

ラザフォード散乱～スピン偏極～

電子にはスピンがあり、その向きによって分けることができるので、始状態と終状態でのスピンの方向がどちらを向いているのか考慮しなければいけません。それを「ラザフォード散乱」での微分断面積に加えます

一般的な実験において、入射してくる電子のスピンは偏極(同じ方向に揃うこと)していません。なので、入射電子に対してはスピンの平均をとり、散乱された電子では和をとることにします。これは、入射電子のスピンがどちらの方向を向いているのかは同じ確率なので平均をとってやり、散乱された電子はどちらを向くのかわからないので、全確率として全ての和をとるということです。

というわけで、こういったことを式に組み込んで

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{s_f, s_i} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i)|^2$$

1/2 は入射電子のスピンを平均をとるものです。絶対値部分がスピンの方向を担っている部分で

$$\begin{aligned} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i)|^2 &= \bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i) (\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i))^\dagger \\ &= \bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i) u^\dagger(p_i, s_i) \gamma_0^\dagger (u^\dagger(p_f, s_f) \gamma_0)^\dagger \\ &= \bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i) u^\dagger(p_i, s_i) \gamma_0 \gamma_0 u(p_f, s_f) \\ &= \bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i) \bar{u}(p_i, s_i) \gamma_0 u(p_f, s_f) \\ &= u^\dagger(p_f, s_f) \gamma_0 \gamma_0 u(p_i, s_i) u^\dagger(p_i, s_i) \gamma_0 \gamma_0 u(p_f, s_f) \\ &= u^\dagger(p_f, s_f) u(p_i, s_i) u^\dagger(p_i, s_i) u(p_f, s_f) \end{aligned}$$

これのスピンの状態に対して和を取ります。

相対的量子力学の「ディラック方程式の解～別解～」での(規格化の選び方で変わること)に注意。場の量子論の「ディラック方程式の解とスピン」参照)

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \frac{\gamma_\mu p^\mu + m}{2m}$$

を使います ($u(p, s)$ は $\omega^{1,2}$ のこと)。 s は2つのスピンの区別なので、 $s = 1, 2$ としています。スピノールの行列成分を a, b で表すと

$$\sum_{s=1}^2 u_a(p, s) \bar{u}_b(p, s) = \left(\frac{\gamma_\mu p^\mu + m}{2m} \right)_{ab}$$

行列の成分表示では位置は動かして問題ないことから

$$\begin{aligned}
\sum_{s_f, s_i} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i)|^2 &= \sum_{s_f, s_i} \bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i) \bar{u}(p_i, s_i) \gamma_0 u(p_f, s_f) \\
&= \sum_{s_f} \sum_{a, b, c, d} \bar{u}_c(p_f, s_f) (\gamma_0)_{ca} \left(\sum_{s_i} u(p_i, s_i)_a \bar{u}(p_i, s_i)_b \right) (\gamma_0)_{bd} u_d(p_f, s_f) \\
&= \sum_{s_f} \sum_{a, b, c, d} u_d(p_f, s_f) \bar{u}_c(p_f, s_f) (\gamma_0)_{ca} \left(\frac{\gamma_\mu p_i^\mu + m}{2m} \right)_{ab} (\gamma_0)_{bd} \\
&= \sum_{a, b, c, d} \left(\frac{\gamma_\mu p_f^\mu + m}{2m} \right)_{dc} (\gamma_0)_{ca} \left(\frac{\gamma_\mu p_i^\mu + m}{2m} \right)_{ab} (\gamma_0)_{bd}
\end{aligned}$$

$|\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i)|^2$ はスカラーなので当たり前ですが、 $d \times d$ 行列のトレース (対角和) になり

$$\sum_{s_f, s_i} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i)|^2 = \text{tr} \left[\gamma_0 \frac{\gamma_\mu p_i^\mu + m}{2m} \gamma_0 \frac{\gamma_\nu p_f^\nu + m}{2m} \right]$$

後はこのトレースの計算すれば、スピン偏極を考えた微分断面積を求められます。しかし、トレース計算が QED の計算のとんでもなく面倒な部分です。ガンマ行列のトレースは相対論的量子力学の「ガンマ行列の内積とトレース」にまとめています。

ここでのトレースはスピノール成分に対してということに注意してください。ミンコフスキー空間の添え字は無関係です。例えば、計量 $g_{\mu\nu}$ はこのトレースに引っかからず、トレースの外に出ます。ディラック方程式はミンコフスキー空間による行列成分とスピノールによる行列成分の 2 つを持っていることには、注意しておくといいいです。

トレースの中は

$$\begin{aligned}
\gamma_0 \frac{\gamma_\mu p_i^\mu + m}{2m} \gamma_0 \frac{\gamma_\nu p_f^\nu + m}{2m} &= \frac{1}{4m^2} (\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 p_i^\mu + (\gamma_0)^2 m) (\gamma_\nu p_f^\nu + m) \\
&= \frac{1}{4m^2} (\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 p_i^\mu + m) (\gamma_\nu p_f^\nu + m) \quad ((\gamma_0)^2 = 1) \\
&= \frac{1}{4m^2} (\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu p_i^\mu p_f^\nu + \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 p_i^\mu m + \gamma_\nu p_f^\nu m + m^2) \\
&= \frac{1}{4m^2} (\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu p_i^\mu p_f^\nu - \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_0 p_i^\mu m + \gamma_\nu p_f^\nu m + m^2)
\end{aligned}$$

奇数個のガンマ行列のトレースは 0 なので

$$\text{tr} \left[\gamma_0 \frac{\gamma_\mu p_i^\mu + m}{2m} \gamma_0 \frac{\gamma_\nu p_f^\nu + m}{2m} \right] = \frac{p_i^\mu p_f^\nu}{4m^2} \text{tr} [\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu] + \frac{1}{4} \text{tr} 1 = \frac{p_i^\mu p_f^\nu}{4m^2} \text{tr} [\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu] + 1$$

第 1 項は

$$\text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta})$$

から

$$\begin{aligned}
\frac{p_i^\mu p_f^\nu}{4m^2} \text{tr}[\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu] &= \frac{p_i^\mu p_f^\nu}{m^2} (g_{0\mu} g_{0\nu} + g_{0\nu} g_{\mu 0} - g_{00} g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{m^2} (p_i^0 p_f^0 + p_i^0 p_f^0 - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f) \\
&= \frac{1}{m^2} (2E_i E_f - (E_i E_f - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f)) \\
&= \frac{1}{m^2} (E_i E_f + \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f)
\end{aligned}$$

となります。

この結果を入れることで微分断面積は

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega_f} &= \frac{4Z^2 \alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4} \sum_{s_f, s_i} \frac{1}{2} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_0 u(p_i, s_i)|^2 \\
&= \frac{2Z^2 \alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4} \text{tr}[\gamma_0 \frac{\gamma_\mu p_i^\mu + m}{2m} \gamma_0 \frac{\gamma_\nu p_f^\nu + m}{2m}] \\
&= \frac{2Z^2 \alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4} (\frac{1}{m^2} (E_i E_f + \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f) + 1) \\
&= \frac{2Z^2 \alpha^2}{|\mathbf{q}|^4} (E_i E_f + (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f) + m^2) \tag{1}
\end{aligned}$$

一般的に微分断面積には、散乱角 θ を使った場合が使われるので、そちらに変形します。散乱角 θ は入射してくる運動量と散乱後の運動量の間角なので、

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f &= |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f| \cos \theta = |\mathbf{p}|^2 (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\
&= |\mathbf{p}|^2 (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\
&= \beta^2 E^2 (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \tag{2}
\end{aligned}$$

倍角の公式を使い、エネルギー保存 $E_i = E_f = E$ から $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}|$ とし、 $|\mathbf{p}| = |\mathbf{v}|E = \beta E$ としています (c を 1 にしなければ $c|\mathbf{p}|/E = |\mathbf{v}|/c$ のため)。また、 $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|$ は

$$|\mathbf{q}| = 2|\mathbf{p}| \sin \frac{\theta}{2} \tag{3}$$

これは $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$ から、 $\mathbf{q}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f$ の作るベクトルは \mathbf{q} を底辺とする二等辺三角形になるからです。

(1) に (2),(3) を使って

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega_f} &= \frac{2Z^2\alpha^2}{(2|\mathbf{p}|\sin\frac{\theta}{2})^4} (E^2 + \beta^2 E^2(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}) + m^2) \\
&= \frac{Z^2\alpha^2}{8\beta^4 E^4 \sin^4\frac{\theta}{2}} (E^2 + \beta^2 E^2(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}) + E^2 - \beta^2 E^2) \\
&= \frac{Z^2\alpha^2}{8\beta^4 E^4 \sin^4\frac{\theta}{2}} (2E^2 - 2\beta^2 E^2 \sin^2\frac{\theta}{2}) \\
&= \frac{Z^2\alpha^2(1 - \beta^2 \sin^2\frac{\theta}{2})}{4\beta^4 E^2 \sin^4\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{Z^2\alpha^2(1 - \beta^2 \sin^2\frac{\theta}{2})}{4\beta^2 |\mathbf{p}|^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

この相対論的なラザフォード散乱の結果を Mott の散乱公式と言います。また、 q を使って書くと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2\alpha^2 E^2}{|q|^4} - \frac{4Z^2\alpha^2 E^2 \beta^2}{|q|^4} \sin^2\frac{\theta}{2}$$

右辺の第 1 項はラザフォードの散乱公式に相当する部分、第 2 項はスピンによる磁場の影響に相当します。このように、ディラック粒子がスピンを持つために磁場による散乱部分が現れてきます。

非相対論な極限を取ってみます。そのために、 β を 0 の極限にとればいいので (β は光速 c を 1 にしなければ $|v|/c$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{Z^2 e^4}{4\beta^2 |\mathbf{p}|^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}$$

となって磁場の影響が消え、ラザフォードの散乱公式になります。つまり、光速に比べて十分遅ければ磁場の影響は無視される程度になり、電場による影響が強く現われることになります。

電子でのラザフォード散乱を考えてきましたが、陽電子でもほぼ同じです。陽電子での S 行列には負エネルギー電子での

$$S = ie \int d^4x \bar{\phi}_f(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi_i(x)$$

を使います。負エネルギー電子が入射電子として時間を逆行しながら進むことは、陽電子が正エネルギーをもって通常の時間で進むことに対応させているからです。このため、平面波の波動関数は

$$\begin{aligned}
\phi_i(p_f, s_f) &= \sqrt{\frac{m}{E_f V}} v(p_f, s_f) \exp[ip_f \cdot x] \\
\phi_f(p_i, s_i) &= \sqrt{\frac{m}{E_i V}} v(p_i, s_i) \exp[ip_i \cdot x]
\end{aligned}$$

として、始状態に終状態のエネルギーと運動量、終状態に始状態のエネルギーと運動量がある奇妙な式になります。 v は負エネルギー解に対応するスピノールです。

これらを S 行列に入れれば

$$S = -i \frac{Z\alpha}{V} \sqrt{\frac{m^2}{E_i E_f}} \bar{v}(p_i, s_i) \gamma^0 v(p_f, s_f) \int d^4x \frac{1}{|\mathbf{x}|} \exp[i(p_f - p_i) \cdot x]$$

これは電子のときと比べて、全体の符号がマイナスに、 u が v に、 i と f が逆になっています。これら以外は変更されていないので、単純な置き換えですみます。また、全体の符号が変わっても S^2 を計算するので影響しません。というわけで、微分断面積は置き換えることで

$$\frac{d\sigma^+}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{s_f, s_i} |\bar{v}(p_i, s_i) \gamma^0 v(p_f, s_f)|^2$$

スピンの和を取るときには、 u でなく v の関係を使うことになり

$$\sum_{s=3}^4 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \frac{\gamma^\mu p_\mu - m}{2m}$$

スピンの和を $s = 3, 4$ としているのは、 $\omega^{3,4}$ に対応させているだけです。スピンの和で変更されるのはこれだけなので、

$$\frac{d\sigma^+}{d\Omega} = \frac{2Z^2\alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{4m^2} \text{tr}[\gamma^0 (\gamma_\nu p_f^\nu - m) \gamma^0 (\gamma_\mu p_i^\mu - m)]$$

トレースの巡回性から

$$\frac{d\sigma^+}{d\Omega} = \frac{2Z^2\alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{4m^2} \text{tr}[\gamma^0 (\gamma_\mu p_i^\mu - m) \gamma^0 (\gamma_\nu p_f^\nu - m)]$$

質量の符号が異なっていますが、そこは寄与しないので (1) と同じになります。古典論でもクーロンポテンシャルによる散乱での微分断面積は電荷の \pm に無関係になっているので、この結果は正しいと言えます。ただし、今は最低次での計算であって、より高次のオーダーでは結果がズレます。