

電子の g 因子

くり込みによる計算結果を実験と比較するために、電子の g 因子を求めます。真空偏極、自己エネルギー、頂点補正全てを使います。

最初に頂点補正の計算の続きを行います。

電磁場の関係式は説明せずに使っています。

頂点補正 $\Gamma_\mu(p', p)$ は「くり込み～頂点補正～」で

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p', p) = & -\frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 d\rho \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \\ & \times \left(\gamma_\mu \left((p \cdot p') - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)(p' + p)^2 + \frac{1}{2}(m^2(\beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_2\beta_3 q^2) - \frac{1}{2\rho} \right) \right. \\ & \left. + \frac{m}{2}(p' + p)_\mu \beta_1(\beta_2 + \beta_3) \right) \exp \left[-\rho(m^2(\beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_2\beta_3 q^2) - \alpha_1 \mu^2 \right] \end{aligned}$$

と求めています。 Γ_μ は有限部分 Γ_μ^R とすれば

$$\Gamma_\mu(p', p) = \Gamma_\mu(p, p) + \Gamma_\mu^R(p', p)$$

と書けます。関数 Γ_μ には一般的な性質として

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) \quad (q^\mu = (p' - p)^\mu) \quad (1)$$

というのがあり、 F_1, F_2 は形状因子 (form factor) と呼ばれます。形状因子は名前のとおり粒子の形状 (構造) がどのようにになっているのか表すものです。ここでは、形状因子で書けるというだけにして、他の説明は省きます。

発散部分はいくり込みによって電荷に吸収されるので、ここで知りたいのは正則化された $\Gamma_\mu^R(p', p)$ の方です。なので、 $\Gamma_\mu(p', p) - \Gamma_\mu(p, p)$ を求めます。

F_1 は γ_μ を含む項に対応するので、それを取り出します。 $\Gamma_\mu(p', p)$ の中には γ_μ を含んでいない項があるので、ゴールドン分解

$$\bar{u}'(p') \gamma_\mu u(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}'(p') [(p + p')_\mu + i \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\nu] u(p)$$

を使って書き換えます。これによって

$$(p + p')_\mu = 2m\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu}(p' - p)^\nu$$

となります。そうすると、 F_1 は

$$\begin{aligned}
F_1(p^2) = & -\frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 d\rho \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \\
& \times \left((p \cdot p') - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)(p' + p)^2 + \frac{1}{2}(m^2(\beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_2\beta_3 q^2) - \frac{1}{2\rho} \right) \\
& + m^2\beta_1(\beta_2 + \beta_3) \exp \left[-\rho(m^2(\beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_2\beta_3 q^2) - \alpha_1 \mu^2 \right] \\
& - (q = 0)
\end{aligned}$$

最後の ($q = 0$) は、これの前の式を $q = 0$ にしたものの (前方散乱部分) という意味です。ここで、on-shell 条件から

$$q^2 = (p' - p)^2 = 2m^2 - 2p' \cdot p$$

なので、 $p' \cdot p = m^2 - q^2/2$ と $(p + p')^2 = 4m^2 - q^2$ を使って

$$\begin{aligned}
F_1(p^2) = & -\frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 d\rho \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \\
& \times \left(\left(m^2 - \frac{q^2}{2} - (\beta_2 + \beta_3)(2m^2 - \frac{q^2}{2}) + \frac{1}{2}(m^2(\beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_2\beta_3 q^2) + m^2\beta_1(\beta_2 + \beta_3) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\rho} \right) \exp \left[-\rho(m^2(\beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_2\beta_3 q^2) - \alpha_1 \mu^2 \right] \\
& - (q = 0)
\end{aligned}$$

ρ 積分は、積分の下限を適当な η で切って実行することにして

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} (e^{-\rho A} - e^{-\rho B}) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^\infty \frac{d\rho}{\rho} (e^{-\rho A} - e^{-\rho B}) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\int_{\eta A}^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} e^{-\sigma} - \int_{\eta B}^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} e^{-\sigma} \right) \quad (\sigma = \rho A, \rho B) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta A}^{\eta B} \frac{d\sigma}{\sigma} e^{-\sigma} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta A}^{\eta B} \frac{d\sigma}{\sigma} \left(1 - \sigma + \frac{1}{2!}\sigma^2 - \frac{1}{3!}\sigma^3 + \dots \right) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta A}^{\eta B} d\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1 + \frac{1}{2}\sigma - \dots \right) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\log \sigma - \sigma + \frac{1}{4}\sigma^2 - \dots \right]_{\eta A}^{\eta B} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\log \eta B - \log \eta A - (\eta B - \eta A) + \frac{1}{4}(\eta^2 B^2 - \eta^2 A^2) - \dots \right) \\
&= \log B - \log A
\end{aligned}$$

これを入れて

$$\begin{aligned}
F_1(p^2) &= -\frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \\
&\quad \times \left(\left(m^2 - \frac{q^2}{2} - (\beta_2 + \beta_3) \left(2m^2 - \frac{q^2}{2} \right) + \frac{1}{2} m^2 (\beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_2 \beta_3 \frac{q^2}{2} + m^2 \beta_1 (\beta_2 + \beta_3) \right) \right. \\
&\quad \times \left(m^2 (\beta_2 + \beta_3)^2 + \beta_1 \mu^2 - \beta_2 \beta_3 q^2 \right)^{-1} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \log \left[m^2 (\beta_2 + \beta_3)^2 + \beta_1 \mu^2 - \beta_2 \beta_3 q^2 \right] \right) \\
&\quad - (q = 0)
\end{aligned}$$

$F_2(q^2)$ は残っている項なので

$$F_2(q^2) = \frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \frac{m^2 \beta_1 (\beta_2 + \beta_3)}{m^2 (\beta_2 + \beta_3)^2 + \beta_1 \mu^2 - \beta_2 \beta_3 q^2}$$

$F_2(q^2)$ は $\mu^2 = 0$ でも収束してくれるので、 $(q = 0)$ は必要ないです。

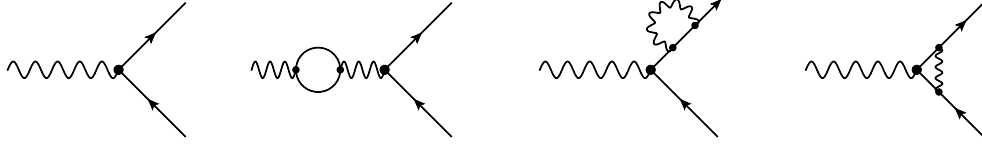
ここで考えるのは q^2 が小さい場合、つまり運動量移動がほとんど起きていない状況です。実験でも運動量移動を小さくとるので、 $q^2 \rightarrow 0$ はそれとの対応になります。

$F_2(0)$ は

$$\begin{aligned}
F_2(0) &= \frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \frac{\beta_1}{\beta_2 + \beta_3} \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta_2 \int_0^{1-\beta_2} d\beta_3 \frac{1 - \beta_2 - \beta_3}{\beta_2 + \beta_3} \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta_2 \int_{\beta_2}^1 dA \left(\frac{1}{A} - 1 \right) \quad (A = \beta_2 + \beta_3) \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta_2 [\log(\beta_2 + \beta_3) - \beta_3]_0^{1-\beta_2} \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta_2 (-1 + \beta_2 - \log \beta_2) \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{\pi} \left[-\beta_2 \log \beta_2 + \frac{1}{2} \beta_2^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{\kappa_e e^2}{2\pi}
\end{aligned}$$

一方で、 $F_1(q^2 \rightarrow 0)$ は面倒です。実行するには、 $\mu \neq 0$, $q^2 \neq 0$ として積分をし終わった後に 0 の極限を取る必要があり、最低次が q^2/m^2 のオーダーで出てきます。しかし、今厳密な値が必要なのは $F_2(0)$ だけなので、 $F_1(q^2 \rightarrow 0)$ は無視します (下の補足で一部分だけ示してます)。というわけで、頂点補正での必要な計算は終わりです。

これらの結果を使うために外部の電磁場 A_{ext}^μ と電子の相互作用部分を見ます。これは、発生源から光子が飛んでいき電子にぶつかるというファインマン図が対応します。このとき、飛んでる電子の伝播関数には自己エネルギー、光子の伝播関数には真空偏極の寄与があります。そして、電子と光子がぶつかる場所は頂点なので、そこに頂点補正が加わります。ただし、今の場合では自己エネルギーは省けます。理由は単純で、自己エネルギーは



$$\Sigma^R(p)(p^\mu \gamma_\mu - m)^2$$

のような形をしているために on-shell 条件 $p^\mu \gamma_\mu = m$ で消えるからです。真空偏極を加えた光子の伝播関数を $D^{\mu\nu}$ とすれば (図の左から 2 番目)

$$\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) i D_{(0)}^{\mu\alpha}(q) \frac{i \Pi_{\alpha\nu}(q)}{4\pi\kappa_e} j_{ext}^\nu$$

j_{ext}^ν は電磁場の発生からの寄与です。ここではくり込まれた量を使っています。 $D_{(0)}^{\mu\alpha}$ は最低次の伝播関数、 $\Pi_{\alpha\nu}$ は真空偏極の寄与です。頂点補正 Λ_μ は (図の 1 番右側)

$$\bar{u}(p') \Lambda_\mu(p', p) u(p) j_{ext}^\mu$$

この 2 つを足した振幅は

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) i D_{(0)}^{\mu\alpha}(q) \frac{i \Pi_{\alpha\nu}(q)}{4\pi\kappa_e} j_{ext}^\nu + \bar{u}(p') \Lambda_\nu(p', p) u(p) j_{ext}^\mu \\ &= \bar{u}(p') (\gamma_\mu i D_{(0)}^{\mu\alpha} \frac{i \Pi_{\alpha\nu}}{4\pi\kappa_e} + \Lambda_\mu) u(p) j_{ext}^\mu \\ &= \bar{u}(p') (\gamma_\nu + \gamma_\mu i D_{(0)}^{\mu\alpha} \frac{i \Pi_{\alpha\nu}}{4\pi\kappa_e} + \Gamma_\nu) u(p) D_{(0)}^{\nu\alpha} j_{ext}^\alpha \end{aligned}$$

これは電子のカレントに補正が入っている形です。

これで計算は終わったので、電磁場 A_μ と電子の相互作用のエネルギー (ポテンシャル) を求めます。相互作用のエネルギーは $-e\kappa_b^{-1} A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ と与えられます (場の量子論の「電磁場との相互作用項」参照)。雑に言えば、速度 v で動いている電子の古典的なラグランジアン

$$L = T - U = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 + e(\Phi - \kappa_b^{-1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}))$$

において、 $-ev$ をカレント j_μ とすれば $j_\mu A^\mu$ とできるので、ディラック方程式のカレントを入れているということです。カレントは密度の次元なので 3 次元積分し、カレント部分を今の形にして

$$W = -e\kappa_b^{-1} \int d^3x \bar{\psi}_{p'} (\gamma_\mu + \gamma_\nu i D_{(0)}^{\nu\alpha} \frac{i \Pi_{\alpha\mu}}{4\pi\kappa_e} + \Gamma_\mu) \psi_p A^\mu$$

真空偏極部分は

$$\gamma_\nu iD_{(0)}^{\nu\alpha} \frac{i\Pi_{\alpha\mu}}{4\pi\kappa_e} = \gamma_\nu \frac{-i4\pi\kappa_e g^{\nu\alpha}}{q^2} (g_{\alpha\mu} q^2 - q_\alpha q_\mu) \frac{i\Pi}{4\pi\kappa_e} = \gamma_\nu \frac{-i4\pi\kappa_e g^{\nu\alpha}}{q^2} g_{\alpha\mu} q^2 \frac{i\Pi}{4\pi\kappa_e} = \gamma_\mu \Pi$$

Γ_μ は (1) なので

$$\begin{aligned} W &= -e\kappa_b^{-1} \int d^3x \bar{\psi}_{p'} (\gamma_\mu + \gamma_\nu iD_{(0)}^{\nu\alpha} \frac{i\Pi_{\alpha\mu}}{4\pi\kappa_e} + \Gamma_\mu) \psi_p A^\mu \\ &= -e\kappa_b^{-1} \int d^3x \bar{\psi}_{p'} (\gamma_\mu + \gamma_\mu \Pi + \gamma_\mu F_1 + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2) \psi_p A^\mu \\ &= -e\kappa_b^{-1} \int d^3x \bar{\psi}_{p'} (\gamma_\mu (1 + \Pi + F_1) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2) \psi_p A^\mu \\ &= -e\kappa_b^{-1} \int d^3x \bar{\psi}_{p'} (\frac{1}{2m} (p + p')_\mu (1 + \Pi + F_1) \\ &\quad + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\nu (1 + \Pi + F_1) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\nu F_2) \psi_p A^\mu \\ &= -e\kappa_b^{-1} \int d^3x \bar{\psi}_{p'} (\frac{1}{2m} (p + p')_\mu (1 + \Pi + F_1) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu (1 + \Pi + F_1 + F_2)) \psi_p A^\mu \end{aligned}$$

途中でゴールドン分解を使っています。 $q^2 \rightarrow 0$ で消えるので F_1 は無視し、真空偏極には近似的な結果 (下の補足 2)

$$\Pi \simeq -\frac{\kappa_e e^2}{15\pi} \frac{q^2}{m^2}$$

を使うことにします。そうすると、 $q^2 \rightarrow 0$ で

$$\begin{aligned} 1 + \Pi + F_1 &= 1 - \frac{\kappa_e e^2}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \simeq 1 \\ 1 + \Pi + F_1 + F_2 &= 1 - \frac{\kappa_e e^2}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + \frac{\kappa_e e^2}{2\pi} \simeq 1 + \frac{\kappa_e e^2}{2\pi} \end{aligned}$$

となり

$$W = -e\kappa_b^{-1} \int d^3x \bar{\psi}_{p'} (\frac{1}{2m} (p + p')_\mu + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu (1 + \frac{\kappa_e e^2}{2\pi})) \psi_p A^\mu$$

平面波に微分演算子が作用しているとして運動量を置き換えると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m} \bar{\psi}_{p'} (p + p')_\mu \psi_p A^\mu + \frac{if}{2m} \bar{\psi}_{p'} \sigma_{\mu\nu} \psi_p q^\nu A^\mu \quad (f = 1 + \frac{\kappa_e e^2}{2\pi}) \\ &= \frac{1}{2m} (\bar{\psi}_{p'} (i\partial_\mu \psi_p) + (-i\partial'_\mu \bar{\psi}_{p'}) \psi_p) A^\mu + \frac{if}{2m} \bar{\psi}_{p'} \sigma_{\mu\nu} \psi_p (i\partial^\nu A^\mu) \end{aligned}$$

第1項はカレントの微分の形でしかないので、第2項だけを見ます。

$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$ から

$$\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu + \sigma_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu) = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu - \sigma_{\nu\mu}\partial^\nu A^\mu) = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)$$

展開して

$$\begin{aligned} & \sigma_{01}(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) + \sigma_{02}(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2) + \sigma_{03}(\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3) \\ & + \sigma_{10}(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) + \sigma_{12}(\partial^2 A^1 - \partial^1 A^2) + \sigma_{13}(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \\ & + \sigma_{20}(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0) + \sigma_{21}(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) + \sigma_{23}(\partial^3 A^2 - \partial^2 A^3) \\ & + \sigma_{30}(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0) + \sigma_{31}(\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1) + \sigma_{32}(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \\ & = \sigma_{01}(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) + \sigma_{02}(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2) + \sigma_{03}(\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3) \\ & - \sigma_{01}(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) + \sigma_{12}(\partial^2 A^1 - \partial^1 A^2) + \sigma_{13}(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \\ & - \sigma_{02}(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0) - \sigma_{12}(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) + \sigma_{23}(\partial^3 A^2 - \partial^2 A^3) \\ & - \sigma_{03}(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0) - \sigma_{13}(\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1) - \sigma_{23}(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \\ & = 2\sigma_{01}(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) + 2\sigma_{02}(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2) + 2\sigma_{03}(\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3) \\ & - 2\sigma_{23}(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) + 2\sigma_{13}(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) - 2\sigma_{12}(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) \end{aligned}$$

ここで、静的な磁場しか作用していないとして、1行目 (A^0 の項と時間微分の項) を無視します。ディラック・パウリ表現では

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j] = \frac{i}{2}[-\beta\alpha_i, -\beta\alpha_j] = \frac{i}{2}(\beta\alpha_i\beta\alpha_j - \beta\alpha_j\beta\alpha_i) \\ &= -\frac{i}{2}(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i) \\ &= -i\alpha_i\alpha_j \quad (i \neq j) \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

パウリ行列は $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ なので、 Σ_i を対角成分に σ_i を持つ 4×4 行列として

$$\sigma_{23}(\nabla \times \mathbf{A})_1 - \sigma_{13}(\nabla \times \mathbf{A})_2 + \sigma_{12}(\nabla \times \mathbf{A})_3 = \Sigma_1 B_1 + \Sigma_2 B_2 + \Sigma_3 B_3$$

$\nabla = -(\partial^1, \partial^2, \partial^3)$ です。よって

$$\frac{if}{2m} \bar{\psi}_p \sigma_{\mu\nu} \psi_p q^\nu A^\mu \Rightarrow \frac{if}{2m} \bar{\psi}_p \sigma_{\mu\nu} \psi_p (i\partial^\nu A^\mu) = -\frac{f}{2m} (\bar{\psi}_p \Sigma \psi_p) \cdot \mathbf{B}$$

となり

$$W = -e\kappa_b^{-1} \int d^3x \bar{\psi}_p \frac{if}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \psi_p A^\mu \Rightarrow \frac{e\kappa_b^{-1}f}{2m} \int d^3x (\bar{\psi}_p \Sigma \psi_p) \cdot \mathbf{B}$$

磁場を定数 $(0, 0, B_3)$ としてしまい積分から外せば、積分は Σ の平均 $\langle \Sigma \rangle$ になります。そして、非相対論的極限では上成分のみが寄与するので Σ から σ だけを取り出し

$$\frac{e\kappa_b^{-1}f}{2m} \langle \sigma_3 \rangle B_3 = \frac{e\kappa_b^{-1}f}{m} \langle S_3 \rangle B_3$$

ここで、量子力学での磁気モーメント M によるエネルギー

$$E = \kappa_b^{-1} M B = \kappa_b^{-1} g \mu_B S_3 B_3$$

を持ち込みます。 g は g 因子、 μ_B はボーア磁子です。 c, \hbar を 1 にしなければ

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$$

これと比較すると

$$\frac{e\kappa_b^{-1}}{m} \left(1 + \frac{\kappa_e e^2}{2\pi}\right) \langle S_3 \rangle B_3 = \kappa_b^{-1} g \mu_B \langle S_3 \rangle B_3$$

$$\frac{e}{m} \left(1 + \frac{\kappa_e e^2}{2\pi}\right) = g \frac{e}{2m}$$

$$g = 2 \left(1 + \frac{\kappa_e e^2}{2\pi}\right)$$

ディラック方程式での電子の g 因子は厳密に 2 ですが、そこからズレており

$$g = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \simeq 2(1 + 0.00116141)$$

1 が摂動による補正がない 1 次のオーダーでの相互作用の頂点 γ_μ から出てき、 $\alpha/2\pi$ が 2 次の摂動による補正です。 g 因子の 2 からのズレを異常磁気モーメントと呼びます。実験値での g 因子は

$$g_{exp} = 2(1 + 0.001159652187)$$

理論値との差はかなり小さく、これが QED は物理で最も精巧な理論と言われる理由の 1 つです。これは 2 次までの摂動の結果ですが、これをさらに高次の摂動まで計算すると、とんでもない苦勞の結果としてさらに実験値と一致します。また、現在では電磁相互作用だけでなく弱い相互作用とハドロンからの寄与も加えて計算されています。この話は例えば「Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment - Contribution of Diagrams without Closed Lepton Loops」(arXiv:1412.8284[hep-ph]) をご覧ください。

電子として扱われるディラック粒子での g 因子は厳密に 2 なので (形状因子で言えば、ディラック粒子は $F_1(q^2) = 1$, $F_2(q^2) = 0$ で異常磁気モーメントが 0 の内部構造のない点粒子)、観測される電子は点粒子ではないと言えます。よく使われる言い方は、裸の電子の周りに光子の雲ができていと表現されます。このような状況のために、電子それ自身の性質は観測不可能 (相互作用を起こさない観測は不可能) となり、光子をまとった電子 (点粒子でなく構造を持ち、形状因子に影響がある) しか分からないことになっています。

現状ではほぼ無視できるついでの話もしておきます。散乱問題を摂動展開によって計算してきましたが、気になるのは摂動展開が収束しているのかです。つまり、QED における物理量の関数 A の級数

$$A(e^2) = f_0 + f_1 e^2 + f_2 e^4 + \dots$$

は収束するののかということです。これは収束しないだろうと予想されています。この指摘はダイソン (Dyson) によってされました。指摘は数学的な証明でなく、物理の視点からのものです。これを簡単に触れておきます。

まず、 $A(e^2)$ の微小な e による級数は収束すると仮定します。つまり、 $A(e^2)$ は $e = 0$ 周りで解析関数とします。そうすると、 $A(-e^2)$ も解析関数となり、 $A(-e^2)$ の級数展開は収束するはずですが、ここで物理を持ち込みます。 e^2 から $-e^2$ への変更は電荷 e が虚数 ie になることに対応します。そうすると、同じ電荷を持ったもの同士のクーロン力は

$$\frac{e^2}{x^2} \Rightarrow -\frac{e^2}{x^2}$$

となり (x は電荷間の距離)、斥力だったのが引力に変わります。そして、QED では電子と陽電子の対生成が起きています。このため、対生成によって作られた電子は電子を引き寄せ、陽電子は陽電子を引き寄せていき、電子だけの集まり、陽電子だけの集まりを作ります。このような、対生成によって電子と陽電子が作られ、それらによって空間における電子、陽電子の分離が急速に行われているような系は不安定です (例えば、引力は負のポテンシャルなので、 U 字のポテンシャルのような安定した位置がなくなる)。そんな不安定な系での物理量 $A(-e^2)$ が解析関数であるはずがないと予想できます。よって、 $A(-e^2)$ は解析関数でないはずなので、 $A(e^2)$ の級数は収束しないことになりします。

このようにして、ダイソンは摂動展開は収束しないだろうと予想しました。実際に、近似的な計算から発散していることを示しているものもあります。しかし、摂動展開が発散していたとしても物理としては致命的な問題になりません (数学的にも発散して困らない)。発散していようと実験値と合っていればいいとして、漸近展開だと考えればいいだけです。

・補足 1

真空偏極部分の近似を行います。II は

$$\Pi(q^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \log\left[1 - \beta(1-\beta) \frac{q^2}{m^2}\right] \quad (\alpha = \kappa_e e^2)$$

ここで $q^2/m^2 \ll 1$ として展開し

$$\log[1 - \beta(1 - \beta)\frac{q^2}{m^2}] \simeq -\beta(1 - \beta)\frac{q^2}{m^2} - \frac{1}{2}(\beta(1 - \beta)\frac{q^2}{m^2})^2$$

として

$$\Pi(q^2) \simeq -\frac{2\alpha}{\pi} \frac{q^2}{m^2} \int_0^1 d\beta \beta^2(1 - \beta)^2 - \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^2 \int_0^1 d\beta \beta(1 - \beta)\beta^2(1 - \beta)^2$$

第1項は

$$\int_0^1 d\beta \beta^2(1 - \beta)^2 = \int_0^1 d\beta (\beta^4 - 2\beta^3 + \beta^2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$$

第2項は

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\beta \beta^3(1 - \beta)(1 + \beta^2 - 2\beta) &= \int_0^1 d\beta \beta^3(-\beta^3 + 3\beta^2 - 3\beta + 1) \\ &= \int_0^1 d\beta (-\beta^6 + 3\beta^5 - 3\beta^4 + \beta^3) \\ &= -\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{140} \end{aligned}$$

よって

$$\Pi(q^2) \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{2} \frac{1}{140} \frac{q^2}{m^2}\right) = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{140} \frac{q^2}{m^2}\right) = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{140} \frac{q^2}{m^2}\right)$$

・補足2

$F_1(q^2)$ の計算の一部分だけ行います。計算で現れる積分として

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \frac{1}{m^2(\beta_2 + \beta_3)^2 + \beta_1 \mu^2 - \beta_2 \beta_3 q^2} \\ &= \int_0^1 d\beta_2 \int_0^{1-\beta_2} d\beta_3 \frac{1}{m^2(\beta_2 + \beta_3)^2 + (1 - \beta_2 - \beta_3)\mu^2 - \beta_2 \beta_3 q^2} \\ &= \int_0^1 d(x\lambda_2) d(x\lambda_3) \frac{1}{m^2(x\lambda_2 + x\lambda_3)^2 + (1 - x\lambda_2 - x\lambda_3)\mu^2 - x^2\lambda_2\lambda_3 q^2} \int_0^\infty dx \delta(x - x\lambda_2 - x\lambda_3) \\ &= \int_0^1 d\lambda_2 d\lambda_3 dx \delta(1 - \lambda_2 - \lambda_3) \frac{x}{x^2 m^2 (\lambda_2 + \lambda_3)^2 + (1 - x\lambda_2 - x\lambda_3)\mu^2 - x^2 \lambda_2 \lambda_3 q^2} \\ &= \int_0^1 d\lambda_2 dx \frac{x}{x^2 m^2 (\lambda_2 + 1 - \lambda_2)^2 + (1 - x)\mu^2 - x^2 \lambda_2 (1 - \lambda_2) q^2} \\ &= \frac{1}{m^2} \int_0^1 d\lambda dx \frac{x}{(1 - \lambda(1 - \lambda)l^2)x^2 + \mu^2(1 - x)/m^2} \quad (l^2 = \frac{q^2}{m^2}) \end{aligned}$$

x 積分は積分公式にあるように

$$\int dx \frac{x}{Ax^2 - Bx + B} = \frac{1}{2A} \log[Ax^2 - Bx + B] + \frac{B}{2A} \int dx \frac{x}{Ax^2 - Bx + B}$$

第 2 項は $\mu^2 = 0$ で消せるので第 1 項だけ残して

$$\int_0^1 d\lambda \frac{1}{1 - \lambda(1 - \lambda)l^2} (\log[1 - \lambda(1 - \lambda)l^2] - \log[\frac{\mu^2}{m^2}])$$

第 1 項は手が出せないなので、第 2 項の積分を行うと、 $l^2 \ll 1$ として

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\lambda \frac{1}{1 - \lambda(1 - \lambda)l^2} &= \frac{1}{l^2} \int_0^1 d\lambda \frac{1}{\lambda^2 - \lambda + l^{-2}} = \frac{1}{l^2} \frac{2}{\sqrt{4l^{-2} - 1}} \arctan \frac{2\lambda - 1}{\sqrt{4l^{-2} - 1}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{l^2} \frac{4}{\sqrt{4l^{-2} - 1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{4l^{-2} - 1}} \end{aligned}$$

他の積分も同様に行っていくと求まります。

F_1 の結果で問題になるのが、 $\log[m/\mu]$ の部分です。 μ は光子の質量なので $\mu = 0$ とすべきですが、そうすると明らかに発散します。この発散を赤外発散と呼びます (無限大でなく 0 にすることで発散するため)。しかし、この発散は今まで見てきたような性質の悪い発散ではないです。簡単に言えば μ に対して下限を設定でき、それによって μ に依存しない式に書き換えられるからです。下限が設定されるので発散はおきません。ちなみに、 F_1 の q^2/m^2 のオーダーでの結果は

$$F_1(q^2) \simeq \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} (\log \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8})$$