電子-陽子散乱～スピン偏極～

電子と陽子にはスピンがあるので、その寄与を加えます。

「ラザフォード散乱～スピン偏極～」と同じように、スピンの和は入射に対しては平均、散乱後に対しては合計を取ります。電子、陽子の始状態、終状態のスピンはそれぞれ s_i, s_f, S_i, S_f として

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4}e^4\sum_{S_f,S_i,s_f,s_i}|\overline{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu u(p_i,s_i)\frac{4\pi\kappa_e}{k^2+i\epsilon}\overline{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu u(P_i,S_i)|^2$$

陽子の和がいるだけでラザフォード散乱のときと同じです。なので、「ラザフォード散乱～スピン偏極～」での結果をそのまま流用できて

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_{fi}|^2 =& \frac{1}{4}\frac{(4\pi)^2\kappa_e^2e^4}{k^4}\mathrm{tr}[\frac{\gamma_\mu p_f^\mu+m}{2m}\gamma^\alpha\frac{\gamma_\nu p_i^\nu+m}{2m}\gamma^\beta]\mathrm{tr}[\frac{\gamma_\rho P_f^\rho+M}{2M}\gamma_\alpha\frac{\gamma_\lambda P_i^\lambda+M}{2M}\gamma_\beta]\\ =&\frac{1}{4}\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{k^4}\frac{1}{4m^2}\frac{1}{4M^2}L^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}\quad\ (\alpha=\kappa_e e^2)\end{aligned}$$

$i\epsilon$ は省いています。トレースはどちらの場合でも

$$l^{\alpha\beta} = \mathrm{tr}[(\gamma_\mu q^\mu+m)\gamma^\alpha(\gamma_\nu p^\nu+m)\gamma^\beta]$$

という形です。トレース内は

$$(\gamma_\mu q^\mu+m)\gamma^\alpha(\gamma_\nu p^\nu+m)\gamma^\beta = \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu\gamma^\beta q^\mu p^\nu+\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta mq^\mu+\gamma^\alpha\gamma_\nu\gamma^\beta mp^\nu+\gamma^\alpha\gamma^\beta m^2$$

奇数個のガンマ行列のトレースは消えるので

$$l^{\alpha\beta} = \mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta q_\mu p_\nu+\gamma^\alpha\gamma^\beta m^2] = q_\mu p_\nu\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta]+m^2\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta]$$

第１項は

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] = 4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}+g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}-g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})$$

から

$$q_\mu p_\nu\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] = 4(q^\alpha p^\beta+q^\beta p^\alpha-g^{\alpha\beta}(q\cdot p))$$

第 2 項は $\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta]=4g^{\alpha\beta}$ なので

$$l^{\alpha\beta}=4(q^\alpha p^\beta+q^\beta p^\alpha-g^{\alpha\beta}(q\cdot p))+4g^{\alpha\beta}m^2=4q^\alpha p^\beta+4q^\beta p^\alpha-4g^{\alpha\beta}((q\cdot p)-m^2)$$

よって

$$L^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}=16(q^\alpha p^\beta+q^\beta p^\alpha-g^{\alpha\beta}((q\cdot p)-m^2))(Q_\alpha P_\beta+Q_\beta P_\alpha-g_{\alpha\beta}((Q\cdot P)-M^2))$$

i,f が煩わしいので p_i は p、p_f は q としています (陽子では大文字)。展開すると

$$\begin{aligned}
&(q^\alpha p^\beta+q^\beta p^\alpha-g^{\alpha\beta}((q\cdot p)-m^2))(Q_\alpha P_\beta+Q_\beta P_\alpha-g_{\alpha\beta}((Q\cdot P)-M^2))\\
&=(q\cdot Q)(p\cdot P)+(q\cdot P)(p\cdot Q)-(q\cdot p)((Q\cdot P)-M^2)\\
&\quad+(q\cdot P)(p\cdot Q)+(q\cdot Q)(p\cdot P)-(q\cdot p)((Q\cdot P)-M^2)\\
&\quad-(Q\cdot P)((q\cdot p)-m^2)-(Q\cdot P)((q\cdot p)-m^2)+4((q\cdot p)-m^2)((Q\cdot P)-M^2)\\
&=2(q\cdot Q)(p\cdot P)+2(q\cdot P)(p\cdot Q)-2(q\cdot p)((Q\cdot P)-M^2)\\
&\quad-2(Q\cdot P)((q\cdot p)-m^2)+4((q\cdot p)-m^2)((Q\cdot P)-M^2)\\
&=2(q\cdot Q)(p\cdot P)+2(q\cdot P)(p\cdot Q)-2(q\cdot p)(Q\cdot P)+2(q\cdot p)M^2\\
&\quad-2(q\cdot p)(Q\cdot P)+2(Q\cdot P)m^2+4(q\cdot p)(Q\cdot P)-4(Q\cdot P)m^2-4(q\cdot p)M^2+4m^2M^2\\
&=2(q\cdot Q)(p\cdot P)+2(q\cdot P)(p\cdot Q)-2(Q\cdot P)m^2-2(q\cdot p)M^2+4m^2M^2
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2&=\frac{1}{4}\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{k^4}\frac{1}{4m^2}\frac{1}{4M^2}L^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}\\
&=\frac{1}{2}\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{m^2M^2}\frac{1}{k^4}((p_f\cdot P_f)(p_i\cdot P_i)+(p_f\cdot P_i)(p_i\cdot P_f)-(P_i\cdot P_f)m^2-(p_i\cdot p_f)M^2+2m^2M^2)
\end{aligned}$$

となります。

ここから「電子-陽電子散乱」での断面積の続きを計算していきます。陽子を固定させて電子をぶつける実験室系で行われるとして、陽子の始状態が固定（散乱前だけ固定) されていて、そこに電子がぶつかるとします。

必要になるものをいくつか先に示しておきます。今の設定では、最初は陽子は止まっているので、始状態の 4 元運動量は $P_i=(M,0)$ です。ここから、電子の始状態では p、終状態では p' として「$'$」で区別していきます。終状態での立体角は、「ラザフォード散乱」で出したように

$$d^3p'=|\boldsymbol{p}'|^2d|\boldsymbol{p}'|d\Omega'=|\boldsymbol{p}'|^2\frac{E'dE'}{|\boldsymbol{p}'|}d\Omega'=|\boldsymbol{p}'|E'dE'd\Omega' \tag{1}$$

実験室系では入射フラックスは

$$\frac{mM}{\sqrt{(p_i\cdot P_i)^2-m^2M^2}}=\frac{mM}{\sqrt{E^2M^2-m^2M^2}}=\frac{m}{\sqrt{E^2-m^2}}=\frac{m}{|p|} \tag{2}$$

また、「電子-陽子散乱」の最後に示したように

$$\int\frac{d^3p}{2E}=\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\int d^3p\delta(p^2-m_0^2)\Theta(p_0)=\int d^4p\delta(p^2-m_0^2)\Theta(p_0) \tag{3}$$

Θ は階段関数です。

断面積は陽子の終状態の d^3P_f を積分したものとして、(1),(2),(3) を使うと

$$\begin{aligned}d\sigma=&\int\frac{d^3P_f}{2E_f^P}\frac{mM}{\sqrt{(p\cdot P_i)^2-m^2M^2}}|\mathcal{M}_{fi}|^2(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i+p'-p)\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{m}{E'}\frac{2M}{(2\pi)^3}\\=&\int d^4P_f\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}|\mathcal{M}_{fi}|^2(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i+p'-p)\frac{m|\boldsymbol{p}'|dE'd\Omega'}{(2\pi)^3}\frac{2M}{(2\pi)^3}\delta(P_f^2-M^2)\Theta(P_f^0)\end{aligned}$$

d^3p' には (1)、d^3P_f には (3) を使っています。$d\Omega'$ を左辺に持っていって、E' の積分をしたものを微分断面積として

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'}=\int dE'\int d^4P_f\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}|\mathcal{M}_{fi}|^2\frac{m|\boldsymbol{p}'|}{(2\pi)^3}\frac{2M}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i+p'-p)\delta(P_f^2-M^2)\Theta(P_f^0)$$

P_f の積分はデルタ関数から、$P_f=P_i-p'+p$ となり (エネルギーと運動量の保存)

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega'}&=\frac{2m^2M}{(2\pi)^2|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{p}'|\int dE'|\mathcal{M}_{fi}|^2\delta((p'-P_i-p)^2-M^2)\Theta(P_i^0+E-E')\\&=\frac{2m^2M}{(2\pi)^2|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{p}'|\int_m^{M+E}dE'|\mathcal{M}_{fi}|^2\delta((p'-P_i-p)^2-M^2)\end{aligned}$$

積分範囲は階段関数から、上限は $E'<P_i^0+E=M+E$ です。そして、E' は電子のエネルギーなので、下限は電子の質量になります ($E'\geq m$)。

E' の積分をするためにデルタ関数内を E' で書けば

$$\begin{aligned}(p'-P_i-p)^2-M^2&=p'^2+P_i^2+p^2-2p'\cdot P_i-2p'\cdot p+2P_i\cdot p-M^2\\&=(E'^2-\boldsymbol{p}'^2)+M^2+(E^2-\boldsymbol{p}^2)-2E'M-2(E'E-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{p})+2ME-M^2\\&=p'^2+M^2+p^2-2E'M-2(E'E-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{p})+2ME-M^2\\&=m^2+m^2-2M(E'-E)-2E'E+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta\\&=2m^2-2M(E'-E)-2E'E+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta\end{aligned}$$

$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ の間の角度を θ としています。さらに、デルタ関数の関係

$$\int dx\delta(f(x)) = \sum_k \frac{1}{|\frac{df(x)}{dx}|_{x_k}}$$

を使って積分します。x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ は $f(x) = 0$ となる x です。微分は

$$\Big|\frac{d}{dE'}(p' - P_i - p)^2 - M^2)\Big| = \Big| -2(M + E - \frac{|\boldsymbol{p}|E'}{|\boldsymbol{p}'|}\cos\theta)\Big|$$

最後の項は

$$\begin{aligned} E^2 &= \boldsymbol{p}^2 + m^2 \\ \frac{dE^2}{d|\boldsymbol{p}|} &= 2|\boldsymbol{p}| \\ dE^2 &= 2|\boldsymbol{p}|d|\boldsymbol{p}| \\ 2EdE &= 2|\boldsymbol{p}|d|\boldsymbol{p}| \\ EdE &= |\boldsymbol{p}|d|\boldsymbol{p}| \end{aligned}$$

を使っています。これによって、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{m^2 M}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{M + E - \frac{|\boldsymbol{p}|E'}{|\boldsymbol{p}'|}\cos\theta}$$

と求まります。ついでに

$$m^2 - M(E' - E) - E'E + |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta = 0 \tag{4}$$

という保存則を持っていることもわかります。

散乱で陽子が動かないという極限ではどうなるか見ておきます。そのために、$E/M \ll 1$ とします。これは入射電子のエネルギーが止まっている陽子に比べて十分小さいとすることです。このとき、(4) は

$$\begin{aligned} -M(E' - E) &= 0 \\ ME' &= ME \end{aligned}$$

となるので、電子の散乱前と散乱後のエネルギーは等しいと見なせて

$$\boldsymbol{p}'^2 + m^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p}'^2$$

これを使うと

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \frac{m^2 M}{(2\pi)^2|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{p}'|\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{M(1+\frac{E}{M}-\frac{|\boldsymbol{p}|E'}{|\boldsymbol{p}'|M}\cos\theta)} \\
&= \frac{m^2 M}{(2\pi)^2|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{p}'|\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{M} \\
&= \frac{m^2}{(2\pi)^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2
\end{aligned} \tag{5}$$

となります。

この近似での $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ を求めます。実験室系での $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ は、$P_i^\mu = (M, 0)$ と $P_f = P_i + p - p'$ から

$$\begin{aligned}
&(p'\cdot P_f)(p\cdot P_i) + (p'\cdot P_i)(p\cdot P_f) - (P_i\cdot P_f)m^2 - (p\cdot p')M^2 + 2m^2M^2) \\
&= (p'\cdot P_f)EM + (p\cdot P_f)E'M - M(M+E-E')m^2 - (p\cdot p')M^2 + 2m^2M^2) \\
&= p'\cdot(P_i+p-p')EM + p\cdot(P_i+p-p')E'M - (EM-E'M)m^2 - (p\cdot p')M^2 + m^2M^2) \\
&= (E'M + p'\cdot p - p'\cdot p')EM + (EM + p\cdot p - p\cdot p')E'M - (p\cdot p')M^2 + m^2M^2) \\
&= 2EE'M^2 + (p'\cdot p - m^2)EM + (m^2 - p\cdot p')E'M - (p\cdot p')M^2 + m^2M^2) \\
&= 2EE'M^2 - (p\cdot p')(M^2 - EM + E'M) + m^2M^2)
\end{aligned}$$

となるので

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m^2M^2k^4}\big(2EE'M^2 - p'\cdot p(M^2 + M(E'-E)) + m^2M^2\big) \tag{6}$$

これを $E = E'$ とすれば

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2 &\simeq \frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m^2M^2k^4}M^2(2E^2 - p'\cdot p + m^2) \\
&= \frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m^2k^4}(2E^2 - p'\cdot p + m^2)
\end{aligned}$$

微分断面積に入れれば

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \frac{m^2}{(2\pi)^2}\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m^2k^4}(2E^2 - p'\cdot p + m^2) \\
&= \frac{2\alpha^2}{k^4}(2E^2 - p'\cdot p + m^2)
\end{aligned}$$

今の近似では、$k_\mu = (0, -\boldsymbol{q})$ なので、$k^2 = -|\boldsymbol{k}|^2$ となって

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{2\alpha^2}{|\boldsymbol{k}|^4}(2E^2 - p' \cdot p + m^2)$$

これは散乱角を使って書いていない Mott の散乱公式です。よって、クーロンポテンシャルによる散乱への近似になっています。入射電子のエネルギーが小さいために、陽子を動かすほどの力がないために、クーロンポテンシャルによる散乱にいなるということです。また、$k_\mu = (0, -\boldsymbol{k})$ から、4 元運動量の差 k_μ によるやり取りは運動量だけで、エネルギーでは起きていないことも分かります。

最後に別の近似として、超相対論的極限 (ultrarelativistic limit) を取ってみます。(5) に対して、$m/E \ll 1$ とします。これは静止エネルギーよりもエネルギー E が大きいという近似なので、超相対論的極限と呼ばれます。

そうすると

$$\frac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|} = \frac{\sqrt{E'^2 - m^2}}{\sqrt{E^2 - m^2}} = \frac{E'\sqrt{1 - m^2/E'^2}}{E\sqrt{1 - m^2/E^2}} \simeq \frac{E'}{E}$$

これを (5) に使えば

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \frac{m^2 M}{(2\pi)^2}\frac{E'}{E}\frac{|M_{fi}|^2}{M + E - \frac{EE'}{E'}\cos\theta} \\
&= \frac{m^2 M}{(2\pi)^2}\frac{E'}{E}\frac{|M_{fi}|^2}{M + E - E\cos\theta} \\
&= \frac{m^2 M}{(2\pi)^2}\frac{E'}{E}\frac{|M_{fi}|^2}{M(1 + \frac{E}{M}(1 - \cos\theta))} \\
&= \frac{m^2}{(2\pi)^2}\frac{E'}{E}\frac{|M_{fi}|^2}{1 + \frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

後は $|\mathcal{M}_{fi}M_{fi}|^2$ を求めればいいです。

先に計算に使うものを出しておきます。k^2 は

$$k^2 = (p_f - p_i)^2 = p_f^2 + p_i^2 - 2p_f \cdot p_i = 2(m^2 - p_f \cdot p_i) \quad (E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2)$$

なので

$$\begin{aligned}
k^2 - 2m^2 &= -2p_f \cdot p_i \\
&= -2(EE' - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}') \\
&= -2EE'(1 - \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'}{EE'}) \\
&= -2EE'(1 - \frac{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|}{EE'}\cos\theta) \\
&\simeq -2EE'(1 - \cos\theta) \\
&= -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{7}$$

もしくは

$$\begin{aligned}
k^2 = 2(m^2 - EE' + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}') = 2(m^2 - EE' + |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta) \\
&= -2EE'(-\frac{m^2}{EE'} + 1 - \frac{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|}{EE'}\cos\theta) \\
&\simeq -2EE'(1-\cos\theta) \\
&= -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

となります。(4) の極限を取ると

$$\begin{aligned}
M(E'-E) &= -m^2 + E'E - |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta \\
&= E'E(\frac{m^2}{E'E} - 1 + \frac{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|}{E'E}\cos\theta) \\
&\simeq -E'E(1-\cos\theta) \\
&= -2E'E\sin^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{9}$$

$|\boldsymbol{p}|/E \simeq 1$ としています (静止質量が無視できるので $E^2 \simeq |\boldsymbol{p}|^2$)。これに (8) を使えば

$$\frac{E'-E}{M} \simeq \frac{-2E'E\sin^2\frac{\theta}{2}}{M^2} \simeq \frac{k^2}{2M^2}$$

となります。

(7),(8),(9) によって、(6) での $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ は

$$\begin{aligned}
|M_{fi}|^2 &= \frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m^2M^2k^4}\big(2EE'M^2 - p'\cdot p(M^2 + M(E'-E)) + m^2M^2\big) \\
&= \frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m^2M^2k^4}\big(2EE'M^2 - \frac{1}{2}(2m^2-k^2)(M^2+M(E'-E)) + m^2M^2\big) \\
&= \frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m^2M^2k^4}\big(2EE'M^2 + \frac{k^2}{2}(M^2+M(E'-E)) - m^2(M^2+M(E'-E)) + m^2M^2\big) \\
&= \frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m^2M^2k^4}\big(2EE'M^2 + \frac{k^2}{2}(M^2+M(E'-E)) - m^2M(E'-E)\big) \\
&= \frac{2(4\pi)^2\alpha^2EE'M^2}{2m^2M^2k^4}\big(1 + \frac{k^2}{4EE'}(1+\frac{E'-E}{M}) - m^2\frac{E'-E}{2EE'M}\big) \\
&= \frac{2(4\pi)^2\alpha^2EE'M^2}{2m^2M^2k^4}\big(1 + \frac{k^2}{4EE'} + \frac{(E'-E)(k^2-2m^2)}{4EE'M}\big) \\
&\simeq \frac{2(4\pi)^2\alpha^2EE'}{32m^2E^2E'^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\big(1 - \sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{k^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\big) \\
&= \frac{\alpha^2\pi^2}{m^2EE'\sin^4\frac{\theta}{2}}\big(\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{k^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\big)
\end{aligned}$$

というわけで、超相対論的極限での微分断面積は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \frac{m^2}{(2\pi)^2}\frac{E'}{E}\frac{1}{(1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2})}\frac{\alpha^2\pi^2}{m^2EE'\sin^4\frac{\theta}{2}}\big(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{k^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\\
&= \frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{1}{1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}\big(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{k^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\big)
\end{aligned}
$$

(8) から (**??**)

$$
\begin{aligned}
M(E'-E) =& -2E'E\sin^2\frac{\theta}{2}\\
E' =& \frac{E}{1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\big(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{k^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\\
&= \frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\big(1-\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{k^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}big)\\
&= \frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\big(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\big)-\frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\frac{k^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

第一項は $E^2\simeq|\boldsymbol{p}|^2$ から、「ラザフォード散乱〜スピン偏極〜」での $\beta=1$(速度が光速) の Mott の散乱公式と E'/E を除いて同じになります。このため、今の場合では散乱によるエネルギー変化の影響が出ていることが分かります。また、電子が光速で陽子に向かっていっても、陽子が重いために Mott の散乱公式の形になっているとも言えます。角度依存性はスピンによって現れるので、第 2 項は陽子がスピンを持つことによる影響です。

電子-陽子散乱について見てきましたが、これは厳密なものではないです。なぜなら、陽子をディラック粒子 (電子) として内部構造を無視しているためです。実験との比較に適用できるようにするには、陽子の内部構造を表現しているものに修正しなくてはいけません。陽子でなくミューオンのように内部構造がないものならば、修正なしで適用できます。