くり込み〜自己エネルギー〜

電子の自己エネルギーを計算します。計算は真空偏極とそれほど変わりません。

　自己エネルギーのファインマン図を見てわかるように、電子の伝播関数に光子のループがくっついているので、電子の伝播関数を修正する形になります。なので、真空偏極を光子の伝播関数に対する補正としたのと同様のことをします。通常の電子の伝播関数は

$$iS^{(0)}(p)=\frac{i}{p_\mu\gamma^\mu-m+i\epsilon}$$

これに光子の放出と吸収 (自己エネルギー部分) を含ませた伝播関数を摂動として加えて

$$iS=iS^{(0)}(p)+iS^{(0)}(p)\frac{\Sigma(p)}{i}iS^{(0)}(p)+\cdots$$

第 2 項の Σ が自己エネルギーの部分 (光子の放出と吸収) に相当する関数で

$$\frac{\Sigma(p)}{i}=(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i4\pi\kappa_e}{k^2+i\epsilon}\gamma^\mu\frac{i}{(p-k)^\nu\gamma_\nu-m+i\epsilon}\gamma_\mu$$

これは「くり込み〜イントロ〜」で示した不変振幅部分から抜き出してます。
　積分を計算していく前に、Σ が何を与えるのかを簡単に見ておきます。まず、Σ を

$$\Sigma(p)=A+B(p^\mu\gamma_\mu-m)+\Sigma^R(p)(p^\mu\gamma_\mu-m)^2 \tag{1}$$

として、$p^\mu\gamma_\mu=m$ 周りでテーラー展開したような形で書き、$p^\mu\gamma_\mu=m$ の近くで考えていきます。Σ^R はすでに R がついているように正則化部分に相当します。また、気にしなければ表には出てきませんが、このように展開できるのは仮想光子の質量でないときという条件が正則化したときについてきます。
　「くり込み〜真空偏極〜」と同じように

$$\begin{aligned}iS&=\frac{i}{p^\mu\gamma_\mu-m+i\epsilon}+\frac{i}{p^\mu\gamma_\mu-m+i\epsilon}\frac{\Sigma}{i}\frac{i}{p^\nu\gamma_\nu-m+i\epsilon}+\cdots\\&=\frac{i}{p^\mu\gamma_\mu-m+i\epsilon}(1+\frac{\Sigma}{p^\nu\gamma_\nu-m+i\epsilon}+\cdots)\\&=\frac{i}{p^\mu\gamma_\mu-m-\Sigma+i\epsilon}\end{aligned}$$

スピノール成分による行列なので、行列に対する関係

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}y\frac{1}{x}+\frac{1}{x}y\frac{1}{x}y\frac{1}{x}\cdots$$

を使っています。これに (1) を入れて

$$iS = \frac{i}{p^\mu\gamma_\mu - m - A - B(p^\mu\gamma_\mu - m) - \Sigma^R(p)(p^\mu\gamma_\mu - m)^2 + i\epsilon}$$

A, B, Σ^R は微小として、AB や $A\Sigma^R$ のような項を消して

$$\begin{aligned}
iS &\simeq \frac{i}{(p^\mu\gamma_\mu - m - A)(1-B)(1-\Sigma^R(p)(p^\nu\gamma_\nu - m)) + i\epsilon} \\
&\simeq \frac{i}{(p^\mu\gamma_\mu - m - A)(1-\Sigma^R(p)(p^\nu\gamma_\nu - m)) + i\epsilon}\frac{1}{(1-B)} \\
&\simeq \frac{i(1+B)}{(p^\mu\gamma_\mu - m - A)(1-\Sigma^R(p)(p^\nu\gamma_\nu - m)) + i\epsilon} \qquad (\frac{1}{1-B} \simeq 1+B)
\end{aligned}$$

今は $p^\mu\gamma_\mu = m$ 周りなので $(p^\mu\gamma_\mu - m)^2$ の項は消して ($A\Sigma^R$ は微小として消す)

$$iS \simeq \frac{i(1+B)}{p^\mu\gamma_\mu - m - A + i\epsilon}$$

$1+B$ を

$$Z_2 = 1 + B$$

とし、分母での極から

$$p^\mu\gamma_\mu - m - A = 0$$

$$p^\mu\gamma_\mu = m + A$$

なので、$\delta m = A$ として、質量に加わっている量と見ます。というわけで、自己エネルギーの寄与を含めた電子の伝播関数は

$$iS = \frac{iZ_2}{p^\mu\gamma_\mu - (m + \delta m) + i\epsilon}$$

という形になります。Z_2 をくり込み定数、δm を質量のくり込みと呼び、観測される質量は $m + \delta m$ となります。
　極から質量を決定しているのは、自己エネルギーを含まない伝播関数は $p^\mu\gamma_\mu = m$ のときに極を持っており、このため実験的な質量は極から与えられるとされています。そして、そ δm は、on shell 条件 ($p^2 = m^2$) からのズレを与えています。こう考えるので、最初に $p^\mu\gamma_\mu = m$ 周りで展開しています。
　というわけで、実験的に観測している電子の質量 m_R は

$$m_R = m + \delta m$$

となります。一方で、電荷 e のくり込みは真空偏極でのくり込み定数 Z_3 によって

$$e_R = \sqrt{Z_3}e$$

と与えられています。しかし、実際には Z_2 も関わっています。感覚的に言えば、分子に Z_2 がいるので電荷との積 $Z_2 e$ として現れます。「くり込み〜頂点補正〜」でもう一度触れますが、電荷のくり込みにはもう 1 つのくり込み定数 Z_1 も関わっていて

$$e_R = Z_1^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3}e$$

となります。Z_1 は頂点補正の計算から出てきて、$Z_1 = Z_2$ なので、$e_R = \sqrt{Z_3}e$ となり、結局は真空偏極の寄与だけが残ります。

ちなみに、$\sqrt{Z_2}$ でないのは、ファインマン図で電子の内線 2 つが 1 つの頂点での電荷 e を共有しているためです (QED での頂点には光子の線 1 本と電子の線 2 本が入ってくる)。また、ここでの QED の話から見るのは難しいですが、Z_2 は波動関数に対するくり込みを与えます (場の量子論の「くり込み〜QED〜」参照)。

ここから自己エネルギーの積分を行っていきます。積分は k が大きな時に発散するだけでなく、小さくても発散しています。大きな値で発散することを紫外発散（ultraviolet divergence）、小さな値で発散することを赤外発散（infrared divergence）と呼びます。

赤外発散が起きないようにするために、光子の伝播関数に質量に相当する μ を加えて

$$\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-4\pi i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{(p-k)^\nu \gamma_\nu - m + i\epsilon} \gamma_\mu$$

μ は最後に 0 にします。γ で挟まれている部分は

$$\gamma^\mu \frac{1}{(p-k)^\nu \gamma_\nu - m} \gamma_\mu = \frac{\gamma^\mu((p-k)^\nu \gamma_\nu + m)\gamma_\mu}{(p-k)^2 - m^2}$$

分子は

$$\begin{aligned}
= \gamma^\mu p^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu &= p^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu \\
&= p^\nu \gamma^\mu (-\gamma_\mu \gamma_\nu + 2g_{\mu\nu}) \\
&= -\gamma_\mu \gamma^\mu p^\nu \gamma_\nu + 2p^\nu \gamma^\mu g_{\mu\nu} \\
&= -4p^\nu \gamma_\nu + 2p^\nu \gamma_\nu \\
&= -2p^\nu \gamma_\nu
\end{aligned}$$

なので

$$\Sigma(p) = -i4\pi\kappa_e e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2-\mu^2} \frac{-2p^\nu\gamma_\nu + 2k^\nu\gamma_\nu + 4m}{(p-k)^2-m^2}$$

Pauli-Villars の方法によって正則化します。そのために、「くり込み〜真空偏極〜」と同じように

$$\overline{\Sigma}(p) = \int d^4k (f + \sum_i^N C_i f)$$

と変えます。これ以降の計算はほとんど真空偏極と同じです。
光子部分は

$$\frac{i}{k^2-\mu^2} = \int_0^\infty d\alpha \exp[i\alpha(k^2-\mu^2)]$$

から

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(p) = i4\pi\kappa_e e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 ((-2\not{p} + 2\not{k} + 4m)\\ \times \exp[i\alpha_1(k^2-\mu^2) + i\alpha_2((p-k)^2-m^2)] + \mathrm{reg})\end{aligned}$$

reg は正則化部分です。さらに微分

$$ik_\mu = \frac{\partial}{\partial z} \exp(ik\cdot z)|_{z=0}$$

によって

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(p) = i4\pi\kappa_e e^2 \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ((-2p^\nu\gamma_\nu - 2i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial z^\nu} + 4m)\\ \times \exp[i\alpha_1(k^2-\mu^2) + i\alpha_2((p-k)^2-m^2) + z\cdot k] + \mathrm{reg})\Big|_{z=0}\end{aligned}$$

k 積分はガウス積分

$$\int d^4k \exp[i(ak^2 + b\cdot k)] = \frac{\pi^2}{ia^2} \exp[-\frac{ib^2}{4a}]$$

によって

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[i\alpha_1(k^2-\mu^2)+i\alpha_2((p_\mu-k)^2-m^2)+iz\cdot k] \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[i(k^2(\alpha_1+\alpha_2)+k\cdot(-2\alpha_2 p_\mu+z))-i\alpha_1\mu^2+i\alpha_2(p^2-m^2)] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{\pi^2}{i(\alpha_1+\alpha_2)^2} \exp[\frac{-i(-2\alpha_2 p_\mu+z)^2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}] \exp[-i\alpha_1\mu^2+i\alpha_2(p^2-m^2)] \\
&= \frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2} \exp[\frac{-i(-2\alpha_2 p_\mu+z)^2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}] \exp[-i\alpha_1\mu^2+i\alpha_2(p^2-m^2)]
\end{aligned}$$

z を含むのはこの部分だけなので、微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z^\mu} \exp[\frac{-i(-2\alpha_2 p_\mu+z)^2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}]|_{z=0} &= \frac{-2iz+4i\alpha_2 p_\mu}{4(\alpha_1+\alpha_2)} \exp[\frac{-i(-2\alpha_2 p_\mu+z)^2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}]\Big|_{z=0} \\
&= \frac{i\alpha_2 p_\mu}{\alpha_1+\alpha_2} \exp[\frac{-i(-2\alpha_2 p_\mu)^2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}]
\end{aligned}$$

これを入れて

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(p) &= i4\pi\kappa_e e^2 \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \Big((-2\not{p} - 2i\gamma^\mu \frac{i\alpha_2 p_\mu}{\alpha_1+\alpha_2} + 4m) \\
&\qquad \times \frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2} \exp[\frac{-i(-2\alpha_2 p_\mu)^2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}] \exp[-i\alpha_1\mu^2+i\alpha_2(p^2-m^2)] + \mathrm{reg}\Big) \\
&= \kappa_e e^2 \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{4\pi(\alpha_1+\alpha_2)^2} \Big((-\frac{2\alpha_1\not{p}}{\alpha_1+\alpha_2}+4m) \\
&\qquad \times \exp[i(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2 m^2)] + \mathrm{reg}\Big) \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \Big((-\frac{\alpha_1\not{p}}{\alpha_1+\alpha_2}+2m) \\
&\qquad \times \exp[i(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2 m^2)] + \mathrm{reg}\Big)
\end{aligned}$$

ここに積分

$$\int_0^\infty d\rho\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2) = 1$$

を使って、$\alpha_1+\alpha_2$ を ρ に置き換えて

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(p) &= \frac{\kappa_e e^2}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2) \\
&\qquad \times \frac{1}{\rho^2}\Big((-\frac{\alpha_1 p\!\!\!/}{\rho}+2m)\exp[i(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\rho}p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2 m^2)] + \mathrm{reg}\Big)
\end{aligned}$$

$\alpha_i = \rho\beta_i$ としてさらに置き換え

$$
\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(p) = &\frac{\kappa_e e^2}{2\pi}\int_0^\infty d\rho\int_0^1 d\beta_1\int_0^1 d\beta_2\delta(1-\beta_1-\beta_2)\frac{\rho^2}{\rho} \\
&\times\frac{1}{\rho^2}\Big((-\beta_1\not{p}+2m)\exp[i\rho(\beta_1\beta_2p^2-\beta_1\mu^2-\beta_2m^2)]+\mathrm{reg}\Big) \\
=&\frac{\kappa_e e^2}{2\pi}\int_0^1 d\beta_1\int_0^1 d\beta_2\delta(1-\beta_1-\beta_2)\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}\Big((-\beta_1\not{p}+2m) \\
&\times\exp[i\rho(\beta_1\beta_2p^2-\beta_1\mu^2-\beta_2m^2)]+\mathrm{reg}\Big)
\end{aligned}
$$

ρ 積分は対数発散します。

これを正則化するために、reg 部分での μ を十分大きな Λ とします。そうすると、reg 部分の exp 内の項は Λ が十分大きいので他の項を落とすことで、ρ 積分部分は

$$
\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}\big(\exp[i\rho(\beta_1\beta_2p^2-\beta_1\mu^2-\beta_2m^2)]-\exp[-i\rho\beta_1\Lambda^2]\big)
$$

積分は

$$
\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}(\exp[i\rho(x+i\epsilon)]-\exp[i\rho(y+i\epsilon)])=\log\frac{y}{x}
$$

を使えばいいです ($\exp[\rho x]$ でも同様の結果)。そして、reg 部分での C_i において $C_1=-1$ とすることで、発散をなくします。

これらによって

$$
\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(p,\mu,\Lambda) &= \frac{\kappa_e e^2}{2\pi}\int_0^1 d\beta_1\int_0^1 d\beta_2\delta(1-\beta_1-\beta_2)(-\beta_1\not{p}+2m)\log[\frac{-\beta_1\Lambda^2}{\beta_1\beta_2p^2-\beta_1\mu^2-\beta_2m^2}] \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{2\pi}\int_0^1 d\beta(-\beta\not{p}+2m)\log[\frac{-\beta\Lambda^2}{\beta(1-\beta)p^2-\beta\mu^2-(1-\beta)m^2}] \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{2\pi}\int_0^1 d\beta(-\beta\not{p}+2m)\log[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2}]
\end{aligned}
$$

これが正則化された自己エネルギーになります。

ここでの計算の注意として、μ を 0 の極限に持って行くのは計算の最後という点です。ただし、0 にしても積分が収束するのが確認できるなら、途中で 0 にして問題ないです。

積分の全て行う必要はなく、(1) での A, B が求まれば十分です。$\not{p}=m$ ($p^2=m^2$) として、(1) と $\delta m = A$ から

$$
\begin{aligned}
\delta m = A = \overline{\Sigma}(p,\mu,\Lambda)\Big|_{p_\mu\gamma^\mu=m} \\
&= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta(-\beta m+2m)\log[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)m^2}] \\
&= \frac{\alpha m}{2\pi}\int_0^1 d\beta(-\beta+2)\log[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)^2m^2+\beta\mu^2}]
\end{aligned}
$$

積分は $\mu=0$ でも収束するので、$\mu=0$ として

$$
\begin{aligned}
\delta m &= \frac{\alpha m}{2\pi}\int_0^1 d\beta(-\beta+2)(\log[\beta\Lambda^2]-\log[(1-\beta)^2m^2]) \\
&= \frac{\alpha m}{2\pi}\int_0^1 d\beta(-\beta+2)(\log[\beta]-2\log[(1-\beta)]+\log[\frac{\Lambda^2}{m^2}])
\end{aligned}
$$

対数の積分

$$
\int_0^1 dx\ x^n\log x = -\frac{1}{(n+1)^2}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\delta m &= \frac{\alpha m}{2\pi}\int_0^1 d\beta(-\beta+2)(\log\beta-2\log[1-\beta]+\log\frac{\Lambda^2}{m^2}) \\
&= \frac{\alpha m}{2\pi}(\frac{1}{4}+4-2-2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\log\frac{\Lambda^2}{m^2}) \\
&= \frac{\alpha m}{2\pi}(\frac{3}{2}\log\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{3}{4}) \\
&= \frac{3\alpha m}{4\pi}(\log\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

これが δm になります。

B はテーラー展開の一次部分なので

$$
B = \frac{\partial\overline{\Sigma}}{\partial(p^\mu\gamma_\mu)}\Big|_{p^\mu\gamma_\mu=m}
$$

から

$$\begin{aligned}
B =& \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta\Big(-\beta\log[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2}]\\
&\qquad +(-\beta\not{p}+2m)\frac{(1-\beta)^2m^2+\beta\mu^2}{\beta\Lambda^2}\frac{\beta\Lambda^2 2\beta(1-\beta)p}{((1-\beta)^2m^2+\beta\mu^2)^2}\Big)\Big|_{p^\mu\gamma_\mu=m}\\
=& \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta\Big(-\beta\log[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2}]\\
&\qquad +(-\beta\not{p}+2m)\frac{2\beta(1-\beta)\not{p}}{(1-\beta)^2m^2+\beta\mu^2}\Big)\Big|_{p^\mu\gamma_\mu=m}\\
=& -\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta\ \beta\Big(\log[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)^2m^2+\beta\mu^2}]-\frac{2m^2(-\beta+2)(1-\beta)}{(1-\beta)^2m^2+\beta\mu^2}\Big)
\end{aligned}$$

log 部分は $\mu=0$ にして問題ないので

$$\begin{aligned}
\int_0^1 d\beta\ \beta\log[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)^2m^2}] =& \int_0^1 d\beta\ \beta(\log\beta-2\log[1-\beta]+\log\frac{\Lambda^2}{m^2})\\
=& -\frac{1}{4}+2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{m^2}\\
=& \frac{5}{4}+\frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{m^2}
\end{aligned}$$

残りの項は $\mu=0$ にして積分すると発散します。なので、先に 0 にせずに実行します。変形して

$$\begin{aligned}
-2\int_0^1 d\beta\ \beta\frac{m^2(-\beta+2)(1-\beta)}{(1-\beta)^2m^2+\beta\mu^2} =& -2\int_0^1 d\beta\ \beta\frac{m^2(-\beta+2)(1-\beta)}{m^2((1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2)}\\
=& -2\int_0^1 d\beta\ \beta\frac{(2-\beta)(1-\beta)}{(1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2}
\end{aligned}$$

近似して積分を行います。積分部分は β の 0 から 1 の値に対して正です。そして、$\beta(2-\beta)$ は $\beta=0$ から $\beta=1$ に対して 0 から 1 に向かって増加し、

$$\frac{1-\beta}{(1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2}$$

の部分は、$\beta=0$ から増加していき、どこかで減少を始め $\beta=1$ で 0 になります。このため、この部分が最大値となる β の値で積分に最も大きく寄与し、それ以降の寄与は小さくなっていくので、最大値から先の寄与は無視します。

極値を求めます。β 微分は

$$\frac{-1}{(1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2}-\frac{(1-\beta)(2\beta-2+\mu^2/m^2)}{((1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2)^2}=0$$

なので、極値は

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{-((1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2)-(1-\beta)(2\beta-2+\mu^2/m^2)}{((1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2)^2} \\
&= \frac{\beta^2-2\beta+1-\mu^2/m^2}{((1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2)^2}
\end{aligned}
$$

となる β です。これの分子が 0 になる β は

$$
(\beta-1)^2 = \frac{\mu^2}{m^2}
$$

から

$$
\beta = 1-\frac{\mu}{m}\ ,\ \frac{\mu}{m}+1 \quad (\frac{\mu}{m}>0)
$$

$\beta=0$ から 1 の間で最大値となるのは $1-\mu/m$ の方なので、そこまでを積分範囲として近似して

$$
\begin{aligned}
-2\int_0^1 d\beta\beta\frac{(-\beta+2)(1-\beta)}{(1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2} &\simeq\ -2\int_0^{1-\mu/m} d\beta\beta\frac{(-\beta+2)(1-\beta)}{(1-\beta)^2} \\
&=\ -2\int_0^x dx\frac{1-x}{x} \quad (x=1-\frac{\mu}{m}) \\
&=\ \log\frac{\mu^2}{m^2}+1
\end{aligned}
$$

というわけで、B は

$$
B = -\frac{\alpha}{2\pi}(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{m^2}+\log\frac{\mu^2}{m^2}+1) = -\frac{\alpha}{2\pi}(\frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{m^2}+\log\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{9}{4})
$$

となります。

よって、くり込み定数 Z_2 と質量のくり込みはは

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= 1+B = 1-\frac{\alpha}{2\pi}(\frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{m^2}+\log\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{9}{4}) \\
\delta m &= \frac{3\alpha m}{4\pi}(\log\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

元々は1次発散だったものが真空偏極のときと同じように対数発散になります。そして、質量のくり込み $m_R=m+\delta m$ は、電荷のくり込みと同じように実験的な質量に発散項をくり込んでいます。

また、ここで求められた Z_2 はかなり曖昧なもので、光子の伝播関数として違うものを使うと異なった結果になります。これは、光子の伝播関数のゲージ自由度による曖昧さによります。ここではローレンツゲージで行っていますが、他の条件では別の形になります。このため、Z_2 は平気で別の形になります。一方で、δm ではこんなことは起きずにゲージ不変です (on shell 条件を満たすなら)。さらに、Z_2 は光子の質量 μ が 0 になると発散します。このように問題が残っているので、Z_2 は正しいのかと思えますが、最終的な結果に対しては問題がないようになっています。このことは「くり込み～頂点補正～」で見ます。