くり込み〜真空偏極〜

真空偏極での発散について見ていきます。ここでの重要な点は電磁場を扱うためにゲージ不変性を持っていることです。
真空偏極に現われる積分の発散を正則化するために Pauli-Villars の方法を使います。

真空偏極は光子の伝播関数と関係しているので、真空偏極の積分を見る前に光子の伝播関数の構造を少し見ておきます。光子の伝播関数は

$$
iD^{(0)}_{\mu\nu}(q) = \frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon}g_{\mu\nu}
$$

「くり込み〜イントロ〜」で示した真空偏極の図は、ループ部分の両端に光子の伝播関数がいるので、2 つの伝播関数の間に真空偏極 $\Pi^{\alpha\beta}$ を加えた形として

$$
iD^{(1)}_{\mu\nu}(q) = iD^{(0)}_{\mu\alpha}(q)\frac{i\Pi^{\alpha\beta}(q)}{4\pi\kappa_e}iD^{(0)}_{\beta\nu}(q) \tag{1}
$$

これを最低次の伝播関数 $D^{(0)}_{\mu\nu}$ に対して、次のオーダからの寄与と考えます。こう考えてしまう図的な理由は、最低次の電子-電子散乱では光子の伝播関数が電子と電子の間に挟まるようにいましたが、今のオーダでは光子の伝播関数の間に真空偏極が挟まったものが電子と電子の間に挟まっているためです。つまり、真空偏極は光子の伝播関数への寄与と考えます。この $\Pi_{\mu\nu}$ を真空偏極テンソルと言っていきます。真空偏極が伝播関数への高次の寄与として現れるのも実際に計算すると分かります。ちなみに、電子の線の矢印の向きを反転させても、全く同じなので別の図にはなりません。

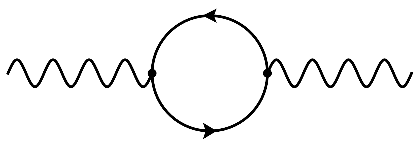
伝播関数に挟まれた真ん中の部分がループ部分になり、

$$
\frac{i\Pi^{\alpha\beta}(q)}{4\pi\kappa_e} = -e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}[\gamma_\alpha\frac{1}{k_\mu\gamma^\mu-m+i\epsilon}\gamma_\beta\frac{1}{(k_\nu-q_\nu)\gamma^\nu-m+i\epsilon}]
$$

これは「くり込み〜イントロ〜」での真空偏極で書いたものです。まずは、この $\Pi^{\alpha\beta}$ はローレンツ不変性だけを考慮して

$$
\Pi_{\mu\nu} = Dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}q^2\Pi'(q^2) + q_\mu q_\nu\Pi''(q^2) \tag{2}
$$

このようになっているとします。最低次での伝播関数に、その次のオーダからの寄与 (1) を加えて



$$
\begin{aligned}
iD_{\mu\nu}(q) &= iD^{(0)}_{\mu\nu}(q) + iD^{(0)}_{\mu\alpha}(q)\frac{i\Pi^{\alpha\beta}(q)}{4\pi\kappa_e}iD^{(0)}_{\beta\nu}(q) + \cdots \\
&= iD^{(0)}_{\mu\nu}(q) + iD^{(1)}_{\mu\nu}(q) + \cdots
\end{aligned}
$$

これを新しく光子の伝播関数と定義します。「$\cdots$」は真空偏極を増やして (1) と同じように $iD^{(0)}_{\mu\nu}(q)$ で挟んでいったものが無限個続いているとします。これは D の項で言えば

$$
\begin{aligned}
iD_{\mu\nu}(q) &= \frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon}g_{\mu\nu} + \frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon}g_{\mu\alpha}\frac{iDg^{\alpha\beta}}{4\pi\kappa_e}\frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon}g_{\beta\nu} + \cdots \\
&= \big(\frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon} + \frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon}\frac{iD}{4\pi\kappa_e}\frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon} + \cdots\big)g_{\mu\nu} \\
&= \frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon}g_{\mu\nu}\big(1 + \frac{D}{q^2+i\epsilon} + \cdots\big) \\
&= \frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2+i\epsilon}g_{\mu\nu}\frac{1}{1-\frac{D}{q^2+i\epsilon}} \\
&\simeq \frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2-D+i\epsilon}g_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

もしくは演算子 (行列) に対する関係

$$
\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}y\frac{1}{x} + \frac{1}{x}y\frac{1}{x}y\frac{1}{x} - \cdots
$$

を使っても求まります ($D_{\mu\nu}$ や $g_{\mu\nu}$ はミンコフスキー空間の成分を持った 4×4 行列)。最後の結果の分母の形から、$\sqrt{D}$ が質量に相当しているように見えます (電子の伝播関数の分母は p^2-m^2)。そうすると、光子は質量 0 なので

$$
\Pi_{\mu\nu}(0) = Dg_{\mu\nu} = 0
$$

と考えられます。なので、(2) で $D=0$ とすれば、ローレンツ不変でゲージ不変な形になります。一方で、細かい話を飛ばして結果を使うと、ゲージ不変性 $q^\mu\Pi_{\mu\nu}(q)=0$(「コンプトン散乱」の補足参照) より

$$
D + q^2(\Pi'(q^2) + \Pi''(q^2)) = 0
$$

となっていて、q が 0 の極限で $D=0$ を導けます。なので、ゲージ不変性があるなら、$D=0$ の必要があります。しかし、実際に今の場合で本当に 0 になるかというと、なりません。${\Pi^\mu}_\mu$ が

$$
\Pi_{\mu\nu}(0) = Dg_{\mu\nu} \ \Rightarrow\ {\Pi^\mu}_\mu(0) = 4D
$$

から、真空偏極の式を $q\to 0$ とすることで

$$
\begin{aligned}
\frac{iD}{4\pi\kappa_e} =& -\frac{1}{4}e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\Big[\gamma_\mu\frac{1}{k_\alpha\gamma^\alpha-m+i\epsilon}\gamma^\mu\frac{1}{(k-q)_\beta\gamma^\beta-m+i\epsilon}\Big]\\
=& -\frac{e^2}{4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\Big[\gamma_\mu\frac{k_\alpha\gamma^\alpha+m}{k^2-m^2+i\epsilon}\gamma^\mu\frac{(k-q)_\beta\gamma^\beta+m}{k^2-m^2+i\epsilon}\Big]\\
=& -\frac{e^2}{4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-m^2+i\epsilon)^2}\mathrm{tr}[\gamma_\mu(k_\alpha\gamma^\alpha+m)\gamma^\mu(k_\beta\gamma^\beta+m)]\\
=& -\frac{e^2}{4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4(-2k^2+4m^2)}{(k^2-m^2+i\epsilon)^2}\\
=& -2e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-k^2+2m^2}{(k^2-m^2+i\epsilon)^2}
\end{aligned}
$$

トレースの計算は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[(k_\alpha\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu+m\gamma_\mu\gamma^\mu)(k_\beta\gamma^\beta+m)] &= \mathrm{tr}[(-2k_\alpha\gamma^\alpha+4m)(k_\beta\gamma^\beta+m)]\\
&= 4(-2k^2+4m^2)
\end{aligned}
$$

この積分は 0 にならずに発散します (分母が k^4 で分子が k^5 の k 積分だから)。しかし、QED は電磁場を含む理論なのでゲージ不変性を持つべきで、この結果はおかしいです。なので、$\Pi_{\mu\nu}$ が何かおかしなことをしています。

このことはひとまず置いといて、発散をどうにかします。積分が発散するとどうにもならなくなるので、数学的に定義できる状況に持っていく必要があります。することは単純で、無限に大きくしていくと発散するなら、ある有限な値で切ってしまい、無理やり収束させて正則化させます。ここでは Pauli と Villars によって導かれた方法を使います。

真空偏極テンソル $\Pi_{\mu\nu}(q)$ の発散を抑えるために途中で運動量 k の値を切断して正則化させることで $\Pi_{\mu\nu}(q)$ を修正し、その修正された $\Pi_{\mu\nu}(q)$ を計算していきます。その結果として、発散部分と有限部分が切り離されます。

というわけで、$\Pi_{\mu\nu}(q)$ を

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(q) =& -i4\pi\kappa_e e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}[\gamma_\alpha\frac{1}{k_\mu\gamma^\mu-m+i\epsilon}\gamma_\beta\frac{1}{(k-q)_\nu\gamma^\nu-m+i\epsilon}]\\
=& \int d^4k f_{\mu\nu}(q,k,m^2)
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(q) =& \int d^4k\Big(f_{\mu\nu}(q,k,m^2)+\sum_{i=1}^N C_i f_{\mu\nu}(q,k,M_i^2)\Big)\\
=& -4\pi i\kappa_e e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(\frac{\mathrm{tr}[\gamma_\mu(k^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma_\nu((k-q)^\beta\gamma_\beta+m)]}{(k^2-m^2+i\epsilon)((k-q)^2-m^2+i\epsilon)}\\
&+\sum_{i=1}^N C_i\frac{\mathrm{tr}[\gamma_\mu(k^\alpha\gamma_\alpha+M_i)\gamma_\nu((k-q)^\beta\gamma_\beta+M_i)]}{(k^2-M_i^2+i\epsilon)((k-q)^2-M_i^2+i\epsilon)}\Big)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

と変更します（これ以降の $\Pi_{\mu\nu}(q)$ はこれを表します)。M_i を無限大に持っていけばもとに戻るので、M_i は q よりも十分大きいとします。Σ 部分が正則化による部分で、最終的にはここでの定数 C_i と質量 M_i によって収束させます。

トレース部分はどちらも同じで

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=-i16\pi\kappa_e e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(\frac{k_\mu(k-q)_\nu+k_\nu(k-q)_\mu-g_{\mu\nu}(k^2-q\cdot k-m^2)}{(k^2-m^2+i\epsilon)((k-q)^2-m^2+i\epsilon)}+\sim\Big) \tag{4}$$

Σ 以降の部分は割愛して「〜」で表しますが、第 1 項の m を M_i にすれば対応させられます。トレースの計算は「電子-陽子散乱」と同じなのでそっちを見てください。

まだ基本的な積分公式を使うには難しいので、変形していきます。ここでの変形は自己エネルギーや頂点補正でも使います。まず、exp の積分が

$$\int_0^\infty d\beta\exp[i\beta(k^2-m^2+i\epsilon)]=\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$$

となっていること ($i\epsilon$ がいるために無限大で収束する) を適用すれば

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q)=-16\pi i\kappa_e e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\big(&k_\mu(k-q)_\nu+k_\nu(k-q)_\mu-g_{\mu\nu}(k^2-q\cdot k-m^2)\\&\times\int_0^\infty d\alpha_1\exp[i\alpha_1(k^2-m^2)]\int_0^\infty d\alpha_2\exp[i\alpha_2((k-q)^2-m^2)]+\sim\big)\end{aligned}$$

$i\epsilon$ は m^2 に含まれているとしていますが、m^2 が複素数になっていることを気にする必要はほぼないです。さらに、exp の微分

$$\frac{\partial}{\partial z^\mu}\exp[ik\cdot z]\big|_{z=0}=ik_\mu$$

を使って exp の外にいるものを exp に乗っけてしまいます。そうすると

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q)=-16\pi i\kappa_e e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(\Big(&-\frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\frac{\partial}{\partial z_2^\nu}-\frac{\partial}{\partial z_1^\nu}\frac{\partial}{\partial z_2^\mu}-g_{\mu\nu}(-\frac{\partial}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}-m^2)\Big)\\&\times\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\exp\left[i\alpha_1(k^2-m^2)+i\alpha_2((k-q)^2-m^2)+iz_1\cdot k+iz_2\cdot(k-q)\right]\\&+\sim\Big)\Big|_{z_1=z_2=0}\end{aligned} \tag{5}$$

exp 部分に付け加えられた部分が微分によって前に出てきて元の式になります。1,2 番目の微分は添え字に対応させて z_1,z_2 を並べて、3 番目の微分は内積にすることで元の式に戻しています。これによって k 積分は exp 部分に対して実行すればいいことになります。exp 内を整理すると

$$\exp\left[i\alpha_1(k^2-m^2)+i\alpha_2((k-q)^2-m^2)+iz_1\cdot k+iz_2\cdot(k-q)\right]$$
$$=\ \exp\left[i\big(\alpha_1(k^2-m^2)+\alpha_2(k^2+q^2-2k\cdot q-m^2)+z_1\cdot k+z_2\cdot(k-q)\big)\right]$$
$$=\ \exp\left[i\big(k^2(\alpha_1+\alpha_2)+k\cdot(-2\alpha_2 q+z_1+z_2)-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+q^2\alpha_2-q\cdot z_2\big)\right]$$

これの k 積分は、ガウス積分の一種

$$\int d^4k\,\exp[i(ak^2+b\cdot k)]=\frac{\pi^2}{ia^2}\exp[-\frac{ib^2}{4a}]$$

から

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp\left[i\big(k^2(\alpha_1+\alpha_2)+k\cdot(-2\alpha_2 q+z_1+z_2)-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+q^2\alpha_2-q\cdot z_2\big)\right]\\
&=\frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\exp\big[-\frac{i(-2\alpha_2 q+z_1+z_2)^2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}\big]\exp[i(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+q^2\alpha_2-q\cdot z_2)]\\
&=\frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\exp\big[-\frac{i(4\alpha_2^2q^2+z_1^2+z_2^2+2z_1\cdot z_2-4\alpha_2 q\cdot z_1-4\alpha_2 q\cdot z_2)}{4(\alpha_1+\alpha_2)}\big]\\
&\quad\times\exp[i(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+q^2\alpha_2-q\cdot z_2)]\\
&=\frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\exp\big[-i(\frac{z_1^2+z_2^2+2z_1\cdot z_2-4\alpha_2 q\cdot z_1-4\alpha_2 q\cdot z_2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}+q\cdot z_2)\big]\\
&\quad\times\exp[i(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+q^2\alpha_2-\frac{\alpha_2^2q^2}{\alpha_1+\alpha_2})]\end{aligned}\tag{6}$$

後で微分しやすくするために、exp 部分を z を含むものと含まないものとに分離して書いています。これで k 積分は実行できましたが、その代わりに α 積分が残っています。

(5) の微分を実行します。(6) の z_1, z_2 それぞれの微分は (exp 内は省略します)

$$\frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\exp[\ ]=-i(\frac{z_{1\mu}+z_{2\mu}-2\alpha_2 q_\mu}{2(\alpha_1+\alpha_2)})\exp[\ ]$$
$$\frac{\partial}{\partial z_2^\mu}\exp[\ ]=-i(\frac{z_{1\mu}+z_{2\mu}-2\alpha_2 q_\mu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}+q_\mu)\exp[\ ]$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\frac{\partial}{\partial z_2^\nu}\exp[\ ]=&\ -i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\exp[\ ]+\big(-i(\frac{z_{1\nu}+z_{2\nu}-2\alpha_2 q_\nu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}+q_\nu)\big)\frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\exp[\ ]\\
=&\ \big(-i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}+\big(-i(\frac{z_{1\nu}+z_{2\nu}-2\alpha_2 q_\nu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}+q_\nu)\big)\big(-i\frac{z_{1\mu}+z_{2\mu}-2\alpha_2 q_\mu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\big)\big)\exp[\ ]\\
=&\ \big(-i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}-(\frac{z_{1\nu}+z_{2\nu}-2\alpha_2 q_\nu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}+q_\nu)(\frac{z_{1\mu}+z_{2\mu}-2\alpha_2 q_\mu}{2(\alpha_1+\alpha_2)})\big)\exp[\ ]\end{aligned}$$

1 行目の $g_{\mu\nu}$ は微分で

$$\frac{dz_{1\nu}}{dz_1^\mu} = \frac{g_{\alpha\nu}dz_1^\alpha}{dz_1^\mu} = g_{\alpha\nu}\delta^{\alpha\mu} = g_{\mu\nu}$$

となることから出てきます。$z_1 = z_2 = 0$ として

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\frac{\partial}{\partial z_2^\nu}\exp[\ ]|_{z_1=z_2=0} &= -i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)} - \Big(\frac{-2\alpha_2 q_\nu}{2(\alpha_1+\alpha_2)} + q_\nu\Big)\frac{-2\alpha_2 q_\mu}{2(\alpha_1+\alpha_2)} \\
&= -i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)} - \Big(\frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} + \frac{-\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\Big)q_\nu q_\mu \\
&= -i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q_\nu q_\mu
\end{aligned}$$

もう 1 つの内積

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}\exp[\ ]$$

では、今の結果を内積にすればいいだけで ($g^{\mu\nu}$ をかける)、$g^\mu{}_\mu$ は 4 なので

$$-i\frac{2}{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q^2$$

というわけで、微分の結果を (5) に入れれば

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(q) =& -16\pi i\kappa_e e^2\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\\
&\times\Big(\frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\exp\big[i(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+q^2\alpha_2-\frac{\alpha_2^2q^2}{\alpha_1+\alpha_2})\big]\\
&\times\Big((i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q_\mu q_\nu)+(i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q_\nu q_\mu)\\
&-g_{\mu\nu}(i\frac{2}{\alpha_1+\alpha_2}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q^2-m^2)\Big)+\ \sim\ \Big)\\
=&\,16\pi i\kappa_e e^2\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\Big(\frac{i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\exp[i(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}q^2)]\\
&\times(i\frac{2g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}-\frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q_\mu q_\nu)-g_{\mu\nu}(i\frac{2}{\alpha_1+\alpha_2}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q^2-m^2)\\
&+\ \sim\ \Big)\\
=&\,16\pi i\kappa_e e^2\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\frac{i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\exp[i(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}q^2)]\\
&\times\Big(-\frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}(\frac{i}{\alpha_1+\alpha_2}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q^2-m^2)+\ \sim\ \Big)\\
=&\,16\pi i\kappa_e e^2\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\exp[i(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}q^2)]\\
&\times\Big(\frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}(-\frac{i}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q^2+m^2)+\ \sim\ \Big)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

になります。

ここでゲージ不変性を持ち込みます。(2) を $D=0$ としてゲージ不変な形にして

$$
\Pi_{\mu\nu}(q^2)=(g_{\mu\nu}q^2-q_\mu q_\nu)\Pi(q^2)\qquad(\Pi(q^2)=\Pi'(q^2)=-\Pi''(q^2))
\tag{8}
$$

と書きます。これがローレンツ不変性とゲージ不変性を要求したときの真空偏極テンソルの一般的な形です。(7) での

$$
\frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}\Big(-\frac{i}{(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q^2+m^2\Big)
$$

を変形させれば

$$
\frac{-2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}(g_{\mu\nu}q^2-q_\mu q_\nu)+g_{\mu\nu}\Big(\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q^2+\frac{i}{(\alpha_1+\alpha_2)}-m^2\Big)
$$

となり、第 1 項が (8) と同じ形です。このため第 1 項はゲージ不変な部分と考えられ、第 2 項はゲージ不変でないことになります。つまり、ゲージ不変な部分とそうでない部分に分けられています。このようにゲージ不変でない部分が混入していたために、最初に触れたゲージ不変性の問題を起こしていました。

なので、ゲージ不変性を要求するために、ゲージ不変でない部分を無視します。実際に第 2 項部分が消えて、$\Pi_{\mu\nu}$ がゲージ不変であることを示せますが省きます。また、最初から (8) の形から始めていれば、ゲージ不変について気にすることなく計算できます。

これでゲージ不変性の問題はなくなったので、正則化をさらに見ていきます。(3) での Σ の範囲を $i=0\sim N$ にして $C_0=1, M_0=m$ として、第 1 項も和に含めて

$$\begin{aligned}\Pi(q^2) = 16\pi i\kappa_e e^2 \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \\ \times \frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\sum_{i=0}^N C_i \exp[-M_i^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}q^2] \\ = -\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^4}\sum_{i=0}^N C_i \exp[-M_i^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}q^2]\end{aligned}$$

今までの「〜」は同じ変形が行われるので、m を M に変えたものです。$\alpha_{1,2}$ 積分を実行します。そのために、$\alpha_n=\rho\beta_n$ とし

$$\int_0^\infty d\rho\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2)=1 \ \Rightarrow\ \rho=\alpha_1+\alpha_2$$

によって、また積分を増やします。α は 0 以上なので、ρ の範囲も 0 以上に取ればデルタ関数を 0 にできます。β も 0 以上です。これによって

$$\begin{aligned}\Pi(q^2) = &-\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\int_0^\infty d\rho\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2)\frac{\alpha_1\alpha_2}{\rho^4}\sum_{i=0}^N C_i\exp[i(-M_i^2\rho+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\rho}q^2)] \\ = &-\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^\infty d\rho\int_0^\infty \rho d\beta_1\int_0^\infty \rho d\beta_2\delta(\rho-\rho\beta_1-\rho\beta_2)\frac{\rho^2\beta_1\beta_2}{\rho^4}\sum_{i=0}^N C_i\exp[i(-M_i^2\rho+\rho\beta_1\beta_2 q^2)] \\ = &-\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^1 d\beta_1\int_0^1 d\beta_2\int_0^\infty d\rho\delta(1-\beta_1-\beta_2)\frac{\beta_1\beta_2}{\rho}\sum_{i=0}^N C_i\exp[i\rho(-M_i^2+\beta_1\beta_2 q^2)] \\ = &-\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^1 d\beta_1 d\beta_2\delta(1-\beta_1-\beta_2)\beta_1\beta_2\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}\sum_{i=0}^N C_i\exp[i\rho(-M_i^2+\beta_1\beta_2 q^2)]\end{aligned}$$

途中で β の積分範囲が変わっているのは、$0\sim 1$ の時にデルタ関数による制限を満たせるからです (2 行目と 3 行目のデルタ関数を比較すれば分かります)。また、デルタ関数の

$$\delta(ax)=\frac{1}{a}\delta(x)$$

という性質も途中で使っています。

ρ 積分を見れば、対数発散することが予想されます。もともとは 2 次発散だったのが対数発散に抑えられています。これは $\Pi_{\mu\nu}$ のゲージ不変性によって発散への寄与が減ったことによる影響です。

ρ 積分は一気に結果にいくと (積分経路を加えて閉じた経路を作り、留数定理を使って求める)

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \exp[i\rho(-M_i^2+\beta_1\beta_2 q^2)] = -\lim_{x\to 0}\sum_{i=0}^{N} C_i \log x - \sum_{i=0}^{N} C_i \log[M_i^2-\beta_1\beta_2 q^2]$$
$$+\sum_{i=0}^{N} C_i \int_0^\infty dt \log[t]\exp[-t] \quad (t = i\rho(M_i^2-\beta_1\beta_2 q^2))$$

x は積分範囲の下限の値です。和の係数 C_i を

$$\sum_{i=0}^{N} C_i = 0$$

となるように選ぶことで第 1 項と第 3 項は消せて、残った部分は

$$\begin{aligned}
&-C_0 \log[M_0^2-\beta_1\beta_2 q^2] - \sum_{i=1}^{N} C_i \log[M_i^2-\beta_1\beta_2 q^2] \\
&= -(\log[m^2-\beta_1\beta_2 q^2] + \sum_{i=1}^{N} C_i \log[M_i^2-\beta_1\beta_2 q^2]) \\
&= -(\log m^2 + \log[1-\frac{\beta_1\beta_2 q^2}{m^2}] + \sum_{i=1}^{N} C_i \log M_i^2 + \sum_{i=1}^{N} C_i \log[1-\frac{\beta_1\beta_2 q^2}{M_i^2}]) \\
&= -(\log[1-\frac{\beta_1\beta_2 q^2}{m^2}] + \log m^2 + \sum_{i=1}^{N} C_i \log M_i^2 + \sum_{i=1}^{N} C_i \log[1-\frac{\beta_1\beta_2 q^2}{M_i^2}]) \\
&= -(\log[1-\frac{\beta_1\beta_2 q^2}{m^2}] + \sum_{i=0}^{N} C_i \log m^2 - \sum_{i=1}^{N} C_i \log m^2 + \sum_{i=1}^{N} C_i \log M_i^2) \\
&= -(\log[1-\frac{\beta_1\beta_2 q^2}{m^2}] + \sum_{i=1}^{N} C_i \log[\frac{M_i^2}{m^2}]) \\
&= -(\log[1-\frac{\beta_1\beta_2 q^2}{m^2}] - \log[\frac{\Lambda^2}{m^2}])
\end{aligned}$$

$C_0 = 1$ と $M_0 = m$ と、M_i は q より十分大きいとしているので、5 行目に行く時に最後の項を無視しています。また

$$\log m^2 = \sum_{i=0}^{N} C_i \log m^2 - \sum_{i=1}^{N} C_i \log m^2$$

と出来ることと、C_i の $i = 0 \sim N$ の和は 0 になることを使っています。最後では

$$\sum_{i=1}^{N} C_i \log(\frac{M_i^2}{m^2}) = -\log(\frac{\Lambda^2}{m^2})$$

という置き換えを行っています。これで積分を有限の形になるようにできました。Λ が途中で値を切断する運動量の値に相当するもので、切断のパラメータやカットオフ (cut-off) と呼ばれます。

最後に残りの積分部分も計算して $\Pi(q)$ を求めます。β_2 の積分を行えば、デルタ関数より

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \ \Rightarrow \ \beta_2 = 1 - \beta_1$$

となるので

$$\begin{aligned}
\Pi(q^2) =& -\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^1 d\beta_1 d\beta_2 \delta(1-\beta_1-\beta_2)\beta_1\beta_2\Big(-\log[1-\frac{\beta_1\beta_2 q^2}{m^2}]+\log(\frac{\Lambda^2}{m^2})\Big) \\
=& -\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\int_0^1 d\beta_1 \ \beta_1(1-\beta_1)\Big(-\log[1-\frac{\beta_1(1-\beta_1)q^2}{m^2}]+\log\frac{\Lambda^2}{m^2}\Big) \\
=& -\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\Big(\int_0^1 d\beta_1 \ \beta_1(1-\beta_1)\log(\frac{\Lambda^2}{m^2})-\int_0^1 d\beta_1 \ \beta_1(1-\beta_1)\log[1-\frac{\beta_1(1-\beta_1)q^2}{m^2}]\Big) \\
=& -\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\Big(\int_0^1 d\beta_1 \ \beta_1(1-\beta_1)\log(\frac{\Lambda^2}{m^2})-\int_0^1 d\beta_1 \ \beta_1(1-\beta_1)\log[1-\frac{\beta_1(1-\beta_1)q^2}{m^2}]\Big) \\
=& -\frac{2\kappa_e e^2}{\pi}\Big(\frac{1}{6}\log(\frac{\Lambda^2}{m^2})-\int_0^1 d\beta \ \beta(1-\beta)\log[1-\frac{\beta(1-\beta)q^2}{m^2}]\Big) \\
=& -\frac{\kappa_e e^2}{3\pi}\log(\frac{\Lambda^2}{m^2})+\Pi^R(q^2)
\end{aligned}$$

これが真空偏極テンソルの計算結果です。最後の積分は発散を起こさないので、Π^R はある有限の値なんだ程度に思って問題ないです。結局のところ、切断される運動量による対数発散の形になっていますが、発散を起こす項と有限の値の項とに分けられているのは重要です。

それでは、この結果を電子-電子散乱に使ってみます。真空偏極を挟んだ場合のファインマン図を最低次のファインマン図に加えた不変振幅は

$$\begin{aligned}
M_{fi} =& (-ie\overline{u}_1'\gamma^\mu u_1)iD^{(0)}(q)(-ie\overline{u}_2'\gamma_\mu u_2)+(-ie\overline{u}_1'\gamma^\mu u_1)iD^{(0)}(q)\frac{i\Pi_{\mu\nu}}{4\pi\kappa_e}iD^{(0)}(q)(-ie\overline{u}_2'\gamma^\nu u_2) \\
=& (-ie\overline{u}_1'\gamma^\mu u_1)iD^{(0)}(q)(-ie\overline{u}_2'\gamma_\mu u_2) \\
&+(-ie\overline{u}_1'\gamma^\mu u_1)iD^{(0)}(q)(g_{\mu\nu}q^2-q_\mu q_\nu)\frac{i\Pi(q)}{4\pi\kappa_e}\frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2}(-ie\overline{u}_2'\gamma^\nu u_2) \quad (D^{(0)}(q)=\frac{-4\pi\kappa_e}{q^2}) \\
=& (-ie\overline{u}_1'\gamma^\mu u_1)iD^{(0)}(q)[1-\frac{\kappa_e e^2}{3\pi}\log(\frac{\Lambda^2}{m^2})+\Pi^R(q^2)](-ie\overline{u}_2'\gamma_\mu u_2)
\end{aligned}$$

の $q_\mu q_\nu$ による項はカレントのゲージ不変性

$$q_\mu(e\overline{u}'\gamma^\mu u) = q_\mu J^\mu = 0$$

から消しています (電磁場のカレントなので当然ゲージ不変性を持つ)。これとは別に、運動量の切断 Λ を持つ部分を分離させて

$$M_{fi} = (-ie\overline{u}_1'\gamma^\mu u_1)iD_F(q)[Z_3(1+\Pi^R(q^2))](-ie\overline{u}_2'\gamma_\mu u_2)$$

$$Z_3 = 1 - \frac{\kappa_e e^2}{3\pi}\log(\frac{\Lambda^2}{m^2})$$

というものを作ってみます。そうすると、Z_3 が発散する項を持っており、他の部分は有限の値で構成されています。そして、Π^R は q^2 が小さいとき 0 に近づくので、q^2 が小さければ

$$M_{fi}^{(2)} = Z_3 M_{fi}^{(1)}$$

M_{fi} の添え字 (1) は e^2 のオーダ、(2) は e^4 のオーダを表しています。この発散部分を含んだ Z_3 をくり込み定数 (renormalization constant) と呼んでいます。

くり込み定数を使って何がどうなるのかというと、例えば電荷は (実験的に)

$$e_R = \sqrt{Z_3}e$$

のように決定されます (「くり込み～頂点補正～」も参照)。これから、Z_3 は電荷 (結合定数) に対するくり込み定数と言えます。添え字の R がついたものをくり込まれた電荷、添え字のないものを裸の電荷 (bare charge) と呼びます。重要なのは、実験によって観測される電荷はくり込まれた電荷の方ということです。理由は、観測には常になにかしらの相互作用が働くために、何にも関わっていない裸の電荷は観測できないとされるからです (電荷を観測するには散乱を起こす必要があり、その時に相互作用が生まれる)。

電荷の話は真空偏極と呼ばれる理由と関わっています。電磁気での誘電体と同じような話です。電磁気では、荷電粒子の周りの誘電体の原子や分子が分極して、荷電粒子と逆符号の電荷が荷電粒子の近くに現れ、離れたところに同符号の電荷が現れるということが起きます。この現象は電磁気の範囲では真空では起きないことになっています。これに対して QED では、真空において電子と陽電子の生成、消滅が絶えず起きていると解釈できるため、この現象が真空でも起きます。つまり、マイナスの電荷を持った粒子の周りに、近いところでは陽電子、離れたところでは電子が現れ、真空において分極が起きます。このために真空偏極と呼ばれます。そして、裸の電荷の周りに逆符号の電荷が生じるために、裸の電荷よりも観測できる電荷は小さくなります。これは裸の電荷に近いところで観測したのと遠くで観測したのとでは、真空偏極の分極のために電荷の大きさが変わることを意味します。そのために、結合定数は散乱で交換される運動量 q に依存し、それを running coupling constant と呼びます。QED での場合は q を大きくする、つまり高エネルギーで粒子を電荷に突入させると、電荷を小さくする逆符号の電荷の層を突破するので電荷の値は増えていきます。別の言い方をすれば、電荷に近づけば近づくほど電荷は大きくなります。この話はくり込み群方程式と呼ばれるものによって示されます (場の量子論の「くり込み群方程式～QED～」参照)。

くり込まれた電荷の考えによって無限大の発散は回避されます。つまり、発散を含んだ項を物理量の中にくり込んでしまい、発散なんかなかったものにしてしまいます (くり込んでしまうことで残るのは有限な項だけ)。