 + A_3^2] \\
&= [A_1, A_1^2 + A_2^2 + A_3^2] + [B_1, A_1^2 + A_2^2 + A_3^2] \\
&= [A_1, A_1^2 + A_2^2 + A_3^2] \\
&= [A_1, A_2^2] + [A_1, A_3^2] \\
&= A_2[A_1, A_2] + [A_1, A_2]A_2 + A_3[A_1, A_3] + [A_1, A_3]A_3 \\
&= i\hbar A_2 A_3 + i\hbar A_3 A_2 - i\hbar A_3 A_2 - i\hbar A_2 A_3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

他の場合も同様で

$$
[J_a, \boldsymbol{A}^2] = 0 \ , \ [J_a, \boldsymbol{B}^2] = 0
$$

となっています。これを使えば $\boldsymbol{J}^2$ とでは

$$
[\boldsymbol{J}^2, \boldsymbol{A}^2] = [J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \boldsymbol{A}^2] = 0
$$

とすぐに分かります。$\boldsymbol{J}^2$ と A_a とでは

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{J}^2, A_3] &= [J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, A_3] \\
&= [J_1^2, A_3] + [J_2^2, A_3] + [J_3^2, A_3] \\
&= J_1[J_1, A_3] + [J_1, A_3]J_1 + J_2[J_2, A_3] + [J_2, A_3]J_2 + J_3[J_3, A_3] + [J_3, A_3]J_3 \\
&= J_1[A_1, A_3] + [A_1, A_3]J_1 + J_2[A_2, A_3] + [A_2, A_3]J_2 + J_3[A_3, A_3] + [A_3, A_3]J_3 \\
&= -i\hbar J_1 A_2 - i\hbar A_2 J_1 + i\hbar J_2 A_1 + i\hbar A_1 J_2 \\
&= -i\hbar A_1 A_2 - i\hbar B_1 A_2 - i\hbar A_2 A_1 - i\hbar A_2 B_1 + i\hbar A_2 A_1 + i\hbar B_2 A_1 + i\hbar A_1 A_2 + i\hbar A_1 B_2 \\
&= -i\hbar B_1 A_2 - i\hbar A_2 B_1 + i\hbar B_2 A_1 + i\hbar A_1 B_2 \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

のようになるので、交換しません。

つまり、$\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{B}^2, J_a, \boldsymbol{J}^2$ は同時固有状態を持ちます ($\boldsymbol{J}^2$ は A_3, B_3 と交換しないので A_3, B_3 は省く)。そして $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{J}$ はそれぞれが角運動量演算子としての交換関係を満たしているので、同時固有状態を $|j_A, j_B; j, m\rangle$ と書くことにすれば

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{J}^2 |j_A, j_B; j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j_A, j_B; j, m\rangle \\
&J_3 |j_A, j_B; j, m\rangle = \hbar m |j_A, j_B; j, m\rangle \\
&\boldsymbol{A}^2 |j_A, j_B; j, m\rangle = \hbar^2 j_A(j_A+1)|j_A, j_B; j, m\rangle \\
&\boldsymbol{B}^2 |j_A, j_B; j, m\rangle = \hbar^2 j_B(j_B+1)|j_A, j_B; j, m\rangle
\end{aligned}
$$

となります。当然、j は 0 以上の整数か半整数で、m は $-j \leq m \leq j$ です。そして、昇降演算子も存在するので

$$
J_\pm |j_A, j_B; j, m\rangle = C^\pm_{j,m} |j_A, j_B; j, m \pm 1\rangle \quad (J_\pm = J_1 \pm iJ_2)
$$

と書くことにし（$C^\pm_{j,m}$ も $D^\pm_{l,n}$ と同じ)、$|j_A, j_B; j, \pm j\rangle$ に $J_\pm$ を作用させると 0 になります。

ここから、2 つの対象における角運動量は j_A, j_B が固定されているとします (m_A, m_B は j_A, j_B によって取れる範囲が決まる)。これは j_A, j_B を持っている 2 つの対象を合わせた全体の角運動量演算子が知りたいからです (例えば 2 つの対象がスピン角運動量して $j_A = 1, j_B = 1/2$ を持っているとして、この 2 つを合わせる)。このため、$|j_A, j_B; j, m\rangle$ で固定されていないのは j, m だけで、j, m がどの値を取れるかは j_A, j_B によって決まるはずです。なので、煩わしければ、$|j_A, j_B; j, m\rangle$ は $|j, m\rangle$ としても意味が分かっていれば平気です。

$\boldsymbol{J}$ の作用の仕方が $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ と同じなので、$|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ のように、$|j_A, j_B; j, m\rangle$ は規格化されていて正規直交関係

$$
\langle j_A, j_B; j, m | j_A, j_B; j', m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}
$$

を持つとします。j_A, j_B は固定されているので、j, m によって与えられています。ここから、J の固有状態と言ったときは $|j_A, j_B; j, m\rangle$ を指すことにします。

これで、合成された角運動量演算子の固有状態の外観は作れました。次に必要になるのが j, m がどのような値を取れるのかです。すでに言ったように、$\boldsymbol{J}$ は角運動量演算子なので、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ から合成されたというのとは無関係に、

j は 0 以上の整数か半整数で、m は $-j \leq m \leq j$ です。しかし、$\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ から合成されたものなので、j は自由に与えられるものでなく、j_A, j_B から決まる量のはずです。なので、j が与えられた j_A, j_B に対してどの範囲を取れるのかを求める必要があります。これがここで求めたいものです。

まず、新しい状態を 1 つ作ります。今は $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の固有状態 $|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ があるので、この 2 つから

$$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

という状態が作れるとします。これは $|j_A, m_A\rangle$ での j_A, m_A、$|j_B, m_B\rangle$ での j_B, m_B によって指定される状態で

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^2|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar^2 j_A(j_A+1)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&A_3|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar m_A|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&A_\pm|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \alpha^\pm_{j_A, m_A}|j_A, m_A+1; j_B, m_B\rangle \\
&A_\pm|j_A, \pm j_A; j_B, m_B\rangle = 0 \\
&\boldsymbol{B}^2|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar^2 j_B(j_B+1)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&B_3|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar m_B|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&B_\pm|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \beta^\pm_{j_B, m_B}|j_A, m_A; j_B, m_B+1\rangle \\
&B_\pm|j_A, m_A; j_B, \pm j_B\rangle = 0
\end{aligned}$$

となる状態とします。これも規格化されていて

$$\langle j_A, m'_A; j_B, m'_B|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \delta_{m_A m'_A}\delta_{m_B m'_B}$$

とします (j_A, j_B は固定されている)。$|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ の正規直交性から、こうするのは自然です。$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ を (AB) の固有状態と言っていきます。

(AB) の固有状態を使って $|j_A, j_B; j, m\rangle$ を展開します。$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ の完全性は j_A, j_B は固定されているので、可能な状態は m_A, m_B によるので、可能な m_A, m_B $(-j_{A,B} \leq m_{A,B} \leq j_{A,B})$ による和で与えられて

$$1 = \sum_{m_A, m_B} |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle\langle j_A, m_A; j_B, m_B|$$

となります。J の固有状態 $|j_A, j_B; j, m\rangle$ に差し込むことで

$$\begin{aligned}
|j_A, j_B; j, m\rangle &= \sum_{m_A, m_B} |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle\langle j_A, m_A; j_B, m_B|j_A, j_B; j, m\rangle \\
&= \sum_{m_A, m_B} \langle j_A, m_A; j_B, m_B|j_A, j_B; j, m\rangle|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&= \sum_{m_A, m_B} C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \qquad (2)
\end{aligned}$$

この係数 $C(j_A,j_B,j,m_A,m_B,m)$ をクレブシュ・ゴルダン (Clebsch-Gordan) 係数、もしくはウィグナー (Wigner) 係数と言います。今は $|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$ の直交性から、m_A,m_B が異なる (AB) の固有状態は全て直交しています。なので、右辺は線形独立な量による線形結合になっています。よって、(2) は例えば、$j=j_1,m=m_1$ と与えられた $|j_A,j_B;j_1,m_1\rangle$ は $C(j_A,j_B,j_1,m_A,m_B,m_1)$ を係数にする $|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$ の線形結合でかけることを言っています。

　また、$|j_A,j_B;j,m\rangle$ の完全性は、可能な状態が j,m で指定されることから、可能な j,m に対する和として

$$1=\sum_{j,m}|j_A,j_B;j,m\rangle\langle j_A,j_B;j,m|$$

となります。これを使えば $|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$ を J の固有状態で展開した形で書くことが出来ます。

　展開形を見ていくことで、本題の $|j_A,j_B;j,m\rangle$ での j,m が取れる範囲を求めます。まず、m についてみていきます。J_3 を $|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$ に作用させると

$$\begin{aligned}J_3|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle&=(A_3+B_3)|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle\\&=\hbar(m_A+m_B)|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle\end{aligned}$$

となっていることと

$$J_3|j_A,j_B;j,m\rangle=\hbar m|j_A,j_B;j,m\rangle$$

であることから

$$\begin{aligned}J_3|j_A,j_B;j,m\rangle&=\sum_{m_A,m_B}C(j_A,j_B,j,m_A,m_B,m)J_3|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle\\m|j_A,j_B;j,m\rangle&=\sum_{m_A,m_B}(m_A+m_B)C(j_A,j_B,j,m_A,m_B,m)|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle\\\sum_{m_A,m_B}mC(j_A,j_B,j,m_A,m_B,m)|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle&=\sum_{m_A,m_B}(m_A+m_B)C(j_A,j_B,j,m_A,m_B,m)|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle\\0&=\sum_{m_A,m_B}(m-m_A-m_B)C(j_A,j_B,j,m_A,m_B,m)|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle\end{aligned}$$

これから

$$m=m_A+m_B$$

を維持していない項でのクレブシュ・ゴルダン係数は 0 になることが分かります。実際に、$m=m_A+m_B$ になっている項とそれ以外に分けてみると

$$
\begin{aligned}
m|j_A, j_B; j, m\rangle &= \sum_{m_A, m_B}(m_A + m_B)C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&= m\sum_i C(j_A, j_B, j; m_A + m_B = m_i = m)|j_A, m_A; j_B, m_B; m_A + m_B = m_i = m\rangle \\
&\quad + \sum_j m_j C(j_A, j_B, j; m_A + m_B = m_j \neq m)|j_A, m_A; j_B, m_B; m_A + m_B = m_j \neq m\rangle \qquad (3)
\end{aligned}
$$

i は m_A と m_B の組み合わせが $m = m_A + m_B$ となる場合に対して、j はそれ以外の組み合わせに対してです。第二項が 0 になるという条件、つまり $m = m_A + m_B$ でないときクレブシュ・ゴルダン係数 $C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m)$ は 0 という条件を入れると

$$
\begin{aligned}
m|j_A, j_B; j, m\rangle &= m\sum_i C(j_A, j_B, j; m_A + m_B = m_i = m)|j_A, m_A; j_B, m_B; m_A + m_B = m_i = m\rangle \\
|j_A, j_B; j, m\rangle &= \sum_i C(j_A, j_B, j; m_A + m_B = m_i = m)|j_A, m_A; j_B, m_B; m_A + m_B = m_i = m\rangle \\
&= \sum_{m_A, m_B} C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle
\end{aligned}
$$

となって、(2) を再現できます (最後はクレブシュ・ゴルダン係数の条件を入れて (3) を巻き戻しただけ)。よって、$m = m_A + m_B$ でないときクレブシュ・ゴルダン係数は 0 という条件があることが分かります。この条件によって、(2) における $m = m_A + m_B$ とならない m_A, m_B の組み合わせによる項は 0 です。

この条件によって m_A と m_B 両方の和でなく片方の和を取るだけで十分になります。なので

$$
|j_A, j_B; j, m\rangle = \sum_{m_A} C(j_A, j_B, j, m_A, m)|j_A, m_A; j_B, m - m_A\rangle
$$

と書くこともできます。

m の条件 $m = m_A + m_B$ から、クレブシュ・ゴルダン係数が 0 にならない m の最大値 m_{max} は $m_{max} = j_A + j_B$ です。これより上の $m_{max} = (j_A + 1) + j_B$ のような場合がないのは

$$
-j_{A,B} \leq m_{A,B} \leq j_{A,B}
$$

だからです。また、他の $m_{max} = j_A + j_B$ となる $m_{max} = (j_A + 1) + (j_B - 1)$ のような場合が許されないのも同じ理由です。

ここでいったん状況を整理します。今知りたいのは、J の固有状態 $|j_A, j_B; j, m\rangle$ での j, m がどんな値を取れるのかです。このとき固定されているのは j_A と j_B の値だけです。m に対しては角運動量演算子としての性質から

$$
-j \leq m \leq j
$$

となっています。クレブシュ・ゴルダン係数が 0 にならない m の取り方は $m = m_A + m_B$ となっていて、このときの最大値は $m_{max} = j_A + j_B$ となっています。

ここで、具体的な m として $m = m_{max} = j_A + j_B$ というのが出てきたので、これによる J の固有状態

$$|j_A, j_B; j, m_{max}\rangle \quad (-j \leq m_{max} \leq j)$$

を見てみます。クレブシュ・ゴルダン係数が 0 にならない項は $m_{max} = j_A + j_B$ を満たさなければいけないので、(2) は

$$\begin{aligned}|j_A, j_B; j, m_{max}\rangle &= \sum_{m_A, m_B} C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m_{max})|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\ &= C(j_A, j_B, j, j_A, j_B, m_{max})|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle\end{aligned}$$

$m_{max} = j_A + j_B$ となる (m_A, m_B) の組

$$(j_A, j_B), (j_A + 1, j_B - 1), \ldots$$

による和ですが、$-j_{A,B} \leq m_{A,B} \leq j_{A,B}$ の条件から、(j_A, j_B) しか存在しません。よって (このクレブシュ・ゴルダン係数を単に C と書きます)

$$|j_A, j_B; j, m_{max}\rangle = C|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle$$

これに J_+ を作用させてみると

$$\begin{aligned}J_+|j_A, j_B; j, m_{max}\rangle &= CJ_+|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle \\ C^+_{j,j_{max}}|j_A, j_B; j, m_{max} + 1\rangle &= C(A_+ + B_+)|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle \\ &= C(A_+|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle + B_+|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle)\end{aligned}$$

$m_{A,B}$ の条件から右辺は 0 になるので

$$J_+|j_A, j_B; j, m_{max}\rangle = 0$$

となります。つまり、

$$J_3J_+|j_A, j_B; j, m_{max}\rangle = 0 \quad (J_3|j_A, j_B; j, m_{max}\rangle = \hbar m_{max}|j_A, j_B; j, m_{max}\rangle)$$

なので、これは J_3 が取れる最大の固有値が m_{max} であることを言っています。そうすると $-j \leq m_{max} \leq j$ において m_{max} より大きな値は存在しないことから $j = m_{max}$ になります。つまり、m_{max} において、j が取れるのは m_{max} のみということになります。それを

$$j_{max} = m_{max} = j_A + j_B$$

と書くことにすれば、m_{max} における J の固有状態は

$$|j_A, j_B; j_{max}, m_{max}\rangle$$

しか許されないことになり

$$J_+|j_A, j_B; j_{max}, m_{max}\rangle = 0$$

から、j_{max}, m_{max} が j, m の可能な値の最大値になります ($-j \leq m \leq j$ から j は m の最大値よりも上の値を取れない)。というわけで、$|j_A, j_B; j_{max}, m_{max}\rangle$ が $|j_A, j_B; j, m\rangle$ において可能な j と m が取れる最大の値での状態です

そして、これに下降演算子 J_- を使えば、J_3 の固有値は 1 刻みで $-m_{max} = -j_{max}$ まで下げていけるので、j_{max} において

$$|j_A, j_B; j_{max}, m_{max}\rangle\ ,\ |j_A, j_B; j_{max}, m_{max}-1\rangle, \ldots, |j_A, j_B; j_{max}, -m_{max}\rangle \tag{4}$$

と取れることが分かり、$m_{max} = j_{max}$ から、$j = j_{max}$ では $2j_{max}+1$ 個の J の固有状態があることになります。

また、(2) は規格化から

$$\begin{aligned}|j_A, j_B; j_{max}, m_{max}\rangle &= C|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle \\ &= |j_A, j_A; j_B, j_B\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

となり、このときのクレブシュ・ゴルダン係数は 1 になります。

j は j_{max} に固定されるという条件はないので、次に必要なのが j がどこまで下げられるかです。今見たのは、$m_A + m_B$ が最大値 $j_A + j_B$ をとった場合です。なので、m_{max} の 1 つ下の状態として $m_A + m_B = m_{max} - 1$ としたものを考えます (m_A, m_B は 1 刻み)。これは (4) での 2 番目の状態としてすでにいますが、$m = m_{max} - 1$ が J_3 の最大の固有値となる状態

$$J_+|j_A, j_B; j, m_{max}-1\rangle = 0$$

があるとすれば、j_{max} から 1 下がった $j = m_{max} - 1 = j_{max} - 1$ による状態となります (存在することは後で示します)。よって、j_{max} から 1 下がった状態として

$$|j_A, j_B; j_{max}-1, m_{max}-1\rangle$$

が作れて、これに下降演算子 J_- を作用させていくことで

$$|j_A, j_B; j_{max}-1, m_{max}-1\rangle\ ,\ |j_A, j_B; j_{max}-1, m_{max}-2\rangle, \ldots,\ |j_A, j_B; j_{max}-1, -(m_{max}-1)\rangle$$

となります。これは $2(j_{max}-1)+1$ 個あります。

同じことがこの先も可能なので、j を j_{max} から $j_{max}-1, j_{max}-2, \ldots$ と作っていけます。このようにして作れる $|j_A, j_B; j, m\rangle$ の可能な状態は表 1 にまとめています。ページ内におさまるように、$j_{max} = \bar{j}$ と書いています ($j_{max} = m_{max} = j_A + j_B = \bar{j}$)。$j_{max} = m_{max} = j_A + j_B$ なので、j_{max} と m_{max} は好きなほうを使えばいいです。

$j \backslash m$	$\bar{j}$	$\bar{j}-1$	$\bar{j}-2$	$\cdots$	$-(\bar{j}-2)$	$-(\bar{j}-1)$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$\lvert\bar{j},\bar{j}\rangle$	$\lvert\bar{j},\bar{j}-1\rangle$	$\lvert\bar{j},\bar{j}-2\rangle$	$\cdots$	$\lvert\bar{j},-(\bar{j}-2)\rangle$	$\lvert\bar{j},-(\bar{j}-1)\rangle$	$\lvert\bar{j},-\bar{j}\rangle$
$\bar{j}-1$		$\lvert\bar{j}-1,\bar{j}-1\rangle$	$\lvert\bar{j}-1,\bar{j}-2\rangle$	$\cdots$	$\lvert\bar{j}-1,-(\bar{j}-2)\rangle$	$\lvert\bar{j}-1,-(\bar{j}-1)\rangle$	
$\bar{j}-2$			$\lvert\bar{j}-2,\bar{j}-2\rangle$	$\cdots$	$\lvert\bar{j}-2,-(\bar{j}-2)\rangle$		
$\vdots$				$\vdots$			
j_*				$\lvert j_*,j_*\rangle\cdots\lvert j_*,-j_*\rangle$			

表 1: $|j_A, j_B; j, m\rangle$ の可能な状態

後は、$|j_A, j_B; j_{max}-1, j_{max}-1\rangle$ が存在することと、j の最小値 j_* を決めればいいです。ここからは最小値 j_* を j_{min} と書いていきます。

$|j_A, j_B; j_{max}-1, m_{max}-1\rangle$ がいることを確かめます。まず (5) に J_- を作用させることで

$$\begin{aligned} J_-|j_A, j_B; j_{max} m_{max}\rangle &= J_-|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle \\ C^-_{j_{max},m_{max}}|j_A, j_B; j_{max}, m_{max}-1\rangle &= (A_- + B_-)|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle \\ &= A_-|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle + B_-|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle \\ &= \alpha^-_{j_A,j_A}|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + \beta^-_{j_B,j_B}|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle \\ |j_A, j_B; j_{max} m_{max}-1\rangle &= a|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + b|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

とかけることが分かります。$\alpha^-_{j_A,j_A}, \beta^-_{j_B,j_B}, C^-_{j_{max},m_{max}}$ は全て正にとっているので、a, b も正です。これが表 1 での 1 行 2 列目にいる J の固有状態を (AB) の固有状態で書いた形です。

次に $m = m_{max}-1$ を作れるクレブシュ・ゴルダン係数が 0 にならない取り方を見てみます。m_A と m_B の取れる値内で $m_A + m_B = m_{max}-1$ となる取り方は、

$$m_A = j_A \ , \ m_B = j_B - 1$$

か

$$m_A = j_A - 1 \ , \ m_B = j_B$$

の 2 通りです。なので、この 2 つ以外はクレブシュ・ゴルダン係数が 0 になることから、(2) は

$$|j_A, j_B; j, m_{max}-1\rangle = \sum_{m_A,m_B} C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m_{max}-1)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \tag{7}$$

$$= C_1|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + C_2|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle \tag{8}$$

$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ の直交性から、右辺第一項と第二項の状態は直交し、この 2 つの (AB) の固有状態が線形独立であることを意味します。そして、線形独立な 2 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ による線形結合には、それに直交する別の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ によ

る線形結合が 1 つあります。なので、今の場合も、この線形結合と直交する、$|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle$ と $|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle$ による別の線形結合が 1 つあるはずです (2 次元ベクトルでは 1 つあるのと同じで、今は 2 つの状態による線形結合だから 2 次元と同じで 1 つ)。

このように考えることで、$|j_A, j_B; j, m_{max}-1\rangle$ には j によって区別される 2 つの J の固有状態

$$|j_A, j_B; j_1, m_{max}-1\rangle\ ,\ |j_A, j_B; j_2, m_{max}-1\rangle$$

があると言えます (j 以外は固定されているので j しか動かせないから)。$j_1 \neq j_2$ なので、$|j_A, j_B; j, m\rangle$ の直交性からこの 2 つは直交します。そうすると、j_1 の方が (AB) の固有状態の線形結合 (6) で与えられているとすれば

$$|j_A, j_B; j_1, m_{max}-1\rangle = a|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + b|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle$$

$$|j_A, j_B; j_2, m_{max}-1\rangle = c|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + d|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle$$

この 2 つが直交するように c, d を決めればいいです。直交性を使うことで

$$\begin{aligned}
0 &= \langle j_A, j_B; j_2, m_{max}-1|j_A, j_B; j_1, m_{max}-1\rangle \\
&= (c\langle j_A, j_A-1; j_B, j_B| + d\langle j_A, j_A; j_B, j_B-1|)(a|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + b|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle) \\
&= ac\langle j_A, j_A-1; j_B, j_B|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + bc\langle j_A, j_A-1; j_B, j_B|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle \\
&\quad + ad\langle j_A, j_A; j_B, j_B-1|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + bd\langle j_A, j_A; j_B, j_B-1|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle \\
&= ac + bd \\
ac &= -bd
\end{aligned}$$

なので

$$|j_A, j_B; j_1, m_{max}-1\rangle = a|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + b|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle$$

$$|j_A, j_B; j_2, m_{max}-1\rangle = b|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle - a|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle$$

となります。1 番目のは $j_1 = j_{max}$ なので表の 1 行 2 列目にいて、2 番目の j_2 によるのが新しく出てきた状態です。係数の位置を交換してマイナスをつけたものが直交するという性質も線形結合の話でよく出てくるものです。

j_2 の方に J_+ を作用させてみると

$$
\begin{aligned}
J_+|j_A, j_B; j_2, m_{max}-1\rangle &= bJ_+|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle - aJ_+|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle \\
&= b\alpha^+_{j_A,j_A-1}|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle + b\beta^+_{j_B,j_B}|j_A, j_A-1; j_B, j_B+1\rangle \\
&\quad - a\alpha^+_{j_A,j_A}|j_A, j_A+1; j_B, j_B-1\rangle - a\beta^+_{j_B,j_B-1}|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle \\
&= b\alpha^+_{j_A,j_A-1}|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle - a\beta^+_{j_B,j_B-1}|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle \\
&= \frac{\beta^-_{j_B,j_B}\alpha^+_{j_A,j_A-1}}{C^-_{j_{max},m_{max}}}|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle - \frac{\alpha^-_{j_A,j_A}\beta^+_{j_B,j_B-1}}{C^-_{j_{max},m_{max}}}|j_A, j_A; j_B, j_B\rangle
\end{aligned}
$$

m_A, m_B は j_A, j_B が最大値なので、j_A+1, j_B+1 の状態は消えます。係数の計算は

$$
\begin{aligned}
\alpha^+_{j_A,j_A-1}\beta^-_{j_B,j_B} &= \hbar\sqrt{j_A(j_A+1)-j_A(j_A-1)}\sqrt{j_B(j_B+1)-j_B(j_B-1)} = \hbar\sqrt{4j_Aj_B} \\
\alpha^-_{j_A,j_A}\beta^+_{j_B,j_B-1} &= \hbar\sqrt{j_A(j_A+1)-j_A(j_A-1)}\sqrt{j_B(j_B+1)-j_B(j_B-1)} = \hbar\sqrt{4j_Aj_B}
\end{aligned}
$$

となっているので、消えて

$$
J_+|j_A, j_B; j_2, m_{max}-1\rangle = 0
$$

つまり、この J の固有状態は j_2 における J_3 の最大の固有値を持った状態になっています。このため j_2 は

$$
j_2 = m_{max}-1 = j_{max}-1
$$

と求まって、J の固有状態は

$$
|j_A, j_B; j_{max}-1, j_{max}-1\rangle
$$

と取れることになります。よって、表 1 において、$j_{max}-1$ の行での J_3 の最大の固有値は $j_{max}-1$ なので、これの左 (2 行 1 列目) には状態が入らず、右には J_- を作用させたものが $m=-(j_{max}-1)$ まで入っていきます。

ちなみに、ここで使った a, b からクレブシュ・ゴルダン係数 C_1, C_2 が求まります (これがクレブシュ・ゴルダン係数を求める方法にもなっている)。

2 つの (AB) の固有状態の線形結合によって、

$$
|j_A, j_B; j_1, m_{max}-1\rangle\ ,\ |j_A, j_B; j_2, m_{max}-1\rangle \tag{9}
$$

という $m=m_{max}-1$ での 2 つの J の固有状態が作れたことから、3 つの (AB) の固有状態では 3 つの J の固有状態 $(m=m_{max}-2)$ が作れることが予想できると思います。これは、2 次元の線形結合 $a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2$ では直交するのが 1 つ (合計 2 つ)、3 次元の線形結合 $a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+a_3\boldsymbol{v}_3$ では直交するのが 2 つ (合計 3 つ)、のように増えていくのと同じです。そのため、表 1 の 3 列目には 3 つの状態が入ります。

というわけで、後は同様にして、$|j_A, j_B; j_{max}-2, m_{max}-2\rangle$ を $|j_A, j_B; j_{max}, m_{max}-2\rangle$ と $|j_A, j_B; j_{max}-1, m_{max}-2\rangle$ とに直交し J_+ で 0 になるものとして求める、ということを繰り返していけば、表が埋まっていきます。具体的

な形を知る必要がなければ、単純に $|j_A, j_B; j_{max}, j_{max}\rangle$ での j_{max}, j_{max} から -1 を引いていけば各行での一番左端になります。

最後に j_{min} を求めます。そのために、表における各列の個数 ($m = j_{max}, j_{max}-1, \ldots$ の状態の数) を数えます。$m = j_{max}$ での状態は $j = j_{max}$ のみなので 1 個、$m = j_{max}-1$ では $j = j_{max}$ と $j = j_{max}-1$ での 2 個です。同様にしていけば、予想できるように

$$
\begin{aligned}
m = j_{max} &\ : 1 \text{ 個} \\
m = j_{max}-1 &\ : 2 \text{ 個} \\
m = j_{max}-2 &\ : 3 \text{ 個} \\
&\ \vdots \\
m = j_{max}-n &\ : n+1 \text{ 個}
\end{aligned}
$$

この個数は、表 1 の縦方向を見れば当たり前ですが、

$$|j_A, j_B; j_{max}, j_{max}-n\rangle$$

から

$$|j_A, j_B; j_{max}-n, j_{max}-n\rangle$$

までの個数のことなので、$j_{max}-(j_{max}-n)+1 = n+1$ 個となっています。一番下がこれになっているのは、

$$J_+|j_A, j_B; j_{max}-n, j_{max}-n\rangle = 0$$

だからです。表 1 で言えば、一番左上から、j, m をそれぞれ -1 していったものが、一番左端の状態になっています。

また、この個数は、(9) のところで触れた線形結合の話から、(2) における右辺の項の数と同じです。これを利用します。

ここで、$n = 2j_B$ として、

$$m = j_{max} - n = (j_A + j_B) - 2j_B = j_A - j_B$$

となる J の固有状態を見てみます。どちらも同じ結論になるので、$j_A > j_B$ とします。このときの、クレブシュ・ゴルダン係数が 0 にならない組み合わせは

$$(m_A, m_B) = (j_A, -j_B), (j_A-1, -j_B+1), (j_A-2, -j_B+2), \ldots, (j_A-j_B, 0), \ldots, (j_A-2j_B, j_B)$$

となります。$j_A > j_B$ なので、j_B が先に 0 にたどり着き、$+j_B$ にも先にたどり着きます。そして、

$$m_A = j_A - 2j_B > -j_A \quad (-j_B > -j_A)$$

となっているので、$-j_A \leq m_A \leq j_A$ も満たしています。なので、これは $-j_B$ から j_B までの個数となって、$2j_B+1$ 個で、$n=2j_B$ から $n+1$ 個です。よって、この場合でのクレブシュ・ゴルダン係数が 0 にならない項の数は $n+1$ 個になり、(2) での右辺には $n+1$ 個の項があります。そして、(9) での話と同じように、今の $m=j_A-j_B$ において $|j_A, j_B; j, m\rangle$ の可能な状態の個数が $n+1$ 個あることになります。

これは j による区別が $n+1$ 個あるということなので、表での $m=j_A-j_B$ の個数と比べてみます。$m=j_A-j_B$ での表の一番下の状態は $j=m=j_{max}-n$ の状態なので、

$$j_{max}-(j_{max}-n)+1=n+1 \quad (n=2j_B)$$

よって、同じ個数です。

ここからさらに 1 下げて $(n=2j_B+1)$

$$m=j_{max}-n=(j_A+j_B)-(2j_B+1)=j_A-j_B-1$$

としてみます。同様にすることで

$$(m_A, m_B)=(j_A-1, -j_B), (j_A-2, -j_B+1), (j_A-3, -j_B+2), \ldots, (j_A-j_B-1, 0), \ldots, (j_A-1-2j_B, j_B)$$

なので、たとえ等号での $j_A=j_B+1$ でも

$$j_B+1-1-2j_B=-j_B>-j_A$$

なので $-j_A \leq m_A \leq j_A$ を満たしています。このときの組み合わせの個数は j_B の取り方の個数なので、$2j_B+1$ 個になりますが、$n=2j_B+1$ なので n にすれば、n 個です。一方で、表 1 から数える個数は常に $n+1$ 個なので、個数が合わなくなっています。

表 1 から求める個数は機械的に先を予測しての個数なので、常に成立している保証がないことを考えれば、$m=j_A-j_B-1$ の状態

$$\begin{gathered}
|j_A, j_B; j_{max}, j_A-j_B-1\rangle \\
|j_A, j_B; j_{max}-1, j_A-j_B-1\rangle \\
\vdots \\
|j_A, j_B; j_A-j_B, j_A-j_B-1\rangle \\
|j_A, j_B; j_A-j_B-1, j_A-j_B-1\rangle=|j_A, j_B; j_{max}-n, j_{max}-n\rangle \quad (n=2j_B+1)
\end{gathered}$$

のなかに成立していないものがあります。どれかは、この表を求めるときの話を持ち出せばすぐに分かります。この表は一番左端を求めて、J_- を作用させていくことで右側の状態を求めていくという手順になっています。そうすると、$|j_A, j_B; j_A-j_B, j_A-j_B\rangle$ の状態がいることは確かめられているので最後から 1 個前までは存在でき、これで n 個です。よって、最後の $|j_A, j_B; j_A-j_B-1, j_A-j_B-1\rangle$ が存在できない状態であることになります。

つまり、(2) において、$j=j_A-j_B$ までは $m_{A,B}$ の条件とクレブシュ・ゴルダン係数が 0 でないという条件から $n+1$ 個の項が出てきますが、$j=j_A-j_B-1$ になると $m_{A,B}$ の条件に早く引っかかるために n 個の項しか出てこなくなるということです。

$j=j_A-j_B-1$での一番左端での状態が存在しない以上、この先は存在しないので、jは$j=j_A-j_B\ (j_A>j_B)$で止まります。というわけで、jの可能な範囲は

$$j_A+j_B, j_A+j_B-1, \dots, |j_A-j_B|$$

となります ($j_A<j_B$ でも同じになるから絶対値をつけている)。

これで話は終わりです。これまでの話をまとめておきます。角運動量演算子 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ を持つ独立な 2 つの対象から

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

と合成した角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$ を作ります。このとき、$\boldsymbol{J}^2, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{B}^2$ の同時固有状態として

$$\boldsymbol{J}^2|j_A,j_B;j,m\rangle=\hbar^2 j(j+1)|j_A,j_B;j,m\rangle$$

$$J_3|j_A,j_B;j,m\rangle=\hbar m|j_A,j_B;j,m\rangle$$

$$J_\pm|j_A,j_B;j,m\rangle=C^\pm_{j,m}|j_A,j_B;j,m\pm1\rangle$$

$$\boldsymbol{A}^2|j_A,j_B;j,m\rangle=\hbar^2 j_A(j_A+1)|j_A,j_B;j,m\rangle$$

$$\boldsymbol{B}^2|j_A,j_B;j,m\rangle=\hbar^2 j_B(j_B+1)|j_A,j_B;j,m\rangle$$

というのが作れます。このとき同時固有状態 $|j_A,j_B;j,m\rangle$ における j,m には

$$j=j_A+j_B, j_A+j_B-1, \dots, |j_A-j_B|$$

$$-j\le m\le j$$

という制限がかかります。$|j_A,j_B;j,m\rangle$ が可能な取り方は表 1 になっています ($j_{min}=|j_A-j_B|, j_{max}=j_A+j_B$)。

そして、$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ でのそれぞれの固有状態 $|j_A,m_A\rangle, |j_B,m_B\rangle$ から作られる

$$\boldsymbol{A}^2|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle=\hbar^2 j_A(j_A+1)|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$$

$$A_3|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle=\hbar m_A|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$$

$$A_\pm|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle=\alpha^\pm_{j_A,m_A}|j_A,m_A+1;j_B,m_B\rangle$$

$$\boldsymbol{B}^2|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle=\hbar^2 j_B(j_B+1)|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$$

$$B_3|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle=\hbar m_B|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$$

$$B_\pm|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle=\beta^\pm_{j_B,m_B}|j_A,m_A;j_B,m_B+1\rangle$$

という $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ における同時固有状態 $|j_A,m_A;j_B,m_B\rangle$ を定義すると

$$|j_A, j_B; j, m\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

と書けます。$C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m)$ をクレブシュ・ゴルダン（Clebsch-Gordan）係数と言い、$m = m_A + m_B$ のときに値を持ちます。ちなみに、クレブシュは Clebsch という綴りで、この人はドイツ人です。そのため b の発音が英語かドイツ語かで統一されていないらしく、ブかプの両方が使われています。人名なのでドイツ語に合わせるのがいい気もしますが、最近はブを使っている場合が多そうなので、ブにしていました。

j の範囲を決めるのが面倒だっただけで、結果としてはこれだけです。後は具体的に j_A, j_B を与えて、クレブシュ・ゴルダン係数を決めていくという話になります。クレブシュ・ゴルダン係数を求めるのは面倒なだけで単純です。$|j_A, j_B; j_{max} - 1, m_{max} - 1\rangle$ が存在することを示したのと同じ手順を繰り返すことで求めるか、ある程度の規則性があるのでそれを使って求めるかですが、ここでは省きます。2,3 個計算したら、後は公式扱いにして、本とかに載っている結果を使ってしまえばいいと思います。

・補足

余計な情報を入れたくなかったので省いた数学的な細かいことを簡単に言って、その視点から上の話を見直します。数学はそんなに厳密に扱っていないです。簡単に言ってしまえば、量子力学で出てくるエルミート演算子の固有状態は正規直交系になっているから、それを利用しようというだけです。

2 つのベクトル空間 V, W(内積は定義されています) から新しいベクトル空間 U を

$$U = V \otimes W$$

と作ることが出来ます。「$\otimes$」はテンソル積の記号で、単に V, W から U を作る記号と思えばいいです。テンソル積によって作られたベクトル空間 U の次元は V の次元と W の次元の積になっています。

この話からなんとなく予想できるように、基底ベクトルのテンソル積から新しいベクトル空間での基底ベクトルが作れます。例えば、3 次元ベクトル空間として、V の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$、$W$ の基底ベクトルを $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ とすれば U での基底ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{g}_1 \ , \ \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{g}_2 \ , \ \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{g}_3 \ , \ \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{g}_1 \ , \ \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{g}_2$$

$$\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{g}_3 \ , \ \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{g}_1 \ , \ \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{g}_2 \ , \ \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{g}_3$$

という 9 個 (組み合わせの数から $3 \times 3 = 9$) のテンソル積で表されます (U は 3×3 =9 次元ベクトル空間)。ただ書いただけなので、$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{g}_j$ が具体的に何であるかはどうでもいいです。

角運動量演算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が作用する $|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ でも同じように考えます。言葉を統一するために状態もベクトルと呼んでいきます。j_A, j_B が固定されているとします。$|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ によって張られる有限次元ベクトル空間を作り (m_A, m_B がベクトルを区別する)、そのベクトル空間を V_A, V_B と呼ぶことにします。V_A, V_B の次元は m_A, m_B の数なので、$2j_A + 1, 2j_B + 1$ 次元です。例えばベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と $|j, m\rangle$ は

$$|j, -j\rangle, |j, -j+1\rangle, \cdots, |j, +j\rangle$$

であることを対応させればいいです。

ベクトル空間の基底になれることを簡単に言っておきます (エルミート演算子の固有ベクトルは正規直交系というだけです)。$|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ はエルミート演算子の固有ベクトルなので、m_A, m_B による正規直交系になっていて

$$\langle j_A, m_A | j_A, m'_A \rangle = \delta_{m_A m'_A} \ , \ \langle j_B, m_B | j_B, m'_B \rangle = \delta_{m_B m'_B}$$

を持ちます (直交性から線形独立)。そして、V_A, V_B 上の任意のベクトルは正規直交系の線形結合で書けます ($|\psi\rangle = \Sigma c_n |\phi_n\rangle$)。というわけで、これらは正規直交系 (正規直交基底) で、それぞれのベクトル空間における基底ベクトルとなります。

　次に、2 つの異なるベクトル空間 V_A, V_B における基底ベクトル $|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ から作られる新しいベクトル空間 $V = V_A \otimes V_B$ における基底ベクトルを

$$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = |j_A, m_A\rangle \otimes |j_B, m_B\rangle$$

と書きます (m_A, m_B が基底ベクトルの区別をしている)。左辺は m_A, m_B によって指定される V の基底ベクトルとなっています。$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ がいるベクトル空間 V の次元は $(2j_A+1)(2j_B+1)$ です ($m_{A,B}$ の個数は $2j_{A,B}+1$ だから)。

　このようになっていることが分かると、(2) のような

$$\sum_{m_A, m_B} C(m_A, m_B) |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(m_A, m_B) |j_A, m_A\rangle \otimes |j_B, m_B\rangle \tag{10}$$

という形が、ベクトル空間 V での基底ベクトル $|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ による線形結合になっているのがはっきりします。

　次にこの $|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ に作用する演算子を見てみます。$|j_A, m_A\rangle$ に作用する $\boldsymbol{A}$ と、$|j_B, m_B\rangle$ に作用する $\boldsymbol{B}$ は、異なったベクトル空間で定義されています。そのため

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

という演算子は作れませんし (異なるベクトル空間の和は定義されていない)、$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ のベクトル空間での演算子にもなっていません。これを回避するために、$|j_A, m_A\rangle$ での恒等演算子 I_A と、$|j_B, m_B\rangle$ での恒等演算子 I_B によって

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} \otimes I_B + I_A \otimes \boldsymbol{B} \tag{11}$$

とします (こう書いても $\boldsymbol{J}$ の交換関係は変わらなく、角運動量演算子の交換関係を作る)。恒等演算子はようはそのベクトル空間での 1 なので、1 とテンソル積を取ることで $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の意味を変えずに $|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ のベクトル空間での演算子にしています。このように考えることで

$$\boldsymbol{A}^2 \otimes I_B |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar^2 j_A(j_A+1) |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

$$A_3 \otimes I_B |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar m_A |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

$$I_A \otimes \boldsymbol{B}^2 |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar^2 j_B(j_B+1) |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

$$I_A \otimes B_3 |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle = \hbar m_B |j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$$

となります。$I_{A,B}$ は何も寄与しないので $\boldsymbol{A}^2, A_3, \boldsymbol{B}^2, B_3$ がそれぞれの $|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ にのみ作用します。

ここまでの情報を簡単にまとめて言っておきます。$|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ はそれぞれのベクトル空間 V_A, V_B で正規直交基底を構成していて、基底になっています。そのため、この基底ベクトルのテンソル積で作られる $|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ がベクトル空間 $V = V_A \otimes V_B$ での基底ベクトルになります。

今度は $\boldsymbol{J}$ の作用の仕方が、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の $|j_A, m_A\rangle, |j_B, m_B\rangle$ への作用の仕方と同じになっている $|j_A, j_B; j, m\rangle$ というベクトルを考えます。$\boldsymbol{J}$ は (11) で触れたようにベクトル空間 V の演算子なので、$|j_A, j_B; j, m\rangle$ も V にいて、V の基底になっていると考えられます ($\boldsymbol{J}$ が $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ と同じ作用の仕方をするためには正規直交基底でないといけない)。$|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ が m_A, m_B で指定されるのと同じように、$|j_A, j_B; j, m\rangle$ は j, m で指定されるとします。これを展開係数を $C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m)$ として基底ベクトル $|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ で展開すると

$$|j_A, j_B; j, m\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \tag{12}$$

左辺は基底ベクトル $|j_A, j_B; j, m\rangle$、右辺は $(2j_A+1)(2j_B+1)$ 個の基底ベクトル $|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ の線形結合になっています (こういった事情から (2) の展開が可能になっている)。つまり、基底ベクトルの変換の式になっています。

この状況は、2 次元ベクトル空間での基底ベクトルでの話を見ると分かりやすいです。2 次元ベクトル空間でのデカルト座標を極座標に変換することを考えます。そのとき基底ベクトルの変換は、デカルト座標での基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$、極座標での基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ とすれば

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \cos\theta + \boldsymbol{e}_y \sin\theta \ , \ \boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_x \sin\theta + \boldsymbol{e}_y \cos\theta$$

となっています。これは (12) と同じ構造になっているのが分かると思います (右辺が基底ベクトルの線形結合で、左辺が新しい基底ベクトルのうちのどれか)。

ベクトル空間の視点から見てきましたが、結局言いたいことは、$|j_A, j_B; j, m\rangle$ と $|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle$ が同じ $(2j_A+1)(2j_B+1)$ 次元のベクトル空間 V にいるということです。そして、(12) がベクトル空間 $V = V_A \otimes V_B$ における基底ベクトルの変換の式と見ることで、話が分かりやすくなります。

例えば、$m = m_{max} - 1$ を見てみます ((8) と同じ状況)。和は m_A, m_B の取れる範囲 $-j_{A,B} \leq m_{A,B} \leq j_{A,B}$ に対して

$$\begin{aligned}
|j_A, j_B; j, m_{max}-1\rangle &= \sum_{m_A, m_B} C(j_A, j_B, j, m_A, m_B, m_{max}-1)|j_A, m_A; j_B, m_B\rangle \\
&= C_1|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + C_1'|j_A, j_A-2; j_B, j_B\rangle + \cdots + C_2|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle + \cdots
\end{aligned}$$

と続いています。しかし、クレブシュ・ゴルダン係数には $m = m_A + m_B$ のとき以外は 0 になるという条件があります。そのため

$$|j_A, j_B; j, m_{max}-1\rangle = C_1|j_A, j_A-1; j_B, j_B\rangle + C_2|j_A, j_A; j_B, j_B-1\rangle$$

となります。これは例えば、3 次元での線形結合において、$z = 0$ の制限を入れて

$$\boldsymbol{e}' = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \ \Rightarrow \ \boldsymbol{e}' = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{0} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y \quad (z = 0)$$

としているのと同じです。これは 3 次元での成分のうち z 成分を 0 にしているために、x, y による 2 次元に制限されています ($(x, y, z) = (x, y, 0) \ \to (x, y)$)。そうすると、この $z = 0$ での $\boldsymbol{e}'$ に直交するベクトルは 1 個しか作れま

せん ($(a,b,0)$ に直交する $(0,0,c)$ というベクトルは $z=0$ の制限のために意味がないので、2 次元上で直交するベクトル 1 個のみ)。

同様に考えることで、$m=m_{max}-1$ と選んだことによって $(2j_A+1)(2j_B+1)$ 次元から 2 次元に制限された $|j_A,j_B;j,m_{max}-1\rangle$ に直交するベクトルも 1 個しかないことになります。後は (8) と同じ計算をしていけば直交しているベクトルが求まります。

このようにして、ベクトル空間 V の次元を制限して、直交性から各行の一番左端を求めていったのが、表 1 です (正確には各行の一番左端の状態は、直交している状態の中から J_+ を作用させせると 0 になるものを選んでいる)。そして、表の各列のベクトルの個数は (12) でのクレブシュ・ゴルダン係数が 0 でない項の数と一致しています。これは、N 次元において、直交するベクトル (基底ベクトル) の数は N 個、基底ベクトルによる線形結合の項の数は N 個というのに対応した結果です。

ここまで来ると、j の最小値が $j_{min}=|j_A-j_B|$ であることが簡単に分かります。まず、基底ベクトル $|j_A,j_B;j,m\rangle$ は $(2j_A+1)(2j_B+1)$ 次元のベクトル空間にいることから、$|j_A,j_B;j,m\rangle$ の j,m で区別される個数はベクトル空間の次元と合っていなければならないです。よって、$|j_A,j_B;j,m\rangle$ は $(2j_A+1)(2j_B+1)$ 個あります。

これとは別に、取りあえず表 1 は作れているとして、表に現れている $|j_A,j_B;j,m\rangle$ の個数を数えてみます。表 1 もしくは (4) から分かるように

$$
\begin{aligned}
|j_A,j_B;j_{max},j_{max}\rangle,\dots,|j_A,j_B;j_{max},-j_{max}\rangle &: 2j_{max}+1 \text{ 個}\\
|j_A,j_B;j_{max}-1,j_{max}-1\rangle,\dots,|j_A,j_B;j_{max}-1,-(j_{max}-1)|\rangle &: 2(j_{max}-1)+1 \text{ 個}\\
&\vdots\\
|j_A,j_B;j_{min},j_{min}\rangle,\dots,|j_A,j_B;j_{min},-j_{min}\rangle &: 2j_{min}+1 \text{ 個}
\end{aligned}
$$

という個数になっています。これを全部足せば総数になるので、ただの等差数列の和によって

$$
\begin{aligned}
(2j_{max}&+1)+(2(j_{max}-1)+1)+\cdots(2j_{min}+1)\\
&=\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}}(2j+1)\\
&=\frac{2j_{min}+1+2j_{max}+1}{2}(j_{max}-j_{min}+1)\\
&=j_{max}^2-j_{min}^2+j_{max}+j_{min}+j_{max}-j_{min}+1\\
&=j_{max}(j_{max}+2)-j_{min}^2+1
\end{aligned}
$$

これが

$$
\begin{aligned}
(2j_A+1)(2j_B+1)&=4j_Aj_B+2j_A+2j_B+1\\
&=(j_A+j_B)^2-j_A^2-j_B^2+2j_Aj_B+2j_A+2j_B+1\\
&=j_{max}^2-j_A^2-j_B^2+2j_Aj_B+2j_{max}+1\\
&=j_{max}^2-(j_A-j_B)^2+2j_{max}+1
\end{aligned}
$$

と一致している必要があるので

$$j_{max}^2 + 2j_{max} - j_{min}^2 + 1 = j_{max}^2 - (j_A - j_B)^2 + 2j_{max} + 1$$
$$j_{min}^2 = (j_A - j_B)^2$$
$$j_{min} = |j_A - j_B|$$

j は 0 以上なので、絶対値にしています。というわけで、j の範囲は

$$j_A + j_B, j_A + j_B - 1, \ldots, |j_A - j_B|$$

となり、上で求めた結果と一致します。