

伝播関数

QED の散乱計算で中心となる伝播関数を導出します。ディラック方程式のグリーン関数に条件を与えて、それを求めます。

表記は相対論的量子力学の「クライン・ゴールドン方程式」で与えているものを使っていきます。

自然単位系を使っていきます。自然単位系は c, \hbar を 1 とする単位系です (場の量子論の「表記と定義」参照)。

ディラックの空孔理論に従う散乱計算を設定します。空孔理論では正エネルギーの粒子はディラックの海によって負エネルギーになれないとされますが、ディラック方程式には正負のエネルギー解がいるために、区別せずに一緒に散乱させると正負のエネルギーは混ざれてしまいます。なので、正負のエネルギーの状態がそれぞれ伝わっていくように設定します。

そのために、シュテュッケルベルク (Stueckelberg) とファインマン (Feynman) による考えを使います。簡単に言えば、正エネルギーを持つ粒子は過去から未来へ、負エネルギーを持つ粒子は未来から過去へ進むという考えです。現実の粒子は正エネルギーを持つので、負エネルギーを持つ粒子が時間を逆行するとしても最終的な結果に現れなければ問題にはなりません。

この考え方を簡単に言っておきます。陽電子 (反粒子) が、4 元運動量 p を持っていて、何かで散乱され p' になるとします。これはディラックの海に $-p$ の孔ができ、その後 $-p'$ の孔ができることです。一方で、孔ができることを負エネルギーの粒子の移動として見れば、 $-p'$ の粒子が $-p$ になったと見えます。

このように、負エネルギーの電子は、陽電子側から見れば散乱された後の状態から始まって、最初の状態が後になって出てくるようにも見えます。このことから、陽電子の終状態を負エネルギー電子の始状態で表し、始状態を陽電子の終状態で表してやればいいという考えになります。なので、電子と陽電子の散乱を考えるときには、電子は時間を過去から未来へ進む粒子、陽電子をマイナスのエネルギーを持って未来から過去へ進む電子として考えればよいとなります。

この考え方に従うと、散乱を扱うのに必要となるのは、正負のエネルギーに対して時間順序を持ったグリーン関数です。これを作っていきます。

QED では電磁相互作用によって粒子が散乱されるとするので、電磁場ありのディラック方程式

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu - q\kappa_b^{-1}A_\mu(x)) - m)\psi(x) = 0 \quad (1)$$

を使います。自然単位系なので c, \hbar は消えています。 q は電荷で、電子なら素電荷 e から $q = -e$ です。 $A^\mu = (A_0, \mathbf{A}) = (\kappa_b\Phi, \mathbf{A})$ は電磁場の 4 元ベクトルポテンシャルです。煩わしいので $\kappa_b^{-1}A_\mu$ を A_μ とします。「散乱でのグリーン関数」で見たように、この解は

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)S_0(x', x) = \delta^4(x' - x) \quad (\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}) \quad (2)$$

を満たすグリーン関数 S_0 で与えられます。ディラック方程式での波動関数は 4 成分スピノールなので、 S_0 は 4×4 行列です。デルタ関数は

$$\delta^4(x' - x) = \delta(t' - t)\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$$

と書いています。 S_0 によって解は

$$\psi(x') = \phi(x') + q \int d^4x S_0(x', x) \gamma_\mu A^\mu(x) \psi(x) \quad (3)$$

と与えられます。 ϕ は電磁場のないディラック方程式の解です。これが解になるのは

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi(x') &= (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\phi(x') + q \int d^4x (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)S(x', x)\gamma_\mu A^\mu(x)\psi(x) \\ &= q \int d^4x \delta^4(x' - x)\gamma_\mu A^\mu(x)\psi(x) \\ &= q\gamma_\mu A^\mu(x')\psi(x') \end{aligned}$$

として確かめられます。

$S_0(x', x)$ を求めます。 $S_0(x', x)$ は $x'^\mu - x^\mu$ に依存するとして (ディラック方程式が並進不変性を持つから)、フーリエ変換を

$$S_0(x', x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} S_0(p) \quad (4)$$

と定義します。これを (2) に入れば

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (p_\mu \gamma^\mu - m) e^{-ip(x'-x)} S_0(p) = \delta^4(x' - x)$$

右辺のデルタ関数は

$$\delta^4(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)}$$

なので

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (p_\mu \gamma^\mu - m) e^{-ip(x'-x)} S_0(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)}$$

これを満たすには

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)S_0(p) = 1$$

ここでの 1 は 4×4 単位行列のことです (単位行列は 1 と書くので式を見て行列なのかどうか判断してください)。よって、 $S_0(p)$ は

$$S_0(p) = \frac{1}{p_\mu \gamma^\mu - m} \quad (5)$$

分母に行列があると不便なので、分子にいるように書き換えます。ガンマ行列の計算から

$$p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p^2$$

なので

$$(p_\mu \gamma^\mu + m)(p_\nu \gamma^\nu - m) = (p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m^2) = p^2 - m^2$$

となることを利用すれば

$$\begin{aligned} (p_\mu \gamma^\mu - m)S_0(p) &= 1 \\ (p^2 - m^2)S_0(p) &= p_\mu \gamma^\mu + m \\ S_0(p) &= \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{p^2 - m^2} \quad (p^2 \neq m^2) \end{aligned} \quad (6)$$

このように分子にガンマ行列を持ってこれます。(5)で $p_\mu \gamma^\mu + m$ を使って変形しても同じ結果になります。2行目の左辺で $p^2 - m^2$ は行列でないので(単位行列しかないから)、3行目の分母は行列ではないです。また、(5)は行列 $p_\mu \gamma^\mu - m$ の逆行列であることと、単位行列の逆行列は単位行列ということ踏まえれば、(5)で計算しても分母が行列でなくなるのが分かります。

(6)を(4)に入れて

$$\begin{aligned} S_0(x', x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{p^2 - m^2} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[-ip_0(t' - t)] \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{p^2 - m^2} \end{aligned} \quad (7)$$

p_0 積分を実行しようとする、極が現れます。極となる $p^2 = m^2$ は $p_0^2 = p^2 + m^2$ なので

$$p_0 = \pm E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

このように、 $\pm E$ という正負のエネルギーの両方が極として出てきます。というわけで、この極の避け方が重要になります(グリーン関数への条件)。今は、過去から未来への $t' > t$ では正エネルギー、未来から過去への $t' < t$ では負エネルギーとして作ろうとしています。なので、極の拾い方をこれに対応させます。

p_0 の複素平面を考えます。時間を $t' > t$ としたとき、(7)において $t' - t > 0$ で、 $1/(p^2 - m^2)$ は $|p_0| \rightarrow \infty$ で0になります。このため、ジョルダンの補題から、複素平面の下半円の積分経路は積分に寄与しないです(数学の「複素積分」参照)。なので、 $-\infty$ から $+\infty$ の積分経路に下半円をつけます。

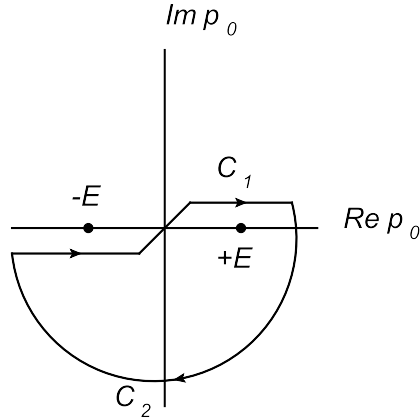


図 1

実軸上の極の避け方を設定します。 $t' > t$ では正エネルギーの極を拾うとして、実軸と下半円による経路の内側に $p_0 = +E$ の極が入り、 $p_0 = -E$ は入れないようにします。つまり、 p_0 積分の積分経路は複素平面上で、 $p_0 = \pm E$ の極を避けて $-\infty$ から $+\infty$ に行き (C_1)、そこから下半円を辿って $-\infty$ に戻る (C_2) というものになります (図 1)。このようにして、時間が $t' > t$ では正エネルギーの極のみを内側に含む経路を使って積分を実行します。

図 1 の積分経路で p_0 積分を実行します。(7) の積分経路 C_F^+ にして

$$\begin{aligned} \int_{C_F^+} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[-ip_0(t' - t)] \frac{p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i + m}{p_0^2 - E^2} \quad (E = +\sqrt{p^2 + m^2}) \\ = \int_{C_F^+} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[-ip_0(t' - t)] \frac{p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i + m}{(p_0 - E)(p_0 + E)} \end{aligned}$$

これは留数定理から簡単に求められます。1位の極での留数 Res は

$$\int_C dz f(z) = 2\pi i \text{Res}(f; a), \quad \text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$$

と定義されます。 C は反時計周りの閉じた経路です。なので、今は留数が

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, E) &= \lim_{z \rightarrow E} (z - E) \frac{1}{2\pi} \exp[-iz \cdot (t' - t)] \frac{z\gamma^0 + p_i\gamma^i + m}{(z - E)(z + E)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp[-iE(t' - t)] \frac{E\gamma^0 + p_i\gamma^i + m}{E + E} \end{aligned}$$

となり、作った積分経路は時計周りなので符号を反転させて

$$\int_{C_F^+} dz f(z) = -2\pi i \text{Res}(f, E)$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{C_F^+} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[-ip_0(t' - t)] \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} &= -2\pi i \frac{1}{2\pi} \exp[-iE(t' - t)] \frac{E\gamma^0 + p_i \gamma^i + m}{2E} \\
&= -i \exp[-iE(t' - t)] \frac{p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i + m}{2E} \quad (p_0 = E) \\
&= -i \exp[-iE(t' - t)] \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2E}
\end{aligned} \tag{8}$$

(7) に (8) を入れて、この場合のグリーン関数を S_F と書くことにして、 $t' > t$ では

$$\begin{aligned}
S_F(x', x) &= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \exp[-iE(t' - t)] \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2E} \\
&= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x' - x)} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2E} \quad (p_0 = E)
\end{aligned}$$

となります。

同様に、 $t' < t$ の場合も求められます。今度は、 $t' - t < 0$ なので、(7) において $\exp[+ip_0|t' - t|]$ となるので、上半円の経路を付け加えられます。そして、 $p_0 = -E$ を上半円と実軸を横切る経路の内側に入り、 $p_0 = +E$ は入らないようにします。この経路を C_F^- とします。そうすると

$$\begin{aligned}
\int_{C_F^-} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[-ip_0(t' - t)] \frac{p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i + m}{(p_0 - E)(p_0 + E)} \\
= 2\pi i \frac{1}{2\pi} \exp[-i(-E)(t' - t)] \frac{-E\gamma^0 + p_i \gamma^i + m}{-2E} \\
= -i \exp[iE(t' - t)] \frac{-E\gamma^0 + p_i \gamma^i + m}{2E}
\end{aligned}$$

というわけで、 $t' < t$ でグリーン関数は

$$S_F(x', x) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \exp[iE(t' - t)] \frac{-E\gamma^0 + p_i \gamma^i + m}{2E} \quad (t' < t)$$

また、この運動量積分は 3 次元空間の全空間積分になっていることから、運動量 p は符号を逆転させて $-p$ としても積分には影響がないので

$$\begin{aligned}
S_F(x', x) &= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp[-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \exp[iE(t' - t)] \frac{-E\gamma^0 - p_i \gamma^i + m}{2E} \\
&= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp[-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \exp[iE(t' - t)] \frac{-p_\mu \gamma^\mu + m}{2E} \quad (p_0 = E) \\
&= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip(x' - x)} \frac{-p_\mu \gamma^\mu + m}{2E}
\end{aligned}$$

と書かれることが多いです。

というわけで、ディラック方程式から、時間の大小によって区別される2つのグリーン関数として

$$S_F(x', x) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp[-iE(t' - t) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2E} \quad (t' > t)$$

$$S_F(x', x) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp[-i(-E)(t' - t) + i(-\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \frac{-p_\mu \gamma^\mu + m}{2E} \quad (t' < t)$$

というのが求められます ($p_0 = E$)。+E の極を拾った方が過去から未来へと向かっていき、-E の極を拾った方が未来か過去へと向かっていくようになっています。これらが正負のエネルギーと対応しているかをはっきりさせます。

相対論的量子力学の「射影演算子」でのエネルギー射影演算子

$$\Lambda_\pm = \frac{\pm p_\mu \gamma^\mu + m}{2m}$$

を使います。 Λ_+ は正エネルギーの状態、 Λ_- は負エネルギーの状態を取り出す演算子です。 Λ_\pm によって

$$S_F(x', x) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E}{m} e^{-ip(x'-x)} \Lambda_+ \quad (t' > t)$$

$$S_F(x', x) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E}{m} e^{ip(x'-x)} \Lambda_- \quad (t' < t)$$

なので、 $t' > t$ では正エネルギー、 $t' < t$ では負エネルギーに対応していると言えます。また、階段関数 Θ を使うことで、 $t' > t$, $t' < t$ の両方を

$$S_F(x', x) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \left(\frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2m} e^{-ip(x'-x)} \Theta(t' - t) + \frac{-p_\mu \gamma^\mu + m}{2m} e^{ip(x'-x)} \Theta(t - t') \right)$$

$$= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} (\Lambda_+ e^{-ip(x'-x)} \Theta(t' - t) + \Lambda_- e^{ip(x'-x)} \Theta(t - t'))$$

と書けます。

これで欲しい結果が得られました。グリーン関数 S_F のことをシュテュッケルベルク・ファインマンの伝播関数やファインマンの伝播関数 (propagator) と呼び、添え字として F がくっつけていることが多いです。伝播関数と言っているときは大体これを指します。

極を避けるために $i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) を加える方法があり、こちらのほうが扱いやすいです。今の極の避け方に合わせるには、(7) において

$$S_F(x', x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (9)$$

とすればいいです。このとき極は、 ϵ が微小であることから

$$p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - i\epsilon} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - i\chi(\epsilon)$$

$$p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - i\epsilon} = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + i\chi(\epsilon)$$

として、実軸上からズラせます。極は、実軸に対して $+E$ は下側、 $-E$ は上側に動くので、実軸上の経路が取れます ($+E$ は下側なので下半円、 $-E$ は上側なので上半円をつければ囲める)。 $i\epsilon$ を加えれば積分経路がどうなっているかを示さなくてよくなり ($-\infty$ から $+\infty$ の経路のままでもいい)、式の構造が分かりやすいです。

(9) から S_F の運動量表示は

$$S_F(p) = \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

となります。散乱計算ではこれを使っていきます。

$i\epsilon$ は p_0 積分での極を避けるために入れられたものなので、積分実行後に $\epsilon = 0$ にします。よくある場合には $i\epsilon$ を先に 0 にしても害がないことが多いですが、何も考えずに無視してしまうと間違った結果を出す場合もあります。

伝播関数をディラック方程式の波動関数を使った形にできます。相対論的量子力学の「ディラック方程式の解～別解～」から、ディラック方程式による平面波の波動関数 $\phi_{\mathbf{p}}^r(x)$ (自由粒子の解) を持ってきて

$$\phi_{\mathbf{p}}^r(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \omega^r(\mathbf{p}) \exp[-i\epsilon_r p_\mu x^\mu]$$

$\epsilon_r = +1$ ($r = 1, 2$), $\epsilon_r = -1$ ($r = 3, 4$)、 $\omega^r(\mathbf{p})$ は 4 成分スピノールです。 $r = 1, 2$ に対して $\phi_{\mathbf{p}}^r \bar{\phi}_{\mathbf{p}}^r$ の和を取ると ($\bar{\phi} = \phi^\dagger \gamma_0$)

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 \phi_{\mathbf{p}}^r(x') \bar{\phi}_{\mathbf{p}}^r(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} e^{-ip(x'-x)} \sum_{r=1}^2 \omega^r(\mathbf{p}) \bar{\omega}^r(\mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} e^{-ip(x'-x)} \sum_{r=1}^4 \epsilon_r \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2m} \omega^r(\mathbf{p}) \bar{\omega}^r(\mathbf{p}) \\ &= \frac{m}{E} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-ip(x'-x)} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2m} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \Lambda_+ \frac{m}{E} e^{-ip(x'-x)} \end{aligned}$$

2 行目にいくときに、 $(p_\mu \gamma^\mu + m)/2m$ は正エネルギーに対する射影演算子であるために負エネルギーの $r = 3, 4$ では 0 になることと、 $\epsilon_{1,2} = +1$ なので符号が変わらないことを使っています。3 行目へは

$$\sum_{r=1}^4 \epsilon_r \omega^r(\mathbf{p}) \bar{\omega}^r(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 \omega^r(\mathbf{p}) \bar{\omega}^r(\mathbf{p}) - \sum_{r=3}^4 \omega^r(\mathbf{p}) \bar{\omega}^r(\mathbf{p}) = \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2m} - \frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{2m} = 1$$

となることを使っています (相対論的量子力学の「自由粒子解～別解～」参照)。同様に $r = 3, 4$ に対しても行うと

$$\begin{aligned}\sum_{r=3}^4 \phi_p^r(x') \bar{\phi}_p^r(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} e^{ip(x'-x)} \sum_{r=1}^4 (-\epsilon_r) \frac{-p_\mu \gamma^\mu + m}{2m} \omega^r(\mathbf{p}) \bar{\omega}^r(\mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \Lambda_- \frac{m}{E} \exp[ip \cdot (x' - x)]\end{aligned}$$

これらから、伝播関数は

$$S_F(x', x) = -i\Theta(t' - t) \int d^3p \sum_{r=1}^2 \phi_p^r(x') \bar{\phi}_p^r(x) + i\Theta(t - t') \int d^3p \sum_{r=3}^4 \phi_p^r(x') \bar{\phi}_p^r(x) \quad (10)$$

これからも、 $S_F(x', x)$ が正負両方のエネルギー状態を時間順序に関して含んでいることが分かります。伝播関数を使って (3) を見ておきます。伝播関数 S_F を使うことで、ディラック方程式 (1) の解 (3) は

$$\psi(x') = \phi(x') + q \int d^4x S_F(x', x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) \quad (11)$$

第2項は (10) から、 $t' > t$ では

$$\int d^4y S_F(x', y) q \gamma^\mu A_\mu(y) \psi(y) = \int d^3p \sum_{r=1}^2 \phi_p^r(x') \int d^4y (-iq \bar{\phi}_p^r(y) \gamma^\mu A_\mu(y) \psi(y))$$

$t' < t$ では

$$\int d^4y S_F(x', y) q \gamma^\mu A_\mu(y) \psi(y) = \int d^3p \sum_{r=3}^4 \phi_p^r(x') \int d^4y (+iq \bar{\phi}_p^r(y) \gamma^\mu A_\mu(y) \psi(y))$$

となり、 $t' > t$ では正エネルギー、 $t' < t$ では負エネルギーの状態だけが現れます。ただし、(11) において伝播関数 S_F は積分されているので、 $\psi(x)$ から $\psi(x')$ になるには $S_F(x', x)$ の $t' > t$, $t' < t$ の両方の寄与を受けています。

遷移振幅のように、括弧内を状態 ψ から A^μ の寄与を受けて状態 ϕ_p^r になると見れば、 $t' > t$ では負エネルギーの状態、 $t' < t$ では正エネルギーの状態が出てきていないです。このため、ディラックの海を無視できます。そして、負エネルギーを持った電子は時間に対して逆行してより早い時間での負エネルギー状態へと変化するようになっています。これで、グリーン関数として伝播関数を使えば目的に合うことが分かります。

・補足

$i\epsilon$ の加え方が時間順序に直接的に対応していることを簡単に言うておきます。伝播関数は時間順序によって

$$S_F(x', x) = \Theta(t' - t) S_F^+(x', x) + \Theta(t - t') S_F^-(x', x)$$

階段関数は積分形で

$$\Theta(t' - t) = -\frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(t'-t)}}{z + i\epsilon}$$

と与えられれば

$$\Theta(t' - t)S_F^+(x', x) = \frac{i}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(t'-t)}}{z + i\epsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \Lambda_+ e^{-ip(x'-x)}$$

$$\Theta(t - t')S_F^-(x', x) = -\frac{i}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iz(t-t')}}{z - i\epsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \Lambda_- e^{-ip(x'-x)}$$

これらを計算すると

$$S_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

として、 $i\epsilon$ が入った形が求められます。このように、時間順序がそのまま $i\epsilon$ の加え方に対応しています。途中計算は場の量子論の「伝播関数について」をご覧ください。また、階段関数の時間が逆の場合 ($t - t' > 0$) は

$$\Theta(t - t') = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iw(t-t')}}{w - i\epsilon}$$

となっていて、 $\Theta(t' - t)$ の複素共役になっています (単に t' と t を入れ替えても、ただ文字が変わるだけなので意味がない)。