くり込み～イントロ～

摂動論による不変振幅 M (S 行列) の最低次の計算をいくつかしましたが、オーダをあげたときに起きる大問題を簡単にまとめておきます。

ここでは、電子-陽電子散乱での不変振幅が e^4(もしくは α^2) となる 4 次のオーダを考えます。このときファインマン図は 18 個書けます (最終的に寄与しないものを省いて)。これだけでも面倒なことこの上ないですが、ここでの本題は 18 個のファインマン図の中に積分が発散するものがあることです。これがファインマン図のところで触れたループがある場合に起こる面倒な点です。不変振幅全部を書くのも面倒なので発散する積分部分だけ示しておきます。

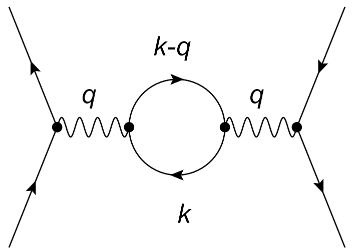
積分すべき運動量 k の積分範囲の上限は無限大にとっており、そのために発散が起きてしまいます。無限大にとる理由は計算すればそうなるからです。もしくはファインマン図の意味合いからも言えます。下の各ファインマン図を見てわかるように、ループ部分は粒子の生成と消滅のセットになっていることから運動量を好き勝手に選べるために、運動量のあらゆる値を持たせる必要があるからです。別の言い方をすれば、無限大の積分が出てくるループを持つ図は、実粒子から仮想粒子が出て、最後に実粒子に戻っていくという過程を通っており、仮想粒子はあらゆる運動量を持っていて構わないために (例えば on shell 条件がない)、全ての運動量にわたって積分する必要があると言えます。

オーダを上げた電子-陽電子散乱のファインマン図の中から発散する積分を含む部分だけを抜き出していきます。外線は無関係なので、内線部分だけを見ればいいです。

- 真空偏極 (vacuum polarization)

  電子によるループがある場合

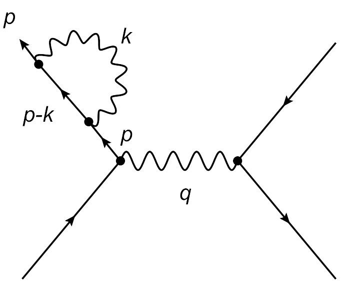
$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^\alpha\gamma_\alpha - m + i\epsilon}(-i\gamma_\nu)\frac{i}{(k-q)^\beta\gamma_\beta - m + i\epsilon}(-i\gamma_\mu)$$



- 自己エネルギー (self energy)

  電子の伝播関数に光子の放出と吸収がくっついてる場合

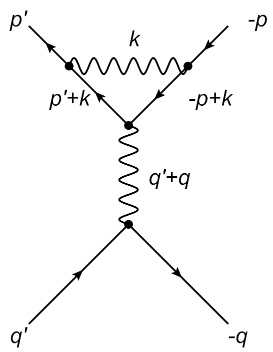
$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{(p-k)^\alpha\gamma_\alpha - m + i\epsilon}(-i\gamma_\mu)\frac{-i4\pi\kappa_e g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}(-i\gamma_\nu)$$



- 頂点補正 (vertex correction)

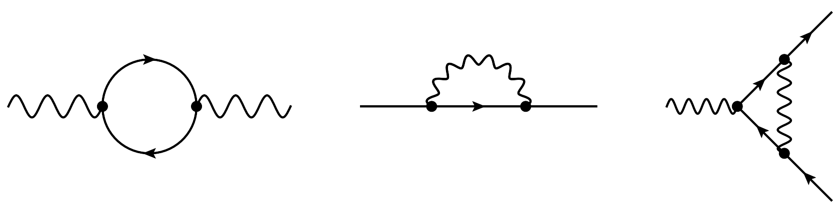
  頂点の部分にループがある場合

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-i\gamma_\alpha)\frac{i}{(p'+k)^\rho\gamma_\rho - m + i\epsilon}(-i\gamma_\mu)\frac{i}{(k-p)^\lambda\gamma_\lambda - m + i\epsilon}(-i\gamma_\beta)\frac{-i4\pi\kappa_e g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon}$$



これらは k 積分での無限大において発散します。不変振幅に対する 18 個のファインマン図のうちにはこれらの他にも発散する形のものはありますが、発散の仕方は 3 種類の形で出てきます。

つまり、発散に関わる部分は「ファインマン図」で言ったように



これらの部分を真空偏極、自己エネルギー、頂点補正と呼んでおり、QED ではこれら 3 つ以外にあらゆるオーダで発散する図は存在しないことが証明されています。これによって QED はくり込み可能な理論になっています (詳しいことは場の量子論の「くり込み」参照)。積分を見れば真空偏極は 2 次発散、自己エネルギーは 1 次発散、頂点補正は対数発散になっています (分子が d^4k で、分母にそれぞれ k^2, k^3, k^4 の項があるため)。不変振幅において発散してしまうこれらをどうにかすることをくり込み (renormalization) といいます。

ちなみに真空偏極の場合、「ファインマン図」でも言ったように本来は $-\mathrm{tr}$ がつきます。