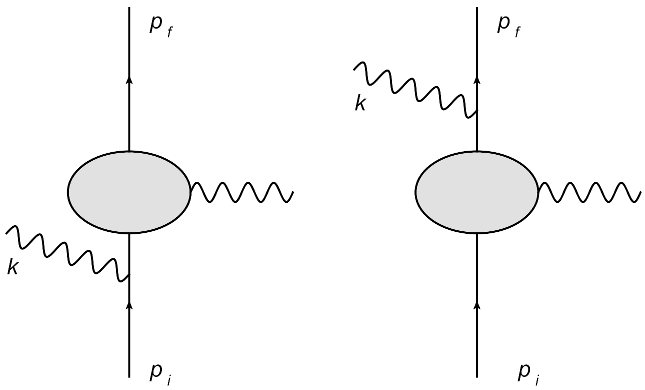
赤外発散

「電子の g 因子」での $\mu\to 0$ の赤外発散は、制動放射の寄与によって散乱振幅において消えることを見ていきます。

　計算のために導入した光子の質量 μ の $\mu\to 0$ での赤外発散が、物理として問題にならないことを見ていきます。そのために、弾性散乱と低エネルギーの光子を放出する制動放射 (soft bremsstrahlung) とを実験の限界のために区別して測定できないことを利用します。つまり、区別できない散乱過程は全て足すとして、散乱確率に低エネルギーの制動放射の寄与を加えるべきと考えます。

　低エネルギーの制動放射を加えるとどうなるのか見るために、制動放射の振幅を求めます。「電子の g 因子」と同じ状況を使います。対応する制動放射のファインマン図とファインマン則から散乱振幅は

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}=\overline{u}(p_f,s_f)(\mathcal{M}_0(p_f,p_i-k)&\frac{i}{(p_i-k)^\alpha\gamma_\alpha-m}(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^{(\lambda)}\\
&+(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^{(\lambda)}\frac{i}{(p_f+k)^\alpha\gamma_\alpha-m}\mathcal{M}_0(p_f+k,p_i))u(p_i,s_i)
\end{aligned}
$$



$\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ は電磁場の偏極ベクトルです ($\epsilon_\mu^{(\lambda)},\ \lambda=1,2$)。制動放射での外部のクーロンポテンシャルによる部分 (丸部分) を $\mathcal{M}_0$ と書いています。$\mathcal{M}_0$ は頂点に対応するので、何の補正もなければ $-ie\gamma_0$ です (クーロンポテンシャルなので電磁場 A_μ の A_0 だから)。

　飛び出す光子の寄与が小さいとするので

$$
\mathcal{M}_0(p_f,p_i-k)\simeq\mathcal{M}_0(p_f+k,p_i)\simeq\mathcal{M}_0(p_f,p_i)
$$

として、$|\boldsymbol{k}|$ は $|\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i|$ よりも十分小さいとします (k_μ は $(p_f-p_i)_\mu$ でないことに注意)。これによって

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}=-ie\overline{u}(p_f,s_f)\mathcal{M}_0(p_f,p_i)(&\frac{i((p_i-k)^\alpha\gamma_\alpha+m)}{(p_i-k)^2-m^2}\gamma^\mu\epsilon_\mu\\
&+\gamma^\mu\epsilon_\mu\frac{i((p_f+k)^\alpha\gamma_\alpha+m)}{(p_f+k)^2-m^2})u(p_i,s_i)
\end{aligned}
$$

$\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ は ϵ_μ と書いています。分子に出てくる k^α は今の近似から無視します。そして、ディラック方程式を使うことで分子は

$$
\begin{aligned}
(p_i^\alpha\gamma_\alpha + m)\gamma^\mu\epsilon_\mu u(p_i,s_i) &= (2g^{\alpha\mu}p_{i\alpha} - \gamma^\mu\gamma^\alpha p_{i\alpha} + \gamma^\mu m)\epsilon_\mu u(p_i,s_i) \\
&= (2p_i^\mu + \gamma^\mu(-p_i^\alpha\gamma_\alpha + m))\epsilon_\mu u(p_i,s_i) \\
&= (2p_i^\mu\epsilon_\mu - \gamma^\mu\epsilon_\mu(p_i^\alpha\gamma_\alpha - m))u(p_i,s_i) \\
&= 2p_i^\mu\epsilon_\mu u(p_i,s_i)
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\overline{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu\epsilon_\mu(p_f^\alpha\gamma_\alpha + m) = \overline{u}(p_f,s_f)2p_f^\mu\epsilon_\mu
$$

分母は on-shell 条件 $p^2 = m^2$ から

$$
\begin{aligned}
&(p_i - k)^2 - m^2 = p_i^2 + k^2 - 2p_i\cdot k - m^2 = -2p_i\cdot k \\
&(p_f + k)^2 - m^2 = 2p_f\cdot k
\end{aligned}
$$

これらから $\mathcal{M}$ は

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} \simeq&\ -ie\overline{u}(p_f,s_f)\mathcal{M}_0(p_f,p_i)(\frac{2ip_i^\mu\epsilon_\mu}{-2p_i\cdot k} + \frac{2ip_f^\mu\epsilon_\mu}{2p_f\cdot k})u(p_i,s_i) \\
&= e\overline{u}(p_f,s_f)\mathcal{M}_0(p_f,p_i)(\frac{p_f^\mu\epsilon_\mu}{p_f\cdot k} - \frac{p_i^\mu\epsilon_\mu}{p_i\cdot k})u(p_i,s_i)
\end{aligned} \tag{1}
$$

$\overline{u}, u$ で挟まれている部分を寄与が加わった頂点と考えます。
　頂点補正 Γ^μ と同じように

$$
\overline{u}\Gamma'^\mu(p_f,p_i)u = \overline{u}(\gamma^\mu F_1'(q) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2'(q))u
$$

として、カレントが変更されるとします $(q_\mu = (p_f - p_i)_\mu)$。このカレントを「電子の g 因子」でのカレントに加えます。今はクーロンポテンシャルとしているので $\mu = 0$ にし、p_f, p_i の差はほとんどないとして q_ν の項は無視して

$$
\overline{u}\Gamma'^0(q)u \simeq \overline{u}\gamma^0 F_1'(q)u
$$

$\mathcal{M}_0(p_f,p_i)$ の詳細は必要ないので省いて、(1) から

$$
F_1'(q) = \frac{p_f\cdot\epsilon}{p_f\cdot k} - \frac{p_i\cdot\epsilon}{p_i\cdot k}
$$

後は実験との対応を取るために、偏極ベクトルの和と実験の限界値の範囲で $\boldsymbol{k}$ 積分を行います。

散乱確率に対応させるために $|F'_1(k)|^2$ とし、偏極ベクトルの和と積分をつけて

$$I = \int \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3}\frac{4\pi\kappa_b^2\kappa_e}{2\omega V}\sum_{\lambda=1}^{2}|F'_1(k)|^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{4\pi\kappa_b^2\kappa_e}{2\omega}\sum_{\lambda=1}^{2}|\frac{p_f\cdot\epsilon^{(\lambda)}}{p_f\cdot k} - \frac{p_i\cdot\epsilon^{(\lambda)}}{p_i\cdot k}|^2 \tag{2}$$

体積 V の箱による規格化と電磁場の規格化を加えています。$\boldsymbol{k}$ 積分は、弾性散乱と制動放射を区別できない実験の限界値 ΔE を上限として実行します。

偏極ベクトルの和を求めます。そのために、不変振幅のゲージ不変性を使います。電磁場いる不変振幅 $\mathcal{M}$ は電磁場の偏極ベクトルを分離して $\epsilon_\mu\mathcal{M}^\mu$ と書けます。これの偏極の和を取ったものの絶対値は

$$|\epsilon_\mu\mathcal{M}^\mu|^2 = \sum_{\lambda=1}^{2}(\epsilon_\mu^{(\lambda)}\mathcal{M}^\mu)(\epsilon_\nu^{(\lambda)}\mathcal{M}^\nu)^* = \sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)}\mathcal{M}^\mu(\mathcal{M}^\nu)^*$$

ローレンンツ変換によって $k^\mu = (k_0,0,0,k_0)$ となる座標系にしているとして、直交するように偏極ベクトルは $\epsilon_\mu^{(1)} = (0,1,0,0)$, $\epsilon_\mu^{(2)} = (0,0,1,0)$ とします。これによって

$$|\epsilon_\mu\mathcal{M}^\mu|^2 = \mathcal{M}^1(\mathcal{M}^1)^* + \mathcal{M}^2(\mathcal{M}^2)^*$$

そして、「コンプトン散乱」の補足で触れたようにゲージ不変性は $k_\mu\mathcal{M}^\mu = 0$ を要求します。そうすると

$$k_0\mathcal{M}^0 - k_3\mathcal{M}^3 = 0$$

なので

$$|\epsilon_\mu\mathcal{M}^\mu|^2 = \mathcal{M}^1(\mathcal{M}^1)^* + \mathcal{M}^2(\mathcal{M}^2)^* + \mathcal{M}^3(\mathcal{M}^3)^* - \mathcal{M}^1(\mathcal{M}^1)^* = -\mathcal{M}_\mu(\mathcal{M}^\mu)^*$$

よって

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)}\mathcal{M}^\mu(\mathcal{M}^\nu)^* = -g_{\mu\nu}\mathcal{M}^\mu(\mathcal{M}^\nu)^* \ \Rightarrow\ \sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu}$$

となります。ただし、不変振幅のゲージ不変性を使っているために一般的な結果ではないです (場の量子論の「マクスウェル方程式」参照)。

これを使えば

$$\sum_{\lambda=1,2} = \epsilon_\mu^{(\lambda)}p^\mu\epsilon_\nu^{(\lambda)}p^{\nu\prime} = -p^\mu p'_\mu$$

なので

$$\sum_\lambda \Big|\frac{p_f\cdot\epsilon^{(\lambda)}}{p_f\cdot k}-\frac{p_i\cdot\epsilon^{(\lambda)}}{p_i\cdot k}\Big|^2 = \frac{(p_f\cdot\epsilon^{(\lambda)})^2}{(p_f\cdot k)^2}+\frac{(p_i\cdot\epsilon^{(\lambda)})^2}{(p_i\cdot k)^2}+\frac{2(p_f\cdot\epsilon^{(\lambda)})(p_i\cdot\epsilon^{(\lambda)})}{(p_f\cdot k)(p_i\cdot k)}$$
$$= \frac{-m^2}{(p_f\cdot k)^2}+\frac{-m^2}{(p_i\cdot k)^2}+\frac{2p_f\cdot p_i}{(p_f\cdot k)(p_i\cdot k)} \tag{3}$$

非相対論的極限 $|\boldsymbol{p}|\ll m$ を取ることにして ($\boldsymbol{p}$ の 3 次以上を無視)、$p\cdot k$ は

$$\begin{aligned} p\cdot k = E\omega-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} =& \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}\omega-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} \\ =& m\sqrt{1+\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{m^2}}\omega-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} \\ \simeq& m\omega+\frac{|\boldsymbol{p}|^2\omega}{2m}-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$p_f\cdot p_i$ は

$$\begin{aligned} p_f\cdot p_i &= m^2\sqrt{1+\frac{|\boldsymbol{p}_f|^2}{m^2}}\sqrt{1+\frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{m^2}}-\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{p}_i \\ &\simeq m^2(1+\frac{|\boldsymbol{p}_f|^2}{2m^2})(1+\frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{2m^2})-\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{p}_i \\ &\simeq m^2+\frac{|\boldsymbol{p}_f|^2}{2}+\frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{2}-\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{p}_i \\ &= m^2+\frac{1}{2}(|\boldsymbol{p}_f|^2+|\boldsymbol{p}_i|^2)-\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{p}_i \end{aligned}$$

これらから、$(p\cdot k)^2$ は

$$(p\cdot k)^2\simeq(m\omega+\frac{|\boldsymbol{p}|^2\omega}{2m}-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2\simeq(m\omega)^2+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2-2m\omega\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}+|\boldsymbol{p}|^2\omega^2$$

$(p_i\cdot k)(p_f\cdot k)$ は

$$\begin{aligned} (p_i\cdot k)(p_f\cdot k) &= (m\omega+\frac{|\boldsymbol{p}_i|^2\omega}{2m}-\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k})(m\omega+\frac{|\boldsymbol{p}_f|^2\omega}{2m}-\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k}) \\ &= (m\omega)^2+\frac{|\boldsymbol{p}_f|^2\omega^2}{2}-m\omega\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k}+\frac{|\boldsymbol{p}_i|^2\omega^2}{2}-m\omega\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k}+(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

$(p_i\cdot k)^2(p_f\cdot k)^2$ は

$$
\begin{aligned}
(p_i \cdot k)^2 (p_f \cdot k)^2 &= ((m\omega)^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2m\omega \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k} + |\boldsymbol{p}_f|^2 \omega^2)((m\omega)^2 + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2m\omega \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + |\boldsymbol{p}_i|^2 \omega^2) \\
&= (m\omega)^4 + (m\omega)^2 (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2(m\omega)^2 m\omega \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + (m\omega)^2 |\boldsymbol{p}_i|^2 \omega^2 + (m\omega)^2 (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2 \\
&\quad - (m\omega)^2 2m\omega \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k} + (m\omega)^2 |\boldsymbol{p}_f|^2 \omega^2 \\
&= (m\omega)^4 + (m\omega)^2 ((\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2) - 2(m\omega)^2 m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) + (m\omega)^2 \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)
\end{aligned}
$$

これらを (3) に使えば、最初の 2 項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{-m^2}{(m\omega)^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2m\omega \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k} + |\boldsymbol{p}_f|^2 \omega^2} + \frac{-m^2}{(m\omega)^2 + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2m\omega \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + |\boldsymbol{p}_i|^2 \omega^2} \\
&= \frac{-m^2 \big((m\omega)^2 + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2m\omega \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + |\boldsymbol{p}_i|^2 \omega^2 + (m\omega)^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2m\omega \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k} + |\boldsymbol{p}_f|^2 \omega^2\big)}{(m\omega)^4 + (m\omega)^2 \big((\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2\big) - 2(m\omega)^2 m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) + (m\omega)^2 \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)} \\
&= \frac{-m^2 \big(2(m\omega)^2 + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) + \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)\big)}{(m\omega)^4 + (m\omega)^2 \big((\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2\big) - 2(m\omega)^2 m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) + (m\omega)^2 \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)} \\
&= \frac{-m^2 (m\omega)^2 - m^2 ((m\omega)^2 + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2 - 2m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) + \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2))}{(m\omega)^2 \big((m\omega)^2 + ((\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2) - 2m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) + \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)\big)} \\
&= \frac{-m^2}{(m\omega)^2 + ((\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2) - 2m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) + \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)} - \frac{1}{\omega^2} \\
&\simeq \frac{-m^2}{(m\omega)^2} (1 + \frac{(\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})^2}{(m\omega)^2} - \frac{2m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})}{(m\omega)^2} + \frac{\omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2}{(m\omega)^2}) - \frac{1}{\omega^2}
\end{aligned}
$$

残りの項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{2(m^2 + \frac{1}{2}(|\boldsymbol{p}_f|^2 + |\boldsymbol{p}_i|^2) - \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{p}_i)}{(m\omega)^2 + \frac{|\boldsymbol{p}_f|^2 \omega^2}{2} - m\omega \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k} + \frac{|\boldsymbol{p}_i|^2 \omega^2}{2} - m\omega \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})} \\
&= \frac{4m^2 + 2(|\boldsymbol{p}_f|^2 + |\boldsymbol{p}_i|^2) - 4\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{p}_i}{2(m\omega)^2 + 2(\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) - 2m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k}) + \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)} \\
&= \frac{1}{2(m\omega)^2} (4m^2 + 2(|\boldsymbol{p}_f|^2 + |\boldsymbol{p}_i|^2) - 4\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{p}_i) \\
&\quad \times (1 - \frac{(\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})}{(m\omega)^2} - \frac{m\omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})}{(m\omega)^2} + \frac{\omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)}{2(m\omega)^2}) \\
&= \frac{1}{(m\omega)^2} (2m^2 - \frac{2m^2 (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})}{(m\omega)^2} - \frac{2m^3 \omega (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{k})}{(m\omega)^2} + \frac{m^2 \omega^2 (|\boldsymbol{p}_i|^2 + |\boldsymbol{p}_f|^2)}{(m\omega)^2} \\
&\quad + (|\boldsymbol{p}_f|^2 + |\boldsymbol{p}_i|^2) - 2\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{p}_i)
\end{aligned}
$$

全部足して

$$
\begin{aligned}
&\frac{-m^2}{(m\omega)^2}\Big(1+\frac{(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k})^2+(\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k})^2}{(m\omega)^2}-\frac{2m\omega(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k})}{(m\omega)^2}+\frac{\omega^2(|\boldsymbol{p}_i|^2+|\boldsymbol{p}_f|^2}{(m\omega)^2}\Big)-\frac{1}{\omega^2}\\
&\qquad+\frac{1}{(m\omega)^2}\Big(2m^2-\frac{2m^2(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k})}{(m\omega)^2}-\frac{2m^3\omega(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k})}{(m\omega)^2}+\frac{m^2\omega^2(|\boldsymbol{p}_i|^2+|\boldsymbol{p}_f|^2)}{(m\omega)^2}\\
&\qquad+(|\boldsymbol{p}_f|^2+|\boldsymbol{p}_i|^2)-2\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{p}_i\Big)\\
&=\frac{1}{(m\omega)^2}\Big(m^2+\frac{-m^2((\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k})^2+(\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k})^2)}{(m\omega)^2}-\frac{2m^2(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k})}{(m\omega)^2}\\
&\qquad+|\boldsymbol{p}_f|^2+|\boldsymbol{p}_i|^2-2\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{p}_i\Big)-\frac{m^2}{m^2\omega^2}\\
&=\frac{1}{(m\omega)^2}(\frac{-m^2((\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k})^2+(\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k})^2)}{(m\omega)^2}-\frac{2m^2(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{k})}{(m\omega)^2}+|\boldsymbol{p}_f|^2+|\boldsymbol{p}_i|^2-2\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{p}_i)\\
&=\frac{1}{(m\omega)^2}(-\frac{m^2((\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)\cdot\boldsymbol{k})^2}{(m\omega)^2}+(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)^2)\\
&=\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(m\omega)^2}(1-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2})\qquad(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)
\end{aligned}
$$

よって、偏極ベクトルの和は

$$
\sum_\lambda\Big|\frac{p_f\cdot\epsilon^{(\lambda)}}{p_f\cdot k}-\frac{p_i\cdot\epsilon^{(\lambda)}}{p_i\cdot k}\Big|^2\simeq\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(m\omega)^2}(1-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2})
$$

となります。

積分を実行します。$|\boldsymbol{k}|^2=\omega^2-\mu^2$ として、質量 μ を導入します。積分は $\omega<\Delta E$ の範囲で

$$
\begin{aligned}
I&=2\pi\kappa_b^2\kappa_e\int_{\omega<\Delta E}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(m\omega)^2}(1-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2})\\
&=2\pi\kappa_b^2\kappa_e\int_{\omega<\Delta E}\frac{|\boldsymbol{k}|^2d|\boldsymbol{k}|d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(m\omega)^2}(1-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2})\\
&=2\pi\kappa_b^2\kappa_e\int_{\omega<\Delta E}\frac{|\boldsymbol{k}|^2d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{\omega(m\omega)^2}(1-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2})\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\\
&=(2\pi)^2\kappa_b^2\kappa_e\int_\mu^{\Delta E}\frac{d\omega}{(2\pi)^3}\omega\sqrt{\omega^2-\mu^2}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{\omega(m\omega)^2}\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta(1-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2})\\
&=\kappa_b^2\kappa_e\int_\mu^{\Delta E}\frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{\omega^2-\mu^2}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(m\omega)^2}\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta(1-\frac{|\boldsymbol{q}|^2|\boldsymbol{k}|^2\cos^2\theta}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2})\\
&=\kappa_b^2\kappa_e\int_\mu^{\Delta E}\frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{\omega^2-\mu^2}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(m\omega)^2}(2-\frac{2}{3}\frac{\omega^2-\mu^2}{\omega^2})\\
&=\kappa_b^2\kappa_e\int_\mu^{\Delta E}\frac{d\omega}{\pi}\sqrt{\omega^2-\mu^2}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(m\omega)^2}(1-\frac{1}{3}\frac{\omega^2-\mu^2}{\omega^2})\\
&=\frac{\kappa_b^2\kappa_e|\boldsymbol{q}|^2}{\pi m^2}\int_\mu^{\Delta E}\frac{d\omega}{\omega^2}\sqrt{\omega^2-\mu^2}(1-\frac{1}{3}\frac{\omega^2-\mu^2}{\omega^2})
\end{aligned}
$$

積分の下限が μ になっているのは、$|\boldsymbol{k}|^2=\omega^2-\mu^2$ での $|\boldsymbol{k}|=0$ で $\omega=\mu$ になるからです。ω 積分は面倒なので、公式扱いして $(\omega^2>\mu^2)$

$$\int d\omega\frac{\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{\omega^2}=-\frac{\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{\omega}+\log|\omega+\sqrt{\omega^2-\mu^2}|$$
$$\int d\omega\frac{(\omega^2-\mu^2)^{3/2}}{\omega^4}=-\frac{(\omega^2-\mu^2)^{3/2}}{3\omega^3}-\frac{(\omega^2-\mu^2)^{1/2}}{\omega}+\log|\omega+\sqrt{\omega^2-\mu^2}|$$

を使えば

$$\begin{aligned}\Big[-\frac{\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{\omega}+\log|\omega+\sqrt{\omega^2-\mu^2}|\Big]_{\mu}^{\Delta E} &= -\frac{\sqrt{\Delta E^2-\mu^2}}{\Delta E}+\log|\Delta E+\sqrt{\Delta E^2-\mu^2}|-\log\mu\\ &= \log\frac{2\Delta E}{\mu}-1\end{aligned}$$

μ を 0 に出来る項は $\mu=0$ にしています。もう 1 つは

$$\begin{aligned}&\Big[-\frac{(\omega^2-\mu^2)^{3/2}}{3\omega^3}-\frac{(\omega^2-\mu^2)^{1/2}}{\omega}+\log|\omega+\sqrt{\omega^2-\mu^2}|\Big]_{\mu}^{\Delta E}\\ &= -\frac{(\Delta E^2-\mu^2)^{3/2}}{3\Delta E^3}-\frac{(\Delta E^2-\mu^2)^{1/2}}{\Delta E}+\log|\Delta E+\sqrt{\Delta E^2-\mu^2}|\\ &\quad+\frac{(\mu^2-\mu^2)^{3/2}}{3\mu^3}+\frac{(\mu^2-\mu^2)^{1/2}}{\mu}-\log|\mu+\sqrt{\mu^2-\mu^2}|\\ &= -\frac{1}{3}-1+\log[2\Delta E]-\log\mu\\ &= -\frac{4}{3}+\log\frac{2\Delta E}{\mu}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}I &= -\frac{\kappa_b^2\kappa_e|\boldsymbol{q}|^2}{3\pi m^2}\Big(-\frac{4}{3}+\log\frac{2\Delta E}{\mu}\Big)+\frac{e^2|\boldsymbol{q}|^2}{\pi m^2}\Big(\log\frac{2\Delta E}{\mu}-1\Big)\\ &= \frac{\kappa_b^2\kappa_e|\boldsymbol{q}|^2}{\pi m^2}\Big(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\log\frac{2\Delta E}{\mu}+\log\frac{2\Delta E}{\mu}-1\Big)\\ &= \frac{\kappa_b^2\kappa_e|\boldsymbol{q}|^2}{\pi m^2}\Big(\frac{2}{3}\log\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{9}\Big)\\ &= \frac{2\kappa_b^2\kappa_e|\boldsymbol{q}|^2}{3\pi m^2}\Big(\log\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6}\Big)\end{aligned}$$

となります。そして、今のファインマン図には k^μ が出てる頂点からの e、その電磁場からの κ_b^{-1} がいるので

$$\kappa_b^{-2}e^2I=\frac{2\kappa_e e^2|\boldsymbol{q}|^2}{3\pi m^2}\Big(\log\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6}\Big) \tag{4}$$

「電子の g 因子」で見たように、真空偏極、自己エネルギー、頂点補正が加わったカレントは

$$
\begin{aligned}
&\overline{\psi}_{p'}(\gamma_\mu(1+\Pi+F_1)+\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^\nu F_2)\psi_p\\
&\quad=\overline{\psi}_{p'}(\gamma_\mu(1-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}+\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}(\log\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}))+\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^\nu F_2)\psi_p
\end{aligned}
$$

F_2 には μ がいないので、括弧内の第 1 項だけを使います。散乱確率に対応させるために絶対値の 2 乗にして (4) との和を取ると、α のオーダで

$$
\begin{aligned}
&|1-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}+\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}(\log\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8})|^2+\frac{2\alpha|\boldsymbol{q}|^2}{3\pi m^2}(\log\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6})\\
&\quad\simeq 1+\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}(\log\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8})-\frac{2\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}-\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}(\log\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6})\\
&\quad=1+\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}(\log\frac{m}{2\Delta E}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}+\frac{5}{6})
\end{aligned}
$$

このように μ は消え、その代わりに実験の限界値 ΔE が現れます。よって、制動放射を考慮することで散乱振幅には μ による赤外発散がなくなり、実験的に決まる ΔE の式になります。