くり込み〜頂点補正〜

頂点補正の積分を実行します。ここで、電荷のくり込みの話がまとまります。
ここでは積分を最後まで計算してなく、続きは「電子の g 因子」で行っています。

頂点補正はファインマン図の形から分かるように頂点に関連するものです。これはディラック方程式のカレントに補正が加わることを意味しています。これが異常磁気モーメントと呼ばれるものとなって電子の g 因子に現われ、2 からのズレを作ります。
頂点補正は頂点部分に対する補正として

$$-ie\Lambda_\mu(p',p) = -ie\gamma_\mu - ie\Gamma_\mu(p',p)$$

と表せ、$\Gamma_\mu(p',p)$ が頂点補正の関数で

$$\Gamma_\mu(p',p) = -i4\pi\kappa_e e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2+i\epsilon}\gamma^\nu\frac{1}{(p'-k)^\alpha\gamma_\alpha-m+i\epsilon}\gamma_\mu\frac{1}{(p-k)^\beta\gamma_\beta-m+i\epsilon}\gamma_\nu$$

これも「くり込み〜イントロ〜」で示した不変振幅部分から抜き出しています。この積分は対数発散します。また、仮想光子の質量 μ を導入しているように、赤外発散を起こしています。この赤外発散は「赤外発散」で触れます。
積分を行う前に電荷のくり込みを見ておきます。まず、Γ_μ を分解し

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(p',p) &= \Gamma_\mu(p,p) + (\Gamma_\mu(p',p) - \Gamma_\mu(p,p))\\ &= \Gamma_\mu(p,p) + \Gamma^R_\mu(p',p)\end{aligned}$$

この変形は、$\Gamma_\mu(p',p)$ から $q = p'-p = 0$ という前方散乱 (運動量移動のない散乱) に相当する部分を引くことで発散しない $\Gamma^R_\mu(p',p)$ を取り出しています。前方散乱部分は $p' = p$ なので、$\Gamma_\mu(p,p)$ として p のみに依存します。前方散乱にするのは、有限部分が分離できるからというだけでなく、電荷の測定実験は運動量の移動が少ない状況で行われるからです。
これで $\Gamma_\mu(p',p)$ から有限の部分を切り離せることを見ておきます。頂点補正の分母に p' がいる部分を

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(p'-k)^\alpha\gamma_\alpha-m+i\epsilon}\\ &=\frac{1}{p^\alpha\gamma_\alpha-k^\alpha\gamma_\alpha-m+(p'-p)^\alpha\gamma_\alpha+i\epsilon}\\ &=\frac{1}{p^\alpha\gamma_\alpha-k^\alpha\gamma_\alpha-m+i\epsilon}-\frac{1}{p^\alpha\gamma_\alpha-k^\alpha\gamma_\alpha-m+i\epsilon}(p'-p)^\beta\gamma_\beta\frac{1}{p^\mu\gamma_\mu-k^\mu\gamma_\mu-m+i\epsilon}+\cdots\end{aligned}$$

と展開します。これを頂点補正の式に入れれば、第 1 項での k 積分は発散します。第 2 項以降では、k の数が増えるために、積分しても発散せずに収束します。このことと、$p' = p$ で第 2 項以降は消えることから、発散していない第 2 項以降が Γ^R_μ に対応します。

相対論的量子力学での「ゴルドン分解」でのゴルドン分解から

$$\overline{u}'(p')\gamma_\mu u(p) = \frac{1}{2m}\overline{u}'(p')[(p+p')_\mu + i\sigma_{\mu\nu}(p'-p)^\nu]u(p) \quad (\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu])$$

$p'-p=0$ では p_μ 部分しか残らないことと、Γ_μ も同様に u に挟まれてファインマン図に出てくることから、$\Gamma_\mu(p,p)$ は $\sigma_{\mu\nu}$ の項を持たずに γ_μ の項だけと考えて

$$\Gamma_\mu(p,p) = L\gamma_\mu$$

L は発散してます。そうすると、$-ie\gamma_\mu$ への寄与は、有限部分は無視して

$$-ie\gamma_\mu - ieL\gamma_\mu = -ie\gamma_\mu(1+L)$$

これから、電荷のくり込みは $Z_1^{-1}e$ になるとして、このときのくり込み定数 Z_1 は

$$Z_1 = (1+L)^{-1} \simeq 1-L$$

と与えます。逆数にしている理由は後でわかります。真空偏極、自己エネルギー、頂点補正によるくり込み定数を全て使えば、電荷のくり込みは

$$e^R = Z_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}e$$

しかし、これから求めるように、$Z_1 = Z_2$ なので Z_3 のみが残ります。

Z_1 と Z_2 の関係を求めます。そのために、電子の伝播関数を使います。電子の伝播関数は

$$S_F(p) = \frac{1}{p^\mu\gamma_\mu - m + i\epsilon}$$

これの逆 $S_F^{-1}(p)$ が存在するとして、$S_FS_F^{-1} = 1$ を p^μ で微分すると

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial p^\mu}S_FS_F^{-1} \\
&= \frac{\partial S_F}{\partial p^\mu}S_F^{-1} + S_F\frac{\partial}{\partial p^\mu}(p^\nu\gamma_\nu - m) \\
&= \frac{\partial S_F}{\partial p^\mu}S_F^{-1} + S_F\gamma_\mu = 0 \\
\frac{\partial S_F}{\partial p^\mu} &= -S_F\gamma_\mu S_F
\end{aligned}$$

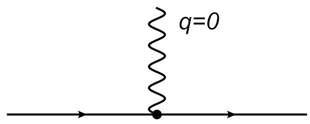

図 1

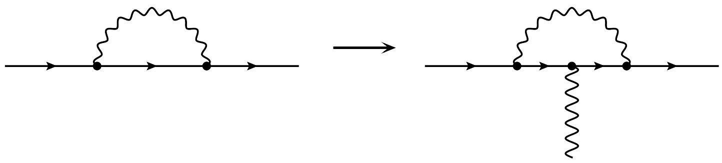

図 2

右辺は左右に伝播関数があり、真ん中にガンマ行列がいることから、図 1 のようになります。QED では頂点から電子の伝播関数が 2 個と光子の伝播関数が 1 個出てくるので、光子の伝播関数も書き、運動量の移動がないので $q^\mu = 0$ としています。つまり、電子の伝播関数を微分すると、頂点が現れます。

このことを自己エネルギーに使うと、自己エネルギーと頂点補正の関係が

$$-\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p) = \Gamma_\mu(p,p)$$

となるのが分かり (ちゃんとした導出は省きます)、図 2 になります。微分による自己エネルギーと頂点補正の関係をワード恒等式 (Ward identity) と呼びます。ここでは導出を省いているので分かりませんが、ゲージ不変性の要求の結果導かれる重要な関係式です。

Σ は

$$\Sigma(p) = A + B(p^\mu\gamma_\mu - m) + \Sigma^R(p^\mu\gamma_\mu - m)^2$$

として微分すれば

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu(p,p) = L\gamma_\mu &= -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p) \\
&= -\frac{\partial}{\partial p^\mu}(A + B(p^\mu\gamma_\mu - m) + \Sigma^R(p^\mu\gamma_\mu - m)^2) \\
&= -B\gamma_\mu - \frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^R(p^\mu\gamma_\mu - m)^2
\end{aligned}$$

on shell 条件を入れると第 2 項は消えるので $L = -B$ となり、くり込み定数 Z_1 は

$$Z_1 = (1+L)^{-1} \simeq 1 - L = 1 + B \quad (Z_2 = 1 + B)$$

これから、Z_1 と Z_2 は同じです。よって

$$e^R = Z_1^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3} e = \sqrt{Z_3} e$$

このように Z_1, Z_2 の寄与をなくすために Z_1 を逆数にしています。なぜなら、観測可能な物理量に実在しない μ とゲージの選択による曖昧さがあるはずないからです。くり込み定数 Z_1, Z_2 は仮想光子の質量 μ とゲージの選択による曖昧さがあるのに対して、Z_3 は μ を含まず、ゲージ不変になるように作ったので、そういう曖昧さはありません。なので、真空偏極で触れたように、実験的な電荷は真空偏極の効果だけで問題ないことになります。また、電荷のくり込みは全ての荷電粒子に対して成り立つもので電子だろうと陽子もしくは反粒子だろうとも同じです。

ここからは積分を実行していきます。状況を少し簡単にします。$\Gamma_\mu(p', p)$ は、$\overline{u}'(p')\Gamma_\mu(p', p)u(p)$ のようにスピノールに挟まれた形で現われます。このため、電子の外線に on shell 条件

$$\overline{u}'(p')(p'^\mu \gamma_\mu - m) = 0 \ , \ (p^\mu \gamma_\mu - m)u(p) = 0$$

があると簡単になります。これらによって、式の左端に $p'^\mu \gamma_\mu$ があれば m、右端に $p^\mu \gamma_\mu$ があれば m に置き換えられます ($p^2 = m^2, \ p'^2 = m^2$)。

ガンマ行列の計算をしてきます。分母にガンマ行列がいないようにして

$$\begin{aligned}
&\gamma^\nu \frac{1}{(p'-k)^\alpha \gamma_\alpha - m} \gamma_\mu \frac{1}{(p-k)^\beta \gamma_\beta - m} \gamma_\nu \\
&= \frac{\gamma^\nu ((p'-k)^\alpha \gamma_\alpha + m) \gamma_\mu ((p-k)^\beta \gamma_\beta + m) \gamma_\nu}{[(p'-k)^2 - m^2][(p-k)^2 - m^2]} \\
&= \frac{(p'^\alpha \gamma^\nu \gamma_\alpha - k^\alpha \gamma^\nu \gamma_\alpha + m\gamma^\nu) \gamma_\mu (p^\beta \gamma_\beta \gamma_\nu - k^\beta \gamma_\beta \gamma_\nu + m\gamma_\nu)}{(k^2 - 2p' \cdot k)(k^2 - 2p \cdot k)} \\
&= \frac{(2p'^\nu - p'^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\nu - 2k^\nu + k^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\nu + m\gamma^\nu) \gamma_\mu (2p^\nu - \gamma_\nu p^\beta \gamma_\beta - 2k_\nu + k^\beta \gamma_\nu \gamma_\beta + m\gamma_\nu)}{(k^2 - 2p' \cdot k)(k^2 - 2p \cdot k)} \\
&= \frac{(2(p'-k)^\nu + (-p'^\alpha \gamma_\alpha + k^\alpha \gamma_\alpha + m)\gamma^\nu) \gamma_\mu (2(p-k)_\nu + \gamma_\nu (-p^\beta \gamma_\beta + k^\beta \gamma_\beta + m))}{(k^2 - 2p' \cdot k)(k^2 - 2p \cdot k)} \\
&= \frac{(2(p'-k)^\nu + k_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\nu) \gamma_\mu (2(p-k)_\nu + k^\beta \gamma_\nu \gamma_\beta)}{(k^2 - 2p' \cdot k + i\epsilon)(k^2 - 2p \cdot k + i\epsilon)}
\end{aligned}$$

ガンマ行列の関係から

$$p^\alpha \gamma^\nu \gamma_\alpha + p^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\nu = 2p_\mu g^{\nu\mu}$$

としています。分子は p' は左端、p は右端にくるように変形させて

$$
\begin{aligned}
2(p'-k)^\nu k^\beta \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta &= 2(p'-k)^\nu k^\beta (2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_\beta \\
&= 4p'_\mu k^\beta \gamma_\beta - 2mk^\beta \gamma_\mu\gamma_\beta - 4k_\mu k^\beta\gamma_\beta + 2k^\nu k^\beta \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\beta \\
&= 4(p'-k)_\mu k^\beta\gamma_\beta + 2k^\nu k^\beta\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\beta - 2mk^\beta\gamma_\mu\gamma_\beta \\
&= 4(p'-k)_\mu k^\beta\gamma_\beta + 2k^\nu k^\beta\gamma_\nu(2g_{\mu\beta} - \gamma_\beta\gamma_\mu) - 2mk^\beta\gamma_\mu\gamma_\beta \\
&= 4(p'-k)_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + 4k_\mu k^\alpha\gamma_\alpha - 2k^2\gamma_\mu - 2mk^\alpha\gamma_\mu\gamma_\alpha
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
2(p-k)_\nu k_\alpha \gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma_\mu &= 2(p-k)^\nu k_\alpha\gamma^\alpha(2g_{\nu\mu} - \gamma_\mu\gamma_\nu) \\
&= 4(p-k)_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + 2k^\alpha k^\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu - 2mk^\alpha\gamma_\alpha\gamma_\mu \\
&= 4(p-k)_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + 4k_\mu k^\alpha\gamma_\alpha - 2k^2\gamma_\mu - 2mk^\alpha\gamma_\alpha\gamma_\mu
\end{aligned}
$$

残りの項は

$$
\begin{aligned}
& k_\alpha k^\beta\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta = -2k_\alpha k^\beta\gamma^\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta = -4k_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + 2k^2\gamma_\mu \\
& 4(p'-k)^\nu(p-k)_\nu\gamma_\mu
\end{aligned}
$$

これらから

$$
\begin{aligned}
& 4(p'-k)_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + 4k_\mu k^\alpha\gamma_\alpha - 2k^2\gamma_\mu - 2mk^\alpha\gamma_\mu\gamma_\alpha \\
& \quad + 4(p-k)_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + 4k_\mu k^\alpha\gamma_\alpha - 2k^2\gamma_\mu - 2mk^\alpha\gamma_\alpha\gamma_\mu \\
& \quad - 4k_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + 2k^2\gamma_\mu + 4(p'-k)^\nu(p-k)_\nu\gamma_\mu \\
& = 4((p'+p-2k)_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + k_\mu k^\alpha\gamma_\alpha - \frac{k^2}{2}\gamma_\mu - mk^\alpha(\gamma_\mu\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\gamma_\mu) + (p'-k)^\nu(p-k)_\nu\gamma_\mu) \\
& = 4((p'+p-k)_\mu k^\alpha\gamma_\alpha + k_\mu k^\alpha\gamma_\alpha - \frac{k^2}{2}\gamma_\mu - mk_\mu + (p'-k)^\alpha(p-k)_\alpha\gamma_\mu)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu(p',p) =& -16\pi i\kappa_e e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu((p'-k)^\nu(p-k)_\nu - \frac{k^2}{2}) + (p'+p-k)_\mu k^\nu\gamma_\nu - mk_\mu}{(k^2-\mu^2)(k^2-2p'\cdot k)(k^2-2p\cdot k)} \\
=& -16\pi i\kappa_e e^2 \big(\gamma_\mu((p'-k)^\nu(p-k)_\nu - \frac{k^2}{2}) + (p'+p-k)_\mu k^\nu\gamma_\nu - mk_\mu\big) I \qquad (1)
\end{aligned}
$$

後の変形によって k 積分は I にしか寄与しなくなるので、I に入れてしまってます。

I の分数は exp に変えて

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\mu^2)(k^2-2p'\cdot k)(k^2-2p\cdot k)}\\ &= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\int_0^\infty d\alpha_3 \exp[i\alpha_1(k^2-\mu^2)+i\alpha_2(k^2-2p'\cdot k)+i\alpha_3(k^2-2p\cdot k)]\end{aligned}$$

$\exp[ik\cdot z]$ を

$$I = I_{z=0} = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \exp[i\alpha_1(k^2-\mu^2)+i\alpha_2(k^2-2p'\cdot k)+i\alpha_3(k^2-2p\cdot k)+iz\cdot k]\Big|_{z=0}$$

これに $\partial/\partial z$ を作用させると、$\exp[ik\cdot z]$ から ik_μ が外に出てきます。なので、(1) での I 以外の k_μ を $\partial/\partial z$ に置き換えることで、k 積分は I だけになります。

k 積分はガウス積分から

$$\begin{aligned}I &= i\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3\\ &\qquad \times \exp[i(k^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-2k(\alpha_2 p'+\alpha_3 p-\frac{z}{2})-\alpha_1\mu^2)]\\ &= \frac{i\pi^2}{16\pi^4}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \frac{1}{i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\exp\Big[\frac{-i(\frac{z}{2}-\alpha_2p'-\alpha_3p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big]\exp[-i\alpha_1\mu^2]\\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\exp\Big[\frac{-i(\frac{z}{2}-\alpha_2p'-\alpha_3p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big]\exp[-i\alpha_1\mu^2]\end{aligned}$$

$\partial/\partial z$ をこれに作用させると

$$\begin{aligned}&-i\frac{\partial}{\partial z_\mu}\exp\Big[\frac{-i(\frac{z}{2}-\alpha_2p'-\alpha_3p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-i\alpha_1\mu^2\Big]\Big|_{z=0}\\ &\quad= \frac{-(\frac{z}{2}-\alpha_2p'-\alpha_3p)^\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\exp\Big[\frac{-i(\frac{z}{2}-\alpha_2p'-\alpha_3p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-i\alpha_1\mu^2\Big]\Big|_{z=0}\\ &\quad= \frac{(\alpha_2p'+\alpha_3p)^\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\exp\Big[\frac{-i(-\alpha_2p'-\alpha_3p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-i\alpha_1\mu^2\Big]\end{aligned}$$

もう 1 回微分すれば

$$
\begin{aligned}
&-i\frac{\partial}{\partial z^\nu}\frac{-(\frac{z}{2}-\alpha_2 p'-\alpha_3 p)^\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\exp\Big[\frac{-i(\frac{z}{2}-\alpha_2 p'-\alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-i\alpha_1\mu^2\Big]\Big|_{z=0}\\
&=\frac{1}{2}\frac{ig^\mu{}_\nu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\exp\Big[\frac{-i(\frac{z}{2}-\alpha_2 p'-\alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-i\alpha_1\mu^2\Big]\Big|_{z=0}\\
&\quad+\frac{(\frac{z}{2}-\alpha_2 p'-\alpha_3 p)^\mu(\frac{z}{2}-\alpha_2 p'-\alpha_3 p)_\nu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\exp\big[\frac{-i(\frac{z}{2}-\alpha_2 p'-\alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-i\alpha_1\mu^2\big]\big|_{z=0}\\
&=\frac{1}{2}\frac{ig^\mu{}_\nu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\exp\big[\frac{-i(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-i\alpha_1\mu^2\big]\\
&\quad+\frac{(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)^\mu(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)_\nu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\exp\big[\frac{-i(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-i\alpha_1\mu^2\big]
\end{aligned}
$$

積分前では $\partial/\partial z$ から ik_μ が exp の外にでてくることから

$$
\begin{aligned}
k_\mu &\Leftrightarrow \frac{(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
k^\mu k_\nu &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{ig^\mu{}_\nu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\frac{(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)^\mu(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)_\nu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}
\end{aligned}
$$

と対応しています。よって、(1) では

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\mu((p'-k)^\nu(p-k)_\nu-\frac{k^2}{2})+(p'+p-k)_\mu k^\nu\gamma_\nu-mk_\mu\\
&=\gamma_\mu(p\cdot p'+k^2-p'\cdot k-p\cdot k-\frac{k^2}{2})+\gamma_\nu(p'_\mu k^\nu+p_\mu k^\nu-k_\mu k^\nu)-mk_\mu\\
&=\gamma_\mu(p\cdot p'-(p'+p)\cdot k+\frac{k^2}{2})+\gamma_\nu(p'_\mu+p_\mu-k_\mu)k^\nu-mk_\mu\\
&=\gamma_\mu(p\cdot p'-(p'+p)\cdot\frac{\alpha_2 p'+\alpha_3 p}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}+\frac{(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)^2}{2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}+\frac{i}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3})\\
&\quad+\gamma_\nu(p'_\mu+p_\mu-k_\mu)k^\nu-mk_\mu
\end{aligned}\tag{2}
$$

$\gamma_\nu(p'_\mu+p_\mu-k_\mu)k^\nu-mk_\mu$ では少し変形して置き換えます。

$f(\alpha_2,\alpha_3)$ が α_2 と α_3 の入れ替えに対して対称 $f(\alpha_2,\alpha_3)=f(\alpha_3,\alpha_2)$ なら

$$
\int_0^\infty d\alpha_2 d\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)f(\alpha_2,\alpha_3)=0
$$

となることを使います。示すのは簡単で

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty d\alpha_2 d\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)f(\alpha_2,\alpha_3) &= \int_0^\infty d\alpha_2 d\alpha_3\ \alpha_2 f(\alpha_2,\alpha_3) - \int_0^\infty d\alpha_2 d\alpha_3\ \alpha_3 f(\alpha_2,\alpha_3)\\
&= \int_0^\infty d\alpha_2 d\alpha_3\ \alpha_2 f(\alpha_2,\alpha_3) - \int_0^\infty d\alpha_2 d\alpha_3\ \alpha_3 f(\alpha_3,\alpha_2)\\
&= \int_0^\infty d\alpha_2 d\alpha_3\ \alpha_2 f(\alpha_2,\alpha_3) - \int_0^\infty d\alpha_3 d\alpha_2\ \alpha_2 f(\alpha_2,\alpha_3)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

となっているからです (例えば $f(\alpha_2,\alpha_3)=\alpha_2+\alpha_3$ のような対称な関数を使うと分かりやすい)。
　今の場合では

$$
(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu = (p'-p)_\mu(\alpha_2-\alpha_3) + (\alpha_3 p' + \alpha_2 p)_\mu = (\alpha_3 p' + \alpha_2 p)_\mu
$$

これと、式の左端と右端において $\gamma^\mu p'_\mu = \gamma^\mu p_\mu = m$ から、k^μ を書き換えると

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\nu(p'_\mu + p_\mu - k_\mu)k^\nu - mk_\mu\\
&= \gamma_\nu((p'+p)_\mu \frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)^\nu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - \frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)^\nu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i g^\nu{}_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3})\\
&\quad - m\frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= \gamma_\nu(m(p'+p)_\mu \frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - \frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)^\nu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3})\\
&\quad - m\frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= m\frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p' + \alpha_2 p + \alpha_3 p)_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - m\frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu(\alpha_2+\alpha_3)^\nu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&\quad - m\frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= m\frac{(\alpha_3 p' + \alpha_2 p)_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - m\frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= m\frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - m\frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= m\frac{(\alpha_1\alpha_3 p' + \alpha_1\alpha_2 p)_\mu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= \frac{m}{2}\frac{(\alpha_1\alpha_3 p' + \alpha_1\alpha_2 p + \alpha_1\alpha_3 p' + \alpha_1\alpha_2 p)_\mu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= \frac{m}{2}\frac{\alpha_1(\alpha_3 p' + \alpha_2 p)_\mu + \alpha_1(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)_\mu}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= \frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}
\end{aligned}
$$

というわけで、(2) は

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\mu(p\cdot p' - (p'+p)\cdot\frac{\alpha_2 p' + \alpha_3 p}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} + \frac{(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)^2}{2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} + \frac{i}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3})\\
&\quad + \frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} - \frac{1}{2}\frac{i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\
&= \gamma_\mu(p\cdot p' - \frac{1}{2}(p'+p)^2\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2 - \alpha_2\alpha_3 q^2}{2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} + \frac{i}{2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3})\\
&\quad + \frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}
\end{aligned}
$$

$p'^2 = p^2 = m^2$ から

$$
\begin{aligned}
(\alpha_2 p' + \alpha_3 p)^2 &= p'^2\alpha_2 + p^2\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3 p'\cdot p\\
&= p'^2\alpha_2 + p^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3[p'^2 + p^2 - (p'-p)^2]\\
&= m^2(\alpha_2+\alpha_3) + 2\alpha_2\alpha_3(m^2 - \frac{q^2}{2}) \quad (q_\mu = p'_\mu - p_\mu)\\
&= m^2(\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_2\alpha_3) - \alpha_2\alpha_3 q^2\\
&= m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2 - \alpha_2\alpha_3 q^2
\end{aligned}
$$

となることと

$$
\begin{aligned}
(p'+p)\cdot(\alpha_2 p' + \alpha_3 p) &= \alpha_2 p'^2 + \alpha_3 p'\cdot p + \alpha_2 p\cdot p' + \alpha_3 p^2\\
&= \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p^2 + p'^2 + 2p\cdot p') + \frac{1}{2}\alpha_2 p'^2 + \frac{1}{2}\alpha_3 p^2 - \frac{1}{2}\alpha_3 p'^2 - \frac{1}{2}\alpha_2 p^2\\
&= \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p^2 + p'^2 + 2p\cdot p') + \frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3)p'^2 - \frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3)p^2\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p+p')^2
\end{aligned}
$$

となることを使っています。最後の矢印は $(\alpha_2-\alpha_3)f(\alpha_2,\alpha_3)$ の積分は消えることからです。

まとめると、Γ_μ は

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu(p',p) =& -16\pi i\kappa_e e^2\Big(\gamma_\mu\Big(p\cdot p' - \frac{1}{2}(p'+p)^2\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\\
&+\frac{i}{2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big) + \frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\Big)I\\
=& -\frac{i\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\\
&\times\Big(\gamma_\mu\Big(p\cdot p' - \frac{1}{2}(p'+p)^2\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2} + \frac{i}{2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big)\\
&+\frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\Big)\exp\Big[-i\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - i\alpha_1\mu^2\\
=& -\frac{i\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3}\Big(\gamma_\mu\Big((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)p\cdot p' - \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p'+p)^2\\
&+\frac{1}{2}\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \frac{i}{2}\Big) + \frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big)\\
&\times\exp\Big[-i(\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \alpha_1\mu^2)\Big]
\end{aligned}
$$

となります。

運動量の移動 $q_\mu = p'_\mu - p_\mu$ が $q^2 < 0$ になっているとします。このとき exp 部分は振動するので、減衰項が必要になります。ここでは $\alpha_i (i=1,2,3)$ を $-i\alpha_i$ と置き換える方法を使います。これは適当な量を exp 内に加えて減衰させるのと同じ役割をします。そうすると

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu(p',p) =& -\frac{i\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{id\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3}\Big(\gamma_\mu\Big(-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)p\cdot p' - \frac{-i}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p'+p)^2\\
&+\frac{-1}{-i}\frac{1}{2}\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \frac{i}{2}\Big) + \frac{-1}{-i}\frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big)\\
&\times\exp\Big[-i\frac{-1}{-i}\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + i^2\alpha_1\mu^2\Big]\\
=& -\frac{\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3}\Big(\gamma_\mu\Big((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)p\cdot p' - \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p'+p)^2\\
&+\frac{1}{2}\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - \frac{1}{2}\Big) + \frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big)\\
&\times\exp\Big[-\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - \alpha_1\mu^2\Big]
\end{aligned}
$$

となり、exp は無限大で収束するようになります (積分範囲が $0\sim\infty$ のままなのは変数変換でなく収束させるための手続きだから)。

これに

$$
\int_0^\infty d\rho\,\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3) = 1
$$

を使って

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu(p',p) =& -\frac{\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\rho d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{\rho^3}\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\\
&\times\Big(\gamma_\mu\Big(\rho(p\cdot p')-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p'+p)^2+\frac{1}{2}\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}{\rho}-\frac{1}{2}\Big)\\
&+\frac{m}{2}\frac{(p'+p)_\mu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\rho}\Big)\exp\Big[-\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3q^2}{\rho}-\alpha_1\mu^2\Big]
\end{aligned}
$$

さらに、$\alpha_i=\rho\beta_i$ として

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu(p',p) =& -\frac{\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\rho d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3}{\rho^3}\rho^2\delta(1-\beta_1-\beta_2-\beta_3)\\
&\times\Big(\gamma_\mu\Big(\rho(p\cdot p')-\frac{\rho}{2}(\beta_2+\beta_3)(p'+p)^2+\frac{\rho}{2}\big(m^2(\beta_2+\beta_3)^2-\beta_2\beta_3q^2\big)-\frac{1}{2}\Big)\\
&+\frac{m}{2}\rho(p'+p)_\mu\beta_1(\beta_2+\beta_3)\Big)\exp\Big[-\rho\big(m^2(\beta_2+\beta_3)^2-\beta_2\beta_3q^2\big)-\alpha_1\mu^2\Big]\\
=& -\frac{\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 d\rho\delta(1-\beta_1-\beta_2-\beta_3)\\
&\times\Big(\gamma_\mu\Big((p\cdot p')-\frac{1}{2}(\beta_2+\beta_3)(p'+p)^2+\frac{1}{2}\big(m^2(\beta_2+\beta_3)^2-\beta_2\beta_3q^2\big)-\frac{1}{2\rho}\Big)\\
&+\frac{m}{2}(p'+p)_\mu\beta_1(\beta_2+\beta_3)\Big)\exp\Big[-\rho\big(m^2(\beta_2+\beta_3)^2-\beta_2\beta_3q^2\big)-\alpha_1\mu^2\Big]
\end{aligned}
$$

見て分かるように $1/2\rho$ が発散の原因で、前方散乱の項を引くことによってなくせます。続きの計算は「電子の g 因子」で行います。