

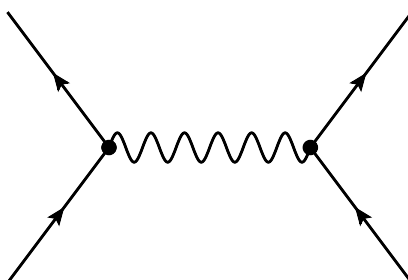
ファインマン図

QED でのファインマン図とファインマン則を簡単にまとめます。

「 S 行列」での摂動展開には法則性があるように見え、それを図として表したのをファインマン図 (Feynman diagram) と呼び、それと式の対応を与えているのがファインマン則 (Feynman rule) です。ファインマン則の大本は実際の計算で出てくる式なので、簡単な例で実際に確かめておいたほうがいいです。また、ファインマン図は計算規則を図にしたものであって、現実の粒子の振る舞いを図にしているわけではないことに注意してください。

ちなみに、ファインマン則さえ知っていれば、QED は結局のところファインマン図を書いて、ファインマン則によって式化することで物理の話は終了します。それ以降はただの数学的な計算です。

ファインマン図は



といったもので、散乱の過程を線と点でイメージ化したものです。

この図の矢印が入った実線で描かれたものがフェルミオン (電子や陽子) に対応します。時間の進行方向に対して矢印を逆向きにすると反粒子を表します。これを外線 (external line) と呼びます。外線は $u(p, s)$ のようにスピノール (波動関数) が対応します。外線は観測に引っかかる粒子が使われます。そして、実線でなく波線では光子を表します (図の真ん中の波線)。

真ん中の波線の両端の黒丸がありますが、このように両端に黒い丸がついてるものを内線 (internal line) と呼び、波線では光子の伝播関数 $iD_F^{\mu\nu}(p)$ が対応します。実線では電子の伝播関数 $iS_F(p)$ が対応します。伝播関数は

$$iS_F(p) = i \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad iD_F^{\mu\nu}(p) = i \frac{-4\pi\kappa_e g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

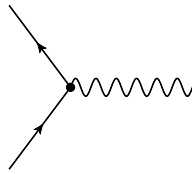
κ_e は CGS ガウス単位系なら 1、ヘヴィサイド・ローレンツ単位系なら $1/4\pi$ です。光子の伝播関数に $g^{\mu\nu}$ がつくのはマクスウェル方程式が

$$g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = J^\mu$$

となっているためです。

内線は基本的に観測可能な状態ではないです。これは「電子-陽子散乱」で触れたように、仮想光子と呼ばれることから分かると思います (フェルミオンでも同様)。なので、内線の運動量は外から勝手に与えられません。例えば、上の図で内線の運動量を k^μ としたら、 $p_f^\mu - p_i^\mu = P_f^\mu - P_i^\mu = k^\mu$ なので、始状態と終状態の運動量の差が内線の運動量になります (最終的な結果は p_i^μ, p_f^μ に依存し、内線の運動量そのものの依存性はない)。

両端の黒い丸の部分 vertices と呼び、相互作用部分を表し、QED では 2 本の電子の線と 1 本の光子の線が常に出ているように書き (このように頂点から出ている線のことを足 (leg) と言ったりします)



そして、頂点では運動量保存則を満たすようにします。これは、相互作用が起きて保存則が満たされてなかったらどうにもならないからです(下の補足参照)。なので、図を描くときには、その線が含む運動量を書いて、それが頂点で保存則を満たすようにします。頂点には $-ie\gamma_\mu$ を対応させ、頂点のガンマ行列の添え字と、それに挟まれている光子の伝播関数の計量の添え字をあわせませます。

図においてフェルミオンの線を奇数回交換するなら、マイナスをつけます。これはフェルミオンの入れ替えに対する反対称性によります(「電子-電子散乱」や「電子-陽子散乱」参照)。

ファインマン則によって、最初の図が電子-陽子散乱(左側の実線が電子、右側が陽子)なら

$$\bar{u}(p_f, s_f)(ie\gamma_\mu)u(p_i, s_i) \frac{-i4\pi\kappa_e g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(P_f, S_f)(-ie\gamma_\nu)u(P_i, S_i)$$

図から式を書くときは外線の方向に沿って下から上に行くように書いています。両端に電子、陽子の外線部分とその間の頂点、真ん中には内線に相当する伝播関数、という図と同じもです。頂点のガンマ行列の添え字は各々違った添え字を使い、電子の電荷は $-e$ 、陽子の電荷 e なので頂点の符号が反転しています。

図と式の対応のときに書く方向が違う場合があるので注意してください。大まかには、式は右から左に読んでいき、図を左から右に向かって書くという場合と、今のように式を右から読んで、図を下から上に行くように書く場合があります。式を右から読むのには理由があり、伝播関数は位置表示では $S(x_1, x_2) = S(x_1 - x_2)$ と書いた時、 x_2 から x_1 へ行くと見なすために、式を右から読みます。

図では、横書きは左から右に向かっていくのが標準なのでそう書きます(右利きの都合)。下から上に書くというのも下向きより見やすいからとかそんな理由です。

ファインマン則による式は S 行列のデルタ関数や規格化によるものとかを除いたもの、つまり不変振幅部分に相当します。 $-i$ を外にだしてしまえば

$$M_{fi} = e^2 \bar{u}(p_f, s_f) \gamma_\mu u(p_i, s_i) \frac{4\pi\kappa_e}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(P_f, S_f) \gamma^\mu u(P_i, S_i)$$

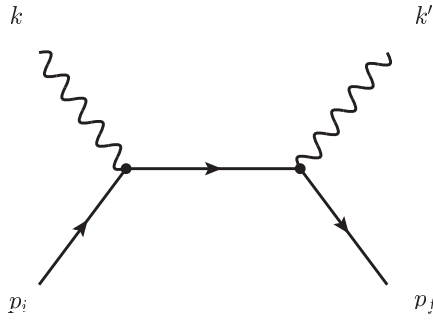
と書けます。もしくは

$$-iM_{fi} = e^2 \bar{u}(p_f, s_f) (\gamma_\mu) u(p_i, s_i) \frac{-i4\pi\kappa_e}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(P_f, S_f) (\gamma^\mu) u(P_i, S_i)$$

図から式に行く時の注意ですが、不変振幅にはミンコフスキー空間の添え字 (μ とか ν とか) がついていないので、それは内積でつぶれている必要があります。なので、式の中で潰れていない添え字があるなら、それは間違えています。

簡単な例を使って見てきましたが、線の数が増えてもやることは変わりません。他の例としてコンプトン散乱の場合での図は

光子では外線を $\epsilon(k, \lambda)$ として



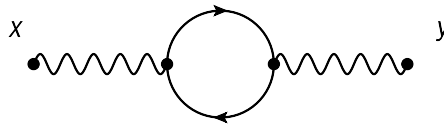
$$\bar{u}(p_f, s_f)(-ie\gamma_\nu)\epsilon^{\nu\prime}(k', \lambda')\frac{i((p_i + k)^\alpha\gamma_\alpha + m)}{(p_i + k)^2 - m^2}\epsilon^\mu(k, \lambda)(-ie\gamma_\mu)u(p_i, s_i)$$

並びとして式を右から、図を左から見ていけば、入射光子が電子に衝突して、伝播関数を伝って散乱された光子と電子になるといったものです。不変振幅は $-i$ を外に出して

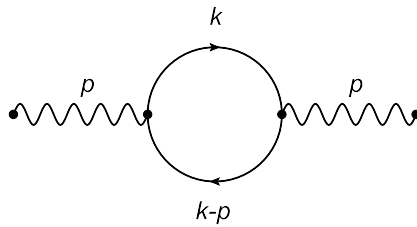
$$M_{fi} = e^2\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_\nu\epsilon^{\nu\prime}(k', \lambda')\frac{((p_i + k)^\alpha\gamma_\alpha + m)}{(p_i + k)^2 - m^2}\gamma_\mu\epsilon^\mu(k, \lambda)u(p_i, s_i)$$

ファインマン図とファインマン則によって、「コンプトン散乱」での結果が視覚的に手軽に求められます。

まだ出てきていない重要な3つの図にも触れておきます。頂点では運動量保存を成り立たせていると言いましたが、これは頂点における位置表示の伝播関数を運動量積分することで出てきます。これを少し変化させると、特殊な性質が出てきます。例えば



このような場合に座標 x から y への伝播関数は、内線の数に対応した4つの伝播関数をあわせて積分したもので与えられます。そして、これを運動量表示にしたときに現れるデルタ関数によって保存則が満たされるようになっています。しかし、ここからが重要なことで、その場合この図で円の部分の片方の運動量を k とし、波線部分の運動量を p とすると、保存則として出てくるのは $p = p$ であって、 k は保存則に絡まなく、 k 積分を含んだ形として残ります。運動量表示で図にすれば

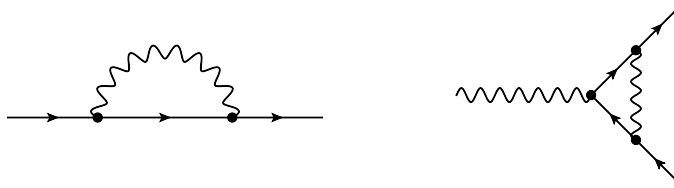


つまり、運動量表示において、ループ（円部分）における運動量に対して積分を行います（この場合は電子の伝播関数によってループが作られている）。これがファインマン図にループが含まれているときの規則で、ループ部分の運動量に対して

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

として積分を加えます（ちなみに、不変振幅 M_{fi} に対するファインマン則へはこの運動量積分に i をくっつける）。ループがないものでは、余計な積分が残らずに運動量表示に書き換えられます。そして、頂点では保存則を満たすことは同じです。

他に



こういったものもループになっており、積分を含みます。図を見ていけば分かるように、積分する運動量は、入って行く運動量、出て行く運動量に現われない運動量に対して行えばいいです。これが図で言えば、線がループしている部分になります。

もう1つループのときに規則があり、両端が光子で真ん中で電子によるループがあるとき、 $-\text{tr}$ がつきます。つまり、ループ部分が電子だけで構成されているものには $-\text{tr}$ をつけます（上の最初のループの例）。トレースをとる理由は今の状況だと分かりづらいので、そういうものだと思ってください（大雑把に上の例で言えば、ガンマ行列2個と電子のスピンール4個による行列成分が丁度全体のトレースを取ればよいように構成されているため）。

QED の不変振幅に対するファインマン則をまとめておきます。

● 外線

- 入射してくるフェルミオン： $u(p, s)$
実線で書き、通常の時間の進行方向
- 入射してくる反フェルミオン： $\bar{v}(p, s)$
実線で書き、時間の進行が逆向き（出て行く負エネルギーフェルミオン）
- 入射してくる光子： $\epsilon_\mu(k, \lambda)$
波線で書く
- 出て行くフェルミオン： $\bar{u}(p, s)$
実線で書き、通常の時間の進行方向

- 出て行く反フェルミオン: $v(p, s)$
実線で書き、時間の進行が逆向き
- 出て行く光子: $\epsilon_\mu^*(k, \lambda)$
波線で書く

- 内線

$$\begin{aligned} \text{フェルミオン: } iS_F(p) &= \frac{i(p^\mu \gamma_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \text{光子: } iD_F^{\mu\nu}(p) &= \frac{-i4\pi\kappa_e g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

- 頂点: $-ie\gamma^\mu$

- ループ部分: $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$

- フェルミオンのループには $-\text{tr}$ をつける

- 外線に反フェルミオンがいるときは全体にマイナスをつける。もしくは頂点の符号を反転させる (反フェルミオンの電荷の符号が逆のため)

- 同種のフェルミオンの外線を入れ替えるときには全体にマイナスをつける

ファインマン則での注意は、人によって使うファインマン則が違うことです。違うといっても、大抵は伝播関数の定義が違うくらいです。例えば、ここでは $iS_F, iD_F^{\mu\nu}$ を使っていますが、 i を外したり、符号を反転させている場合があります。基本的な構造は同じなので、符号や i がどこに出ているのかに注意すれば、何が違って、どこを変更すればいいのかは分かると思います。