

電子-電子、電子-陽電子散乱

ここでは電子と電子、電子と陽電子による散乱を扱います。電子と電子のように同じ粒子では異なる粒子による散乱とは違った扱いが必要になります。

断面積を最後まで求めずに、特徴について見ていきます。

運動量とスピンの (p_1, s_1) と与えられている電子が、 (p_2, s_2) の電子と散乱したとし、散乱後はそれぞれ $(p'_1, s'_1), (p'_2, s'_2)$ になるとします。しかし、 (p_1, s_1) が (p'_2, s'_2) になり、 (p_2, s_2) が (p'_1, s'_1) になったと考えても同じ散乱に見えます (電子を区別できないので、2つの散乱を区別できない)。同じ散乱に見えているので、確率振幅を求めるには両方を足す必要があります (実験的に区別できないので、両方を足さないと実験と比較できない)。これが電子と電子のように同種粒子での散乱での特徴です。散乱の仕方が増えるので、 S 行列の項が増えます。散乱を図で書くと図 1 のようになります。

電子-電子散乱での S 行列は「電子-陽電子散乱」での S 行列の陽子の部分を電子に書き換えてやればいだけで (電荷は $-e$ 同士なので、 $-e$ と $+e$ のときと符号が反転する)。しかし、今触れたように散乱の仕方が異なる項が加わります。その項は散乱後の運動量が入れ替わっているだけで

$$\begin{aligned}
 S &= S(\text{normal}) + S(\text{exchange}) \\
 &= \frac{1}{V^2} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}} \sqrt{\frac{m^2}{E'_1 E'_2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \\
 &\quad \times (-ie^2) \left([\bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1)] \frac{-4\pi\kappa_e}{(p_1 - p'_1)^2} [\bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2)] \right. \\
 &\quad \left. - [\bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1)] \frac{-4\pi\kappa_e}{(p_1 - p'_2)^2} [\bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_2, s_2)] \right) \\
 &= \frac{1}{V^2} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}} \sqrt{\frac{m^2}{E'_1 E'_2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \\
 &\quad \times \left([\bar{u}(p'_1, s'_1) (-ie\gamma_\mu) u(p_1, s_1)] \frac{-i4\pi\kappa_e}{(p_1 - p'_1)^2} [\bar{u}(p'_2, s'_2) (-ie\gamma^\mu) u(p_2, s_2)] \right. \\
 &\quad \left. - [\bar{u}(p'_2, s'_2) (-ie\gamma_\mu) u(p_1, s_1)] \frac{-i4\pi\kappa_e}{(p_1 - p'_2)^2} [\bar{u}(p'_1, s'_1) (-ie\gamma^\mu) u(p_2, s_2)] \right)
 \end{aligned}$$

第 1 項の電磁場の運動量 k^μ は $p_1^\mu - p'_1{}^\mu = k^\mu$ 、第 2 項では $p_1^\mu - p'_2{}^\mu = k^\mu$ になります。量子力学でも出てくるように、2つのフェルミオンによる波動関数は波動関数 (粒子) の入れ替えに対して

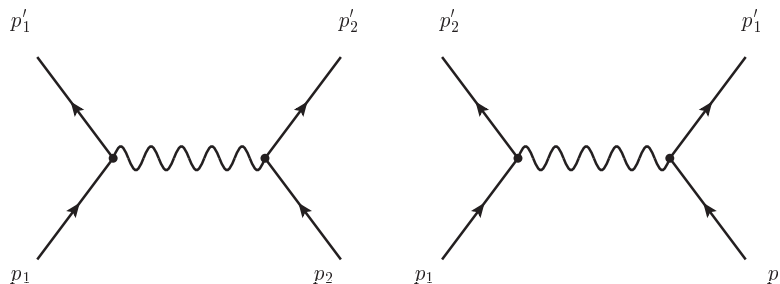


図 1

$$\Psi = \psi(1)\psi(2) - \psi(2)\psi(1)$$

となる反対称性があるので、これと同じように第 2 項では符号を反転させています。最後の形に書き換えた理由は「ファインマン図」で触れます。ちなみに、2 粒子の波動関数には係数がありますが、断面積の計算には関係ありません。これは断面積自体には同一粒子の存在は関係ないからです。

断面積を求めます。断面積は

$$d\sigma = \frac{|S|^2 N}{TV|J_{in}|} = \frac{|S|^2}{T} \frac{V}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \frac{V d^3 p'_1}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 p'_2}{(2\pi)^3}$$

T は時間、 V は体積、 N は終状態の可能な状態数、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ はそれぞれの電子の速度です。これの終状態の運動量は積分することにして、断面積は

$$d\sigma = \int \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3} \frac{|S|^2}{T} \frac{V^3}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}$$

2 つの電子は同じエネルギー E を持つとし、重心系で計算します。重心系では全運動量が 0 になるので、運動量の保存は

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$$

エネルギー保存は

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (E_1 = E_2 = E'_1 = E'_2 = E)$$

衝突する電子の相対速度 $v = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ は重心系に対する電子の速度を w とすれば、衝突する電子の相対速度は $v = 2w$ です。これらによって断面積は

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3} \frac{|S|^2}{T} \frac{V^3}{|v|} \\ &= \frac{m^4}{2(2\pi)^2 E^4 w} \int d^3 p'_1 d^3 p'_2 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \end{aligned}$$

不変振幅 \mathcal{M}_{fi} は S 行列の規格化とデルタ関数を外に出した部分です。スピンは入射電子では平均、散乱後では和を取ることにして

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4} \sum_{s_1, s'_1} \sum_{s_2, s'_2} \left| \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \frac{4\pi\kappa_e}{(p_1 - p'_1)^2} \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2) \right. \\ &\quad \left. - \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \frac{4\pi\kappa_e}{(p_1 - p'_2)^2} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_2, s_2) \right|^2 \end{aligned} \quad (1)$$

「電子-陽子散乱」のときから新しく、第1項と第2項の積による項が出てきます。これは $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0$ から

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2) (\bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\nu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\nu u(p_2, s_2))^\dagger \\
&= \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2) (u^\dagger(p'_2, s'_2) \gamma_0 \gamma_\nu u(p_1, s_1) u^\dagger(p'_1, s'_1) \gamma_0 \gamma^\nu u(p_2, s_2))^\dagger \\
&= \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2) u^\dagger(p_2, s_2) \gamma^{\nu\dagger} \gamma_0^\dagger u(p'_1, s'_1) u^\dagger(p_1, s_1) \gamma_\nu^\dagger \gamma_0^\dagger u(p'_2, s'_2) \\
&= \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2) u^\dagger(p_2, s_2) \gamma_0 \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) u^\dagger(p_1, s_1) \gamma_0 \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \\
&= \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\nu u(p'_2, s'_2)
\end{aligned}$$

スピン和は

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_1, s'_1} \sum_{s_2, s'_2} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\nu u(p'_1, s'_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \\
&= \sum_{s_1, s'_1} \sum_{s_2, s'_2} \bar{u}_a(p'_1, s'_1) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1, s_1) \bar{u}_c(p'_2, s'_2) (\gamma^\mu)_{cd} u_d(p_2, s_2) \\
&\quad \times \bar{u}_e(p_2, s_2) (\gamma^\nu)_{ef} u_f(p'_1, s'_1) \bar{u}_g(p_1, s_1) (\gamma_\nu)_{gh} u_h(p'_2, s'_2) \\
&= \left(\frac{p_1^\mu \gamma_\mu + m}{2m} \right)_{fa} (\gamma_\rho)_{ab} \left(\frac{p_1^\nu \gamma_\nu + m}{2m} \right)_{bg} (\gamma_\lambda)_{gh} \left(\frac{p_2^\alpha \gamma_\alpha + m}{2m} \right)_{hc} (\gamma^\rho)_{cd} \left(\frac{p_2^\beta \gamma_\beta + m}{2m} \right)_{de} (\gamma^\lambda)_{ef} \\
&= \text{tr} \left[\frac{p_1^\mu \gamma_\mu + m}{2m} \gamma_\rho \frac{p_1^\nu \gamma_\nu + m}{2m} \gamma_\lambda \frac{p_2^\alpha \gamma_\alpha + m}{2m} \gamma^\rho \frac{p_2^\beta \gamma_\beta + m}{2m} \gamma^\lambda \right]
\end{aligned}$$

もう1つ出てくる積の項は (1) の第1項と第2項の変数の対応から、 p'_1 と p'_2 を入れ替えたものです。よって

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{(4\pi)^2 \kappa_e^2 e^4}{4} \left(\frac{1}{(p_1 - p'_1)^4} \text{tr} \left[\frac{p_1^\mu \gamma_\mu + m}{2m} \gamma_\rho \frac{p_1^\nu \gamma_\nu + m}{2m} \gamma_\lambda \text{tr} \left[\frac{p_2^\alpha \gamma_\alpha + m}{2m} \gamma^\rho \frac{p_2^\beta \gamma_\beta + m}{2m} \gamma^\lambda \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} \text{tr} \left[\frac{p_1^\mu \gamma_\mu + m}{2m} \gamma_\rho \frac{p_1^\nu \gamma_\nu + m}{2m} \gamma_\lambda \frac{p_2^\alpha \gamma_\alpha + m}{2m} \gamma^\rho \frac{p_2^\beta \gamma_\beta + m}{2m} \gamma^\lambda \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p'_1 \Leftrightarrow p'_2) \right) \right)
\end{aligned}$$

最後の $(p'_1 \Leftrightarrow p'_2)$ は、第1項と第2項での p'_1 と p'_2 を入れ替えたものです。

第1項ではトレース同士の積、第2項はトレースが1つです。この違いは、スピン和において第1項と第2項は

$$\sum_{s_1, s'_1} (s_1, s'_1) \sum_{s_2, s'_2} (s_2, s'_2), \quad \sum_{s_1, s'_1} \sum_{s_2, s'_2} (s_1, s'_1) (s_1, s'_2)$$

となっているからです。図2でトレースの部分の違いを図にして示しています。図2の上のほうが第1項、下のほうが第2項に対応します。図では、 $u(p, s)$ と $\bar{u}(p, s)$ によって生じる $(p_\mu \gamma^\mu + m)/2m$ を実線で書き、その実線を運動量の並びに対応させるように引いています。ガンマ行列は黒点にしています。そして、黒丸の地点で運動量が変

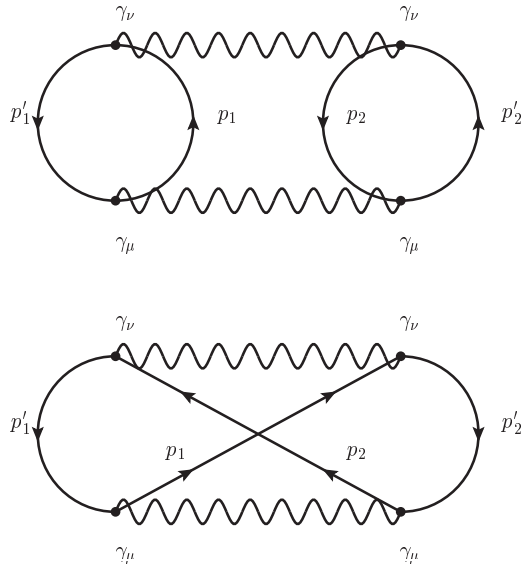


図 2

化し、その運動量の変化は波線で書いています。波線部分は上側の図では $1/(p_1 - p'_1)^2$ 、下側の図では $1/(p_1 - p'_1)^2$ と $1/(p_2 - p'_2)^2$ で、光子の伝播関数に対応します。

上側の図では p_1, p'_1 と p_2, p'_2 の運動量が混ざっていないので、それぞれ単独の円で書けます。これに対して下側の図では混ざっているなので、上側の図の線を下側のように書き換えています。閉じた円の部分がトレースになり、第 1 項ではトレース \times トレース、第 2 項では分離していないので単独のトレースになります。そして、このように図で 2 つの円が分離せずにクロスしている場合、符号を反転させます (マイナスをつける)。

このように数式と図を対応させる規則をファインマン則と呼び、図をファインマン図と呼びます。しかし、今はトレース部分に対するもので、これはかなり特殊な場合です。一般的にファインマン則と言った時には、不変振幅の規則を指すことが多いです。しかし、全体的には、数式に対応させるように図を書くことをファインマン則と言っている雰囲気のようにです (数式と図に対応する基本的な規則が同じだから)。

超相対論的極限取ったとして、出てくるトレースを計算します。まず、ガンマ行列の内積

$$\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma^\rho = -2\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\nu, \quad \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma^\lambda = 4g_{\nu\beta}$$

を使うと

$$\begin{aligned} p_1'^\mu p_1'^\nu p_2'^\alpha p_2'^\beta \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma^\rho \gamma_\beta \gamma^\lambda] &= p_1'^\mu p_1'^\nu p_2'^\alpha p_2'^\beta \text{tr}[\gamma_\mu (\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma^\rho) \gamma_\beta \gamma^\lambda] \\ &= -2p_1'^\mu p_1'^\nu p_2'^\alpha p_2'^\beta \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma^\lambda] \\ &= -2p_1'^\mu p_1'^\nu p_2'^\alpha p_2'^\beta \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha (\gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma^\lambda)] \\ &= -8g_{\nu\beta} p_1'^\mu p_1'^\nu p_2'^\alpha p_2'^\beta \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha] \\ &= -32g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} p_1'^\mu p_1'^\nu p_2'^\alpha p_2'^\beta \\ &= -32(p_1' \cdot p_2')(p_1' \cdot p_2') \end{aligned}$$

他にも

$$p_1'^\mu p_1'^\nu p_2'^\alpha p_2'^\beta \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\lambda] \text{tr}[\gamma_\alpha \gamma^\rho \gamma_\beta \gamma^\lambda]$$

これは「電子-陽子散乱～スピン偏極～」と同じなので

$$\begin{aligned} & 4(p_1'_{1\mu} p_{1\nu} + p_1'_{1\nu} p_{1\mu} - p_1' \cdot p_1 g_{\mu\nu})(p_2'^\mu p_2'^\nu + p_2'^\nu p_2'^\mu - p_2' \cdot p_2 g^{\mu\nu}) \\ &= 16(2(p_1' \cdot p_2')(p_1 \cdot p_2) + 2(p_1' \cdot p_2)(p_1 \cdot p_2')) \\ &= 32((p_1' \cdot p_2')(p_1 \cdot p_2) + (p_1' \cdot p_2)(p_1 \cdot p_2')) \end{aligned}$$

というわけで

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{\alpha^2 (4\pi)^2}{4} \frac{32}{(2m)^4} \left(\frac{(p_1' \cdot p_2')(p_1 \cdot p_2) + (p_1' \cdot p_2)(p_1 \cdot p_2')}{(p_1 - p_1')^4} - \frac{(p_1' \cdot p_2')(p_1 \cdot p_2)}{(p_1 - p_1')^2 (p_1 - p_2')^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p_2' \cdot p_1')(p_1 \cdot p_2) + (p_2' \cdot p_2)(p_1 \cdot p_1')}{(p_1 - p_2')^4} - \frac{(p_2' \cdot p_1')(p_1 \cdot p_2)}{(p_1 - p_2')^2 (p_1 - p_1')^2} \right) \end{aligned}$$

となります。

電子同士の散乱でなく片方を陽電子とします。電子-陽電子散乱は Bhabha 散乱と呼ばれます。電子のスピンを u 、陽電子のスピンを v として、 S 行列は

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{V^2} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}} \sqrt{\frac{m^2}{E_1' E_2'}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2' + p_2 - p_1') \\ &\quad \times [\bar{u}(p_1', s_1') (-ie\gamma_\mu) u(p_1, s_1)] \frac{-i4\pi\kappa_e}{(p_1 - p_1')^2} [\bar{v}(p_2, s_2) (-ie\gamma^\mu) v(p_2', s_2')] \end{aligned}$$

電子-電子散乱での片方を陽電子に置き換えただけです。散乱の前後で、電子側は $(p_1 \rightarrow p_1')$ 、陽電子側は $(-p_2' \rightarrow -p_2)$ です。電子と陽電子の散乱は、正エネルギー電子と時間を逆行する負エネルギー電子の散乱として扱うので、陽電子のほうは時間が逆行し、散乱前と散乱後の状態がひっくり返っています。

電子-電子散乱と同様に、散乱後（入射してくる方でも）のものを入れ替えても区別できないというのがあります。そのときは、 p_1 の入射電子は散乱して $-p_2$ になって時間を逆行し、 $-p_2'$ の負エネルギーの入射電子は散乱して p_1' になって時間通りに進むこととなります。つまり、電子側は $(p_1 \rightarrow -p_2)$ 、陽電子側は $(-p_2' \rightarrow p_1')$ です。これは電子と陽電子が衝突し対消滅し、光子を放出して電子と陽電子のペアを生成していると言えます。この場合の S 行列は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{V^2} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}} \sqrt{\frac{m^2}{E_1' E_2'}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2' + p_2 - p_1') \\ &\quad \times [\bar{v}(p_2, s_2) (-ie\gamma_\mu) u(p_1, s_1)] \frac{-i4\pi\kappa_e}{(p_1 - p_1')^2} [\bar{u}(p_1', s_1') (-ie\gamma^\mu) v(p_2', s_2')] \end{aligned}$$

フェルミオンなので入れ替えると符号が反転します（電子と陽電子はフェルミオン）。

散乱を図にすれば、下の図のようになります。見てわかるように両方ともちゃんと、最初の粒子は p_1, p_2 で最後は p'_1, p'_2 になっています。また、時間の進行方向は両方とも下から上です。この2つを合わせた不変振幅 \mathcal{M}_{fi} は

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{\alpha^2(4\pi)^2}{4} \left(\frac{1}{(p_1 - p'_1)^4} \text{tr} \left[\frac{p'_1{}^\mu \gamma_\mu + m}{2m} \gamma_\rho \frac{p'_1{}^\nu \gamma_\nu + m}{2m} \gamma_\lambda \right] \text{tr} \left[\frac{-\bar{p}'_2{}^\alpha \gamma_\alpha + m}{2m} \gamma^\rho \frac{-\bar{p}'_2{}^\beta \gamma_\beta + m}{2m} \gamma^\lambda \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} \text{tr} \left[\frac{p'_1{}^\mu \gamma_\mu + m}{2m} \gamma_\rho \frac{p'_1{}^\nu \gamma_\nu + m}{2m} \gamma_\lambda \frac{-\bar{p}'_2{}^\alpha \gamma_\alpha + m}{2m} \gamma^\rho \frac{-\bar{p}'_2{}^\beta \gamma_\beta + m}{2m} \gamma^\lambda \right] \right. \\ \left. + (p'_1 \Leftrightarrow -p_2) \right)$$

計算自体は電子-電子散乱とほぼ同じです。違いは、負エネルギー部分 (陽電子部分) では $-p^\mu \gamma_\mu$ になるだけです。重要なことは電子-電子散乱との違いが

$$e^- + e^- \Rightarrow e^- + e^+ \\ p_1 \Rightarrow p_1 \\ p_1 \Rightarrow p'_1 \\ p_2 \Rightarrow -\bar{p}'_2 \\ p'_2 \Rightarrow -\bar{p}_2$$

このような関係になっている点です。陽電子では \bar{p} としています。 e^- は電子、 e^+ は陽電子とし、散乱を $e^- + e^+$ と書いています。このような置き換えは広範囲に成立しています。このため、この関係をそのまま微分断面の結果に入れれば、電子、陽電子の対応が取れます。

