

電子-陽子散乱

電子と陽子の散乱を考えます。ただし、陽子はディラック方程式に従うとして近似したものです (陽子は内部構造を持つので点粒子ではない)。

ラザフォード散乱では運動量は保存されませんでした、今回は標的が動くので、運動量も保存されます。

「ラザフォード散乱」では4元ベクトルポテンシャル A_μ のうちクーロンポテンシャルしか考えませんでした、ここでは3次元ベクトルポテンシャル部分も含めた4次元ベクトルになります。また、電子-陽子散乱の様子は下の図のように書かれます。

A^μ はマクスウェル方程式に従い

$$\square A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu(x) = 4\pi\kappa_e J^\mu$$

A^μ を $\kappa_b^{-1} A^\mu$ としています。ローレンツゲージ $\partial_\nu A^\nu = 0$ を取ることにして

$$\square A^\mu(x) = 4\pi\kappa_e J^\mu$$

これから、ディラック方程式と同じように伝播関数を作ります。電磁場の伝播関数 $D_F(x, y)$ が従う方程式は

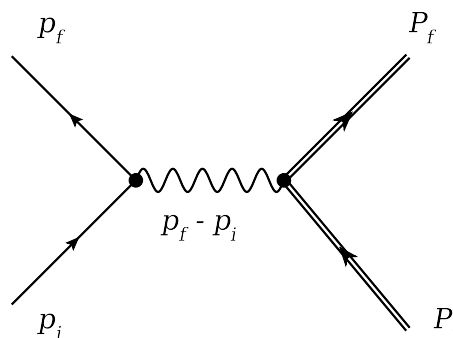
$$\square_x D_F(x, y) = 4\pi\kappa_e \delta(x - y)$$

と定義します。 \square_x は x の微分であることを表わしますが、混乱が起きなそうときは x を外して書きます。 $D_F(x, y)$ は差 $x - y$ のみに依存しているとして (並進不変性)、フーリエ変換は

$$D_F(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[-ik \cdot (x - y)] D_F(k)$$

これとデルタ関数

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[-ik \cdot (x - y)]$$



から

$$\begin{aligned}\square_x D_F(x, y) &= 4\pi\kappa_e \delta(x - y) \\ \square_x \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_F(k) \exp[-ik \cdot (x - y)] \right) &= \frac{4\pi\kappa_e}{(2\pi)^4} \int d^4 k \exp[-ik \cdot (x - y)] \\ &\quad - \int d^4 k k^2 D_F(k) \exp[-ik \cdot (x - y)] = 4\pi\kappa_e \int d^4 k \exp[-ik \cdot (x - y)]\end{aligned}$$

なので、 D_F は

$$D_F(k) = -\frac{4\pi\kappa_e}{k^2}$$

これは $k^2 \neq 0$ の必要があります。しかし、積分の範囲は $k^2 = 0$ を横切っているので、ここでも極の避け方を設定する必要があります。

すでに伝播関数と呼んでいるように、ディラック方程式と同じように微小部分 $i\epsilon$ を加えるだけでよく

$$D_F(k) = -\frac{4\pi\kappa_e}{k^2 + i\epsilon}$$

これが運動量表示での電磁場の伝播関数の形になり、電子の伝播関数と同じように QED での中心的なものです (+ $i\epsilon$ を加えたことから分かるように、時間の進みが過去から未来と、未来から過去の両方を含んでいる)。ただし、伝播関数と言ったときは

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{4\pi\kappa_e g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

としたものを指すのが一般的です。

また、ここでの話からは分かりませんが、電磁場を量子化すると光子が出てくることから、 D_F は光子の伝播関数とも呼ばれます。これは場の量子論の範疇です。光子は電子と違い電荷がないために、光子とその反粒子とは区別がないです。このため、光子に関しては粒子、反粒子の意味が同じになっています (光子の反粒子は光子)。そして、未来から過去へ進む負エネルギー粒子 (光子) が、過去から未来へ進む正エネルギー反粒子 (光子) になるというのは電子と同じです。

位置表示での $D_F(x, y)$ は

$$D_F(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-4\pi\kappa_e}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}$$

となり、 $A^\mu(x)$ は

$$A^\mu(x) = \int d^4 y D_F(x, y) J^\mu(y)$$

両辺に \square_x を作用させれば成立していることが確かめられます。この $A^\mu(x)$ を S 行列にいれれば、入射してくる電子を「ラザフォード散乱」と同じように、波動関数を平面波 ϕ_i として

$$\begin{aligned} S &= -iq \int d^4x \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \phi_i(x) \\ &= -iq \int d^4x \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \int d^4y D_F(x, y) J_\mu(y) \phi_i(x) \\ &= -i \int d^4x d^4y (q \bar{\psi}_f(x) \gamma_\mu \phi_i(x)) D_F(x, y) J^\mu(y) \end{aligned}$$

括弧部分は「ラザフォード散乱」でも触れたように電子のカレントに相当し ($q = -e$)、入射してくる始状態と散乱後の終状態によるものなので、遷移カレント (transition current) と呼ばれます。いちいち遷移カレントと呼ぶずにカレントと呼ぶことが多いです。

マクスウェル方程式での J^μ は電流密度なので、これは陽子によって発生していると考えられます。そして、陽子はディラック方程式に従うとしているので J^μ はそのカレントとします。なので、陽子の電荷 $q = +e$ にして、 $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ とします。そして、電子と同様に始状態から終状態へのカレントになっているはずなので

$$J^\mu(y) = e\bar{\psi}_f^P(y)\gamma^\mu\psi_i^P(y)$$

添え字の P は陽子を表わします。このように、 S 行列は $D_F(x, y)$ を無視すれば、カレント \times カレントという構造にします。

陽子は電子と質量が異なるだけとし、陽子の波動関数を電子の平面波によって

$$\begin{aligned} \psi_i^P(y) &= \sqrt{\frac{M}{E_i^P V}} u(P_i, S_i) \exp[-iP_i \cdot y] \\ \psi_f^P(y) &= \sqrt{\frac{M}{E_f^P V}} u(P_f, S_f) \exp[-iP_f \cdot y] \end{aligned}$$

M は陽子の質量です。大文字の運動量とスピンは陽子のものとします。これを入れれば、 $J^\mu(y)$ は

$$J^\mu(y) = \frac{e}{V} \sqrt{\frac{M^2}{E_i^P E_f^P}} \exp[i(P_f - P_i) \cdot y] \bar{u}(P_f, S_f) \gamma^\mu u(P_i, S_i)$$

となるので、 S 行列は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{V^2} \sqrt{\frac{m^2}{E_i E_f}} \sqrt{\frac{M^2}{E_i^P E_f^P}} \\ &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int d^4x d^4y \exp[i(p_f - p_i) \cdot x - ik \cdot (x - y) + i(P_f - P_i) \cdot y] \\ &\times ie^2 \bar{u}(p_f, s_f) \gamma_\mu u(p_i, s_i) \frac{-4\pi\kappa_e}{k^2 + i\epsilon} \bar{u}(P_f, S_f) \gamma^\mu u(P_i, S_i) \end{aligned}$$

x, y 積分は

$$\int d^4x \exp[i(p_f - p_i - k) \cdot x] = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - k)$$

$$\int d^4y \exp[i(P_f - P_i + k) \cdot y] = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k)$$

なので、2行目と3行目は

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - k) (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + k) \frac{-1}{k^2 + i\epsilon}$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + (p_f - p_i)) \frac{-1}{(p_f - p_i)^2 + i\epsilon}$$

1行目から2行目へ行くとき、デルタ関数の関係から $k^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu$ となり、 k^μ は電子の始状態と終状態の4元運動量の差になっています。なので、 k^μ が電子と陽子の間のやりとりを表しています。この4元運動量の移動を担っているものを仮想光子 (virtual photon) と呼びます。仮想とついているのは、エネルギーと運動量の移動なので一般的に $k^2 \neq 0$ であるためです (現実の光子は $k^2 = 0$ を満たしている)。実際、仮想光子は観測することができなく (そもそも k は積分変数で最後の結果に現れない)、実在しているかどうかわからない計算上出てきた存在です。量子論的には、不確定性関係の範囲内で存在が許されているとも言えます。

陽子側から見ても同様で

$$k^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu = P_i^\mu - P_f^\mu$$

これは、陽子の始状態と終状態のエネルギーと運動量の差を持った仮想光子が、始状態の電子に加わって終状態の電子状態に変化させています。このように、仮想光子が電子と陽電子のやりとりの仲介役を担っていることになり、それが伝播関数 D_F によって与えられています。

積分実行後の S 行列は

$$S = \frac{1}{V^2} \sqrt{\frac{m^2}{E_i E_f}} \sqrt{\frac{M^2}{E_i^P E_f^P}} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)$$

$$\times ie^2 [\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_\mu u(p_i, s_i)] \frac{-4\pi\kappa_e}{(p_f - p_i)^2 + i\epsilon} [\bar{u}(P_f, S_f) \gamma^\mu u(P_i, S_i)]$$

電子と陽子が対称な式になっているため、陽子を標的にしようと、電子を標的にしようと物理的には同等であることがはっきりと表われています。

ラザフォード散乱での S 行列との違いはデルタ関数部分にエネルギーだけでなく運動量も含まれていることで、それによって運動量も保存します。ここまでが物理としての設定で、後は断面積を求めればいいです。

ここから断面積に今の S を入れます。断面積は

$$d\sigma = \frac{|S|^2 N}{TV |J_{in}|}$$

T は時間、 V は体積、 N は終状態の可能な状態数、 J_{in} は入射フラックスです。断面積を求める前に不変振幅 (invariant amplitude) を定義しておきます。不変振幅 \mathcal{M}_{fi} を

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{fi} &= ie^2 [\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_\mu u(p_i, s_i)] \frac{-4\pi\kappa_e}{k^2 + i\epsilon} [\bar{u}(P_f, S_f) \gamma^\mu u(P_i, S_i)] \\ &= [\bar{u}(p_f, s_f) (ie\gamma_\mu) u(p_i, s_i)] \frac{-i4\pi\kappa_e}{k^2 + i\epsilon} [\bar{u}(P_f, S_f) (-ie\gamma^\mu) u(P_i, S_i)] \end{aligned}$$

と定義します。ただし、今の場合の不変振幅がこれであるというだけで、全てがこうなるわけではないです。2行目の形に書き換えたのにもちゃんと意味があり、「ファインマン図」で触れます。不変振幅は重要なもので、これ以降は S 行列に変わって、この不変振幅に中心的な役割を担わせます。その理由は、 S^2 は不変振幅を使うと

$$|S|^2 = \frac{1}{V^4} \frac{m^2}{E_i E_f} \frac{M^2}{E_i^p E_f^p} ((2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i))^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

となり、規格化とデルタ関数を外に出した部分になるからです。不変振幅は一般的に

$$S = -iC_0 \delta^4(P_i + p_i - P_f - p_f) \mathcal{M}_{fi}$$

という形で定義され (C_0 は規格化定数に相当するもの)、 S 行列から $-i$ 、 N_0 、デルタ関数を除いたものです。

断面積の計算に戻ります。ここでもデルタ関数の2乗があるので、「ラザフォード散乱」で求めたものを使います。ただし、「ラザフォード散乱」ではデルタ関数が0成分しかなかったのですが、今は空間成分も含んでいるので、その部分だけを変更して

$$\begin{aligned} &((2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i))^2 \\ &= ((2\pi)^4 \delta(P_{f_0} + p_{f_0} - P_{i_0} - p_{i_0}) \delta(P_{f_1} + p_{f_1} - P_{i_1} - p_{i_1}) \delta(P_{f_2} + p_{f_2} - P_{i_2} - p_{i_2}) \delta(P_{f_3} + p_{f_3} - P_{i_3} - p_{i_3}))^2 \end{aligned}$$

0成分である時間の場合は同じように時間 T が出てき、1~3成分である空間座標では長さ L が出てくることになり、3次元なので体積 $L^3 = V$ となります。よって

$$((2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i))^2 = (2\pi)^4 \delta(0) (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)$$

というわけで

$$((2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i))^2 \Rightarrow TV (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)$$

となり

$$|S|^2 = \frac{1}{V^4} \frac{m^2}{E_i E_f} \frac{M^2}{E_i^p E_f^p} TV (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

となります。

断面積にいる入射フラックス J_{in} も「ラザフォード散乱」と同じで

$$|J_{in}| = \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{V}|}{V}$$

\mathbf{v}, \mathbf{V} は電子、陽子の 3 次元速度です (体積と記号が重なりますが陽子では大文字にしているので V を使います)。両方とも動いているので相対的な速度を使います。 $|S|^2$ を $|J_{in}|$ で割るので

$$\begin{aligned} \frac{m}{E_i} \frac{M}{E_i^P} \frac{1}{V|J_{in}|} &= \frac{mM}{E_i E_i^P |\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_i|} = \frac{mM}{E_i E_i^P \sqrt{\mathbf{v}_i^2 + \mathbf{V}_i^2 - 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{V}_i}} \\ &= \frac{mM}{E_i E_i^P \sqrt{\frac{\mathbf{p}_i^2}{E_i^2} + \frac{\mathbf{P}_i^2}{(E_i^P)^2} - 2\frac{\mathbf{p}_i}{E_i} \cdot \frac{\mathbf{P}_i}{E_i^P}}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{\mathbf{p}_i^2 (E_i^P)^2 + \mathbf{P}_i^2 E_i^2 - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i E_i E_i^P}} \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{p}_i と \mathbf{P}_i の間の角度が 0 として

$$(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i)^2 \Rightarrow p_i^2 P_i^2$$

これは共線性と呼ばれ、同じ軸上のときになりたつ関係です。同じ軸上なら内積

$$(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i)^2 = (|\mathbf{p}_i| |\mathbf{P}_i| \cos \theta)^2$$

において、 $\theta = 0$ のことなので、 $|\mathbf{p}_i|^2 |\mathbf{P}_i|^2$ となります。共線性とすることで

$$\begin{aligned} \frac{m}{E_i} \frac{M}{E_i^P} \frac{1}{V|J_{in}|} &= \frac{mM}{\sqrt{\mathbf{p}_i^2 (M^2 + \mathbf{P}_i^2) + \mathbf{P}_i^2 (m^2 + \mathbf{p}_i^2) - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i E_i E_i^P}} \\ &\simeq \frac{mM}{\sqrt{\mathbf{p}_i^2 (M^2 + \mathbf{P}_i^2) + \mathbf{P}_i^2 m^2 + (\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2 - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i E_i E_i^P}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{\mathbf{p}_i^2 M^2 + \mathbf{p}_i^2 \mathbf{P}_i^2 + \mathbf{P}_i^2 m^2 + (\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2 - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i E_i E_i^P}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{(\mathbf{p}_i^2 + m^2)(\mathbf{P}_i^2 + M^2) - m^2 M^2 + (\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2 - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i E_i E_i^P}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{E_i^2 E_i^{P^2} - m^2 M^2 + (\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{p}_i)^2 - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i E_i E_i^P}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{(E_i E_i^P - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{P}_i)^2 - m^2 M^2}} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m^2 M^2}} \end{aligned}$$

共線性を使うときに \simeq としています。このときを共線衝突 (collinear collision) と呼びます。
 後は周期的境界条件として、可能な状態数

$$N = V^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3}$$

を使うことで (今は電子、陽子の終状態があるのでそれぞれの可能な状態数の積を取る)、断面積 $d\sigma$ は

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|S|^2 N}{TV|J_{in}|} = \frac{1}{V|J_{in}|} \frac{m^2}{E_i E_i^P} \frac{M^2}{E_f E_f^P} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{mM}{E_i E_i^P V |J_{inc}|} \frac{mM}{E_f E_f^P} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{mM}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m^2 M^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_f} \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_f^P} \end{aligned}$$

となり、後はスピンの計算をすることになります。最後の部分

$$dLips = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) mM \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f} \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3 E_f^P} \quad (1)$$

これは Lips=Lorentz invariant phase space と呼ばれ、ローレンツ不変な位相空間の体積です。
 ローレンツ不変であることを示します。 $E^2 = p^2 + m^2$ として

$$\begin{aligned} \delta(p^2 - m^2) &= \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) \\ &= \delta(p_0^2 - E^2) \\ &= \delta((p_0 + E)(p_0 - E)) \\ &= \frac{1}{|2E|} \delta(p_0 - E) + \frac{1}{|-2E|} \delta(p_0 + E) \\ &= \frac{1}{2E} (\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)) \quad (E > 0) \end{aligned}$$

使っているのはデルタ関数の性質

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{1}{|df(x)/dx|_{x_k}} \delta(x - x_k) \quad (f(x_k) = 0)$$

この変形はいろいろなとこで出てくるので覚えておくと便利です。これによって

$$\int_0^\infty dp_0 \delta(p^2 - m^2) = \int_0^\infty dp_0 \frac{1}{2E} \delta(p_0 - E) = \frac{1}{2E}$$

$\delta(p_0 - E)$ だけになるのは、 p_0 が 0 から ∞ の範囲だからです。また、 p_0 は負の値を許してないので、階段関数 Θ を使って $p_0 < 0$ で消えるという制限を入れれば

$$\int_0^{\infty} dp_0 \delta(p^2 - m^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0)$$

4次元積分にするために d^3p の積分をくっつければ

$$\int \frac{d^3p}{2E} = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int d^3p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0)$$

最右辺の4次元積分とデルタ関数部分はローレンツ不変です。そして、階段関数は $p_0 > 0$ ならよく、これは時間反転のローレンツ変換でなければ維持されます。よって、右辺は相対論的量子力学での「ローレンツ変換」で分類した $\det[a^\mu_\nu] = +1$, $a^0_0 \geq 1$ のローレンツ変換に対して不変で、 $d^3p/2E$ も不変と分かります。よって、(1) はローレンツ不変となります。