コンプトン散乱〜スピン偏極〜

スピンの和を取ってトレースを計算していきます。

電子のスピンを考慮して、スピンの和を取ります。始状態は平均、終状態は和として

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2\omega'^2}{\omega^2}\frac{1}{2}\sum_{s_i,s_f}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2$$

スピン和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{s_i,s_f}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2\\
&\quad=\sum_{s_i,s_f}|\overline{u}_f(p_f,s_f)\big(\epsilon'_\mu\gamma^\mu\frac{(p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha+m}{2p_i\cdot k}\epsilon_\nu\gamma^\nu+\epsilon_\mu\gamma^\mu\frac{(p_i-k')^\alpha\gamma_\alpha+m}{-2p_i\cdot k'}\epsilon'_\nu\gamma^\nu\big)u_i(p_i,s_i)|^2
\end{aligned}$$

$\overline{u}_f$ と u_i でガンマ行列を挟んでいるので

$$\sum|\overline{u}'\Gamma u|^2$$

とします。これは

$$\begin{aligned}
\sum|\overline{u}'\Gamma u|^2&=\sum(\overline{u}'\Gamma u)(\overline{u}'\Gamma u)^\dagger\\
&=\sum(\overline{u}'\Gamma u)(u'^\dagger\gamma_0\Gamma u)^\dagger\\
&=\sum(\overline{u}'\Gamma u)(u^\dagger\Gamma^\dagger\gamma_0u')\\
&=\sum(\overline{u}'\Gamma u)(u^\dagger\gamma_0\gamma_0\Gamma^\dagger\gamma_0u')\\
&=\sum(\overline{u}'\Gamma u)(\overline{u}\overline{\Gamma}u')\qquad(\overline{\Gamma}=\gamma_0\Gamma^\dagger\gamma_0)\\
&=\sum\overline{u}'_a\Gamma_{ab}u_b\overline{u}_c\overline{\Gamma}_{cd}u'_d\\
&=\sum u'_d\overline{u}'_a\Gamma_{ab}u_b\overline{u}_c\overline{\Gamma}_{cd}\\
&=(\frac{p'_\mu\gamma^\mu+m}{2m})_{da}\Gamma_{ab}(\frac{p_\nu\gamma^\nu+m}{2m})_{bc}\overline{\Gamma}_{cd}\qquad(u'=u'(p'),u=u(p))\\
&=\mathrm{tr}[\frac{p'_\mu\gamma^\mu+m}{2m}\Gamma\frac{p_\nu\gamma^\nu+m}{2m}\overline{\Gamma}]
\end{aligned}$$

として、トレースになります。なので

$$\sum_{s_i,s_f}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2=\frac{1}{4m^2}\mathrm{tr}\big[(p_f^{\mu}\gamma_\mu+m)\Gamma(p_i^{\nu}\gamma_\nu+m)\overline{\Gamma}\big]=\frac{1}{4m^2}G$$

となり、このときの Γ は

$$\Gamma=\epsilon'_\mu\epsilon_\nu\gamma^\mu\frac{(p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha+m}{2p_i\cdot k}\gamma^\nu+\epsilon_\mu\epsilon'_\nu\gamma^\mu\frac{(p_i-k')^\alpha\gamma_\alpha+m}{-2p_i\cdot k'}\gamma^\nu$$

Γ の第 1 項の分子は

$$\begin{aligned}
J_1&=\epsilon'_\mu\epsilon_\nu\gamma^\mu((p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma^\nu\\
&=\epsilon'_\mu\epsilon^\nu\gamma^\mu(p_i^\alpha\gamma_\alpha\gamma_\nu+(k^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma_\nu)\\
&=\epsilon'_\mu\epsilon^\nu\gamma^\mu(p_i^\alpha(2g_{\alpha\nu}-\gamma_\nu\gamma_\alpha)+(k^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma_\nu)\qquad(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu})\\
&=\epsilon'_\mu\gamma^\mu(2p_i\cdot\epsilon-\epsilon^\nu p_i^\alpha\gamma_\nu\gamma_\alpha+(k^\alpha\gamma_\alpha+m)\epsilon^\nu\gamma_\nu)\\
&=2\epsilon'_\mu\gamma^\mu(p_i\cdot\epsilon)-\epsilon'_\mu\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu(p_i^\alpha\gamma_\alpha-m)+\epsilon'_\mu k_\alpha\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu
\end{aligned}$$

同様にすることで第 2 項の分子は (k の項の符号を反転させ、ϵ と ϵ' を入れ替える)

$$J_2=2\epsilon_\mu\gamma^\mu(p_i\cdot\epsilon')-\epsilon_\mu\epsilon'_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu(p_i^\alpha\gamma_\alpha-m)-\epsilon_\mu k'_\alpha\epsilon'_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu$$

これらと $p_i^\alpha\gamma_\alpha+m$ の積は、on shell 条件から

$$(p^\mu\gamma_\mu-m)(p^\nu\gamma_\nu+m)=p^2-m^2=0$$

によって

$$\begin{aligned}
J_1(p_i^\alpha\gamma_\alpha+m)&=(2\epsilon'_\mu\gamma^\mu(p_i\cdot\epsilon)-\epsilon'_\mu\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu(p_i^\alpha\gamma_\alpha-m)+\epsilon'_\mu k_\alpha\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu)(p_i^\alpha\gamma_\alpha+m)\\
&=(2\epsilon'_\mu\gamma^\mu(p_i\cdot\epsilon)+\epsilon'_\mu k_\alpha\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu)(p_i^\alpha\gamma_\alpha+m)\\
&=J'_1(p_i^\alpha\gamma_\alpha+m)
\end{aligned}$$

同様に J_2 では

$$J_2(p_i^\alpha\gamma_\alpha+m)=(2\epsilon_\mu\gamma^\mu(p_i\cdot\epsilon')-\epsilon_\mu k'_\alpha\epsilon'_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu)(p_i^\alpha\gamma_\alpha+m)=J'_2(p_i^\alpha\gamma_\alpha+m)$$

となるので

$$\Gamma(p_i^\nu\gamma_\nu+m)\overline{\Gamma}=(\frac{J'_1}{2p_i\cdot k}+\frac{J'_2}{-2p_i\cdot k'})(p_i^\nu\gamma_\nu+m)\overline{\Gamma}$$

$\overline{\Gamma}$ は、$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0$ から、「†」による転置によって $\epsilon'_\mu k_\alpha\epsilon_\nu$ の並びが逆になるだけです。なので

$$(p_i^\nu\gamma_\nu+m)\overline{\Gamma}=(p_i^\nu\gamma_\nu+m)(\frac{\overline{J}'_1}{2p_i\cdot k}+\frac{\overline{J}'_2}{-2p_i\cdot k'})$$

$\overline{J}'_1,\overline{J}'_2$ は $\epsilon'_\mu k_\alpha\epsilon_\nu$ の並びを逆にして

$$\overline{J}'_1=2\epsilon'_\mu\gamma^\mu(p_i\cdot\epsilon)+\epsilon_\mu k_\alpha\epsilon'_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu$$
$$\overline{J}'_2=2\epsilon_\mu\gamma^\mu(p_i\cdot\epsilon')-\epsilon'_\mu k'_\alpha\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu$$

となっています。

計算を簡単にするためにクーロンゲージを取ります。これによって偏極ベクトルは 3 次元成分 $\boldsymbol{\epsilon}$ のみになります ($\epsilon\cdot\epsilon=-\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=-1,\ \epsilon'\cdot\epsilon'=-\boldsymbol{\epsilon}'\cdot\boldsymbol{\epsilon}'=-1$)。そうすると、$p_i^\mu=(m,0,0,0)$ としているので、$p_i\cdot\epsilon=p_i\cdot\epsilon'=0$ となり

$$J'_1=\epsilon'_\mu k_\alpha\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\ ,\ J'_2=-\epsilon_\mu k'_\alpha\epsilon'_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu$$
$$\overline{J}'_1=\epsilon_\mu k_\alpha\epsilon'_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\ ,\ \overline{J}'_2=-\epsilon'_\mu k'_\alpha\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu$$

計算したいトレースは

$$\begin{aligned}G&=\mathrm{tr}[(p_f^\alpha\gamma_\alpha+m)\Gamma(p_i^\beta\gamma_\beta+m)\overline{\Gamma}]\\&=\frac{1}{4}\mathrm{tr}[(p_f^\alpha\gamma_\alpha+m)(\frac{J'_1}{p_i\cdot k}+\frac{-J'_2}{p_i\cdot k'})(p_i^\beta\gamma_\beta+m)(\frac{\overline{J}'_1}{p_i\cdot k}+\frac{-\overline{J}'_2}{p_i\cdot k'})]\\&=\frac{1}{4}\mathrm{tr}[\frac{(p_f^\alpha\gamma_\alpha+m)J'_1(p_i^\beta\gamma_\beta+m)\overline{J}'_1}{(p_i\cdot k)^2}+\frac{(p_f^\alpha\gamma_\alpha+m)J'_2(p_i^\beta\gamma_\beta+m)\overline{J}'_2}{(p_i\cdot k')^2}\\&\qquad-\frac{(p_f^\alpha\gamma_\alpha+m)J'_1(p_i^\beta\gamma_\beta+m)\overline{J}'_2}{(p_i\cdot k)(p_i\cdot k')}-\frac{(p_f^\alpha\gamma_\alpha+m)J'_2(p_i^\beta\gamma_\beta+m)\overline{J}'_1}{(p_i\cdot k)(p_i\cdot k')}]\end{aligned}$$

i,f が煩わしいので p_i^μ は p^μ、p_f^μ は q^μ とします。そして、ガンマ行列が多いのも煩わしいのでトレース内では $a^\mu\gamma_\mu$ は a と書いていきます。

第 3 項は、偶数個のガンマ行列では

$$\mathrm{tr}[\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\cdots\gamma^{\alpha_{2n}}]=\mathrm{tr}[\gamma^{\alpha_{2n}}\cdots\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\alpha_1}]$$

となることから

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(q+m)J_1'(p+m)\overline{J}_2'] &= -\mathrm{tr}[(q+m)\epsilon' k\epsilon(p+m)\epsilon' k'\epsilon]\\ &= -\mathrm{tr}[\epsilon k'\epsilon'(p+m)\epsilon k\epsilon'(q+m)]\\ &= -\mathrm{tr}[(q+m)\epsilon k'\epsilon'(p+m)\epsilon k\epsilon']\\ &= \mathrm{tr}[(q+m)J_2'(p+m)\overline{J}_1']\end{aligned}$$

なので

$$G=\frac{1}{4}\mathrm{tr}\Big[\frac{(q+m)J_1'(p+m)\overline{J}_1'}{(p\cdot k)^2}+\frac{(q+m)J_2'(p+m)\overline{J}_2'}{(p\cdot k')^2}-2\frac{(q+m)J_1'(p+m)\overline{J}_2'}{(p\cdot k)(p\cdot k')}\Big] \tag{1}$$

となります。

トレース計算で必要になるものを先に出しておきます。今は内積は

$$\begin{aligned}&k\cdot\epsilon=k'\cdot\epsilon'=p_i\cdot\epsilon=p\cdot\epsilon'=k\cdot k=k'\cdot k'=0\\ &\epsilon\cdot\epsilon=-1\ ,\ \epsilon'\cdot\epsilon'=-1\end{aligned} \tag{2}$$

という関係になっています。$k\cdot\epsilon=0,\ k'\cdot\epsilon'=0$ から

$$\begin{aligned}&k_\mu\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu=k_\mu\epsilon_\nu(2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu)=2k\cdot\epsilon-k_\mu\epsilon_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu=-\epsilon_\nu k_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\\ &k'_\mu\epsilon'_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu=-\epsilon'_\nu k'_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\end{aligned}$$

として、ガンマ行列を入れ替えられるのが分かります。p と ϵ、p と ϵ' も同様に入れ替えられるので、

$$k\epsilon=-\epsilon k\ ,\ k'\epsilon'=-\epsilon' k'\ ,\ p\epsilon=-\epsilon p\ ,\ p\epsilon'=-\epsilon' p \tag{3}$$

トレース内ではないですが使うときに分かりやすいので、$k_\mu\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu$ を $k\epsilon$ のように書いています。運動量の内積は運動量保存 $(q-k')^\mu=(p-k')^\mu$ の 2 乗から

$$\begin{aligned}q^2+k^2-2q\cdot k&=p^2+k'^2-2p\cdot k'\\ q\cdot k&=p\cdot k'\end{aligned} \tag{4}$$

また、ϵ' との内積から

$$\epsilon' \cdot (q-k) = \epsilon' \cdot (p-k')$$
$$\epsilon' \cdot q = \epsilon' \cdot k \tag{5}$$

これらを使っていきます。

(1) の第 1 項と第 2 項から求めていきます。第 1 項と第 2 項は、ガンマ行列が奇数個の項は消えることから

$$\mathrm{tr}[(q+m)J_1'(p+m)\overline{J}_1'] = A_1 + B_1$$
$$\mathrm{tr}[(q+m)J_2'(p+m)\overline{J}_2'] = A_2 + B_2$$

$A_{1,2}, B_{1,2}$ は

$$A_1 = \mathrm{tr}[qJ_1'p\overline{J}_1'] \ , \ A_2 = \mathrm{tr}[qJ_2'p\overline{J}_2']$$
$$B_1 = \mathrm{tr}[J_1'\overline{J}_1'] \ , \ B_2 = \mathrm{tr}[J_2'\overline{J}_2']$$

(3) を使って B_1, B_2 の並びを入れ替えると

$$B_1 = \mathrm{tr}[\epsilon' k\epsilon\epsilon k\epsilon'] = \mathrm{tr}[\epsilon' kk\epsilon\epsilon\epsilon']$$
$$B_2 = \mathrm{tr}[\epsilon k'\epsilon'\epsilon' k'\epsilon] = \mathrm{tr}[\epsilon k' k'\epsilon'\epsilon'\epsilon]$$

となり、$kk = k_\alpha\gamma^\alpha k_\beta\gamma^\beta = k^2$ $(k'^2 = 0)$ から 0 です。A_1 は $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ と (3) によって並びを変えて

$$\begin{aligned}
A_1 &= \mathrm{tr}[q\epsilon' k\epsilon p\epsilon k\epsilon'] \\
&= -\mathrm{tr}[q\epsilon' k\epsilon pk\epsilon\epsilon'] \\
&= -q_\alpha\epsilon'_{\mu_1}k_\rho\epsilon_{\mu_2}p_\beta k_\lambda\epsilon_{\mu_3}\epsilon'_{\mu_4}\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\gamma^{\mu_1}\gamma^\rho\gamma^{\mu_2}\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}] \\
&= -q_\alpha\epsilon'_{\mu_1}k_\rho\epsilon_{\mu_2}p_\beta k_\lambda\epsilon_{\mu_3}\epsilon'_{\mu_4}\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\gamma^{\mu_1}\gamma^\rho\gamma^{\mu_2}(2g^{\beta\lambda} - \gamma^\lambda\gamma^\beta)\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}] \\
&= -2(p\cdot k)q_\alpha\epsilon'_{\mu_1}k_\rho\epsilon_{\mu_2}\epsilon_{\mu_3}\epsilon'_{\mu_4}\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\gamma^{\mu_1}\gamma^\rho\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}] \\
&\quad + q_\alpha\epsilon'_{\mu_1}k_\rho\epsilon_{\mu_2}k_\lambda p_\beta\epsilon_{\mu_3}\epsilon'_{\mu_4}\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\gamma^{\mu_1}\gamma^\rho\gamma^{\mu_2}\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}] \\
&= -2(p\cdot k)\mathrm{tr}[q\epsilon' k\epsilon\epsilon\epsilon'] - \mathrm{tr}[q\epsilon' kk\epsilon p_i\epsilon\epsilon']
\end{aligned}$$

第 2 項は $kk = k^2 = 0$ から消え、第 1 項は $\epsilon\epsilon = \epsilon^2 = -1$ から

$$A_1 = 2(p\cdot k)\mathrm{tr}[q\epsilon' k\epsilon']$$

このトレースは

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta] = 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})$$

から

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2(p\cdot k)\big(4(q\cdot\epsilon')(k\cdot\epsilon') - 4(q\cdot k)(\epsilon'\cdot\epsilon') + 4(q\cdot\epsilon')(\epsilon'\cdot k)\big) \\
&= 8(p\cdot k)\big((q\cdot k) + (q\cdot\epsilon')(k\cdot\epsilon') + (q\cdot\epsilon')(\epsilon'\cdot k)\big) \\
&= 8(p\cdot k)((q\cdot k) + 2(q\cdot\epsilon')(\epsilon'\cdot k)) \\
&= 8(p\cdot k)((p\cdot k') + 2(\epsilon'\cdot k)^2)
\end{aligned}$$

最後に (4),(5) を使っています。A_2 は $k'_\mu \Leftrightarrow k_\mu,\ \epsilon_\mu \Leftrightarrow \epsilon'_\mu$ で対応が取れるので

$$A_2 = 8(p\cdot k')((p\cdot k) + 2(\epsilon\cdot k')^2)$$

となります。

(1) の第 3 項を求めます。$q^\mu = p^\mu + k^\mu - k'^\mu$ から

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[(q+m)J'_1(p+m)\overline{J}'_2] &= \mathrm{tr}[(p+k-k'+m)J'_1(p+m)\overline{J}'_2] \\
&= \mathrm{tr}[(p+m)J'_1(p+m)\overline{J}'_2 + (k-k')J'_1(p+m)\overline{J}'_2] \\
&= \mathrm{tr}[(p+m)J'_1(p+m)\overline{J}'_2] + \mathrm{tr}[(k-k')J'_1 p\overline{J}'_2] \\
&= C_1 + C_2
\end{aligned}$$

並びを入れ替えていくと

$$\begin{aligned}
C_1 = \mathrm{tr}[(p+m)J'_1(p+m)\overline{J}'_2] &= -\mathrm{tr}[(p+m)\epsilon' k\epsilon(p+m)\epsilon' k'\epsilon] \\
&= -\mathrm{tr}[(p+m)\epsilon'\epsilon k(p+m)k'\epsilon'\epsilon] \\
&= -\mathrm{tr}[\epsilon'\epsilon(p+m)k(p+m)k'\epsilon'\epsilon]
\end{aligned}$$

トレース内は

$$\begin{aligned}
\epsilon'\epsilon(p+m)k = \epsilon'\epsilon(p_\mu\gamma^\mu + m)k_\nu\gamma^\nu &= \epsilon'\epsilon(p_\mu k_\nu(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) + m) \\
&= \epsilon'\epsilon(2p\cdot k - kp + m) \\
&= 2(p\cdot k)\epsilon'\epsilon - \epsilon'\epsilon k(p-m)
\end{aligned}$$

これに $(p-m)(p+m)=p^2-m^2$ と on shell 条件 $p^2=m^2$ を使えば

$$C_1=-2(p\cdot k)\mathrm{tr}[\epsilon'\epsilon(p+m)k'\epsilon'\epsilon]=-2(p\cdot k)\mathrm{tr}[\epsilon'\epsilon pk'\epsilon'\epsilon]$$

並びを変えていくと

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\epsilon'\epsilon pk'\epsilon'\epsilon]&=\mathrm{tr}[\epsilon'_\mu\epsilon_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu pk'\epsilon'\epsilon]\\&=\mathrm{tr}[\epsilon'_\mu\epsilon_\nu(2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu)pk'\epsilon'\epsilon]\\&=2(\epsilon'\cdot\epsilon)\mathrm{tr}[pk'\epsilon'\epsilon]-\mathrm{tr}[\epsilon\epsilon' pk'\epsilon'\epsilon]\\&=2(\epsilon'\cdot\epsilon)\mathrm{tr}[pk'\epsilon'\epsilon]-\mathrm{tr}[pk']\\&=8(\epsilon'\cdot\epsilon)((p\cdot k')(\epsilon'\cdot\epsilon)-(p\cdot\epsilon')(k'\cdot\epsilon)+(p\cdot\epsilon)(k'\cdot\epsilon'))-4p\cdot k'\\&=8(\epsilon'\cdot\epsilon)(p\cdot k')(\epsilon'\cdot\epsilon)-4p\cdot k'\end{aligned}$$

なので

$$C_1=-2(p\cdot k)(8(p\cdot k')(\epsilon\cdot\epsilon')^2-4p\cdot k')$$

C_2 は

$$\begin{aligned}C_2=-\mathrm{tr}[(k-k')\epsilon' k\epsilon p\epsilon' k'\epsilon]=&-\mathrm{tr}[(k-k')\epsilon'\epsilon kpk'\epsilon'\epsilon]\\=&-2(k-k')\cdot\epsilon'\mathrm{tr}[\epsilon kpk'\epsilon'\epsilon]+\mathrm{tr}[\epsilon'(k-k')\epsilon kpk'\epsilon'\epsilon]\\=&\,2(k\cdot\epsilon')\mathrm{tr}[kpk'\epsilon']+\mathrm{tr}[\epsilon'(k\epsilon-k'\epsilon)kpk'\epsilon'\epsilon]\end{aligned}$$

第 2 項は

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\epsilon'(-\epsilon k-k'\epsilon)kpk'\epsilon'\epsilon]=-\mathrm{tr}[\epsilon' k'\epsilon kpk'\epsilon'\epsilon]=&-\mathrm{tr}[k'\epsilon'\epsilon kp\epsilon' k'\epsilon]\\=&-2(k'\cdot\epsilon)\mathrm{tr}[k'\epsilon'\epsilon kp\epsilon']+\mathrm{tr}[k'\epsilon'\epsilon kp\epsilon'\epsilon k']\\=&\,2(k'\cdot\epsilon)\mathrm{tr}[\epsilon' k'\epsilon kp\epsilon']\\=&-2(k'\cdot\epsilon)\mathrm{tr}[k'\epsilon kp]\end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
C_2 &= 2(k\cdot\epsilon')\mathrm{tr}[kpk'\epsilon'] - 2(k'\cdot\epsilon)\mathrm{tr}[k'\epsilon kp] \\
&= 8(k\cdot\epsilon')((k\cdot p)(k'\cdot\epsilon') - (k\cdot k')(p\cdot\epsilon') + (k\cdot\epsilon')(p\cdot k')) \\
&\quad - 8k'\cdot\epsilon((k'\cdot\epsilon)(k\cdot p) - (k'\cdot k)(\epsilon\cdot p) + (k'\cdot p)(\epsilon\cdot k)) \\
&= 8(k\cdot\epsilon')(k\cdot\epsilon')(p\cdot k') - 8(k'\cdot\epsilon)(k'\cdot\epsilon)(k\cdot p) \\
&= 8(k\cdot\epsilon')^2(p\cdot k') - 8(k'\cdot\epsilon)^2(k\cdot p)
\end{aligned}
$$

というわけで

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 =& -2(k\cdot p)(8(\epsilon\cdot\epsilon')^2(p\cdot k') - 4(p\cdot k')) + 8(k\cdot\epsilon')^2(p\cdot k') - 8(k'\cdot\epsilon)^2(k\cdot p) \\
=& -8(k\cdot p)(p\cdot k')(2(\epsilon\cdot\epsilon')^2 - 1) + 8(k\cdot\epsilon')^2(p\cdot k') - 8(k'\cdot\epsilon)^2(k\cdot p)
\end{aligned}
$$

よって、G は

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{1}{4}(\frac{A_1}{(p\cdot k)^2} + \frac{A_2}{(p\cdot k')^2} - 2\frac{C_1+C_2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}) \\
&= 2(\frac{(p\cdot k)((p\cdot k') + 2(\epsilon'\cdot k)^2)}{(p\cdot k)^2} + \frac{(p\cdot k')((p\cdot k) + 2(\epsilon\cdot k')^2)}{(p\cdot k')^2} \\
&\quad + 2\frac{(k\cdot p)(p\cdot k')(2(\epsilon\cdot\epsilon')^2 - 1) - (k\cdot\epsilon')^2(p\cdot k') + (k'\cdot\epsilon)^2(k\cdot p)}{(p\cdot k)(p\cdot k')})
\end{aligned}
$$

となります。

これでトレース計算は終わったので、微分断面積の式にいれて

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2\omega'^2}{2\omega^2}\frac{1}{4m^2}G \\
&= \frac{\alpha^2\omega'^2}{2\omega^2}\frac{1}{2m^2}\Big(\frac{(p_i\cdot k)((p_i\cdot k')+2(\epsilon'\cdot k)^2)}{(p_i\cdot k)^2}+\frac{(p_i\cdot k')((p_i\cdot k)-2(\epsilon\cdot k')^2)}{(p_i\cdot k')^2} \\
&\qquad\qquad +2\frac{(p_i\cdot k)(p_i\cdot k')(2(\epsilon\cdot\epsilon')^2-1)-(k\cdot\epsilon')^2(p_i\cdot k')+(k'\cdot\epsilon)^2(k\cdot p_i)}{(p_i\cdot k)(p_i\cdot k')}\Big) \\
&= \frac{\alpha^2\omega'^2}{2\omega^2}\frac{1}{2m^2}\Big(\frac{((p_i\cdot k')+2(\epsilon'\cdot k)^2)}{(p_i\cdot k)}+\frac{((p_i\cdot k)-2(\epsilon\cdot k')^2)}{(p_i\cdot k')} \\
&\qquad\qquad +2(2(\epsilon\cdot\epsilon')^2-1)-\frac{2(k\cdot\epsilon')^2}{p_i\cdot k}+\frac{2(k'\cdot\epsilon)^2}{p_i\cdot k'}\Big) \\
&= \frac{\alpha^2\omega'^2}{2\omega^2}\frac{1}{2m^2}\Big(\frac{p_i\cdot k'}{p_i\cdot k}+\frac{2(\epsilon'\cdot k)^2}{(p_i\cdot k)}+\frac{p_i\cdot k}{p_i\cdot k'}-\frac{2(\epsilon\cdot k')^2}{p_i\cdot k'} \\
&\qquad\qquad +2(2(\epsilon\cdot\epsilon')^2-1)-\frac{2(k\cdot\epsilon')^2}{p_i\cdot k}+\frac{2(k'\cdot\epsilon)^2}{p_i\cdot k'}\Big) \\
&= \frac{\alpha^2\omega'^2}{2\omega^2}\frac{1}{2m^2}\Big(\frac{p_i\cdot k'}{p_i\cdot k}+\frac{p_i\cdot k}{p_i\cdot k'}+2(2(\epsilon\cdot\epsilon')^2-1)\Big) \\
&= \frac{\alpha^2\omega'^2}{2\omega^2}\frac{1}{2m^2}\Big(\frac{p_i\cdot k'}{p_i\cdot k}+\frac{p_i\cdot k}{p_i\cdot k'}+4(\epsilon\cdot\epsilon')^2-2\Big)
\end{aligned}$$

p を p_i に戻しています。そして、実験室系なので

$$p_i\cdot k' = m\omega'\ ,\ p_i\cdot k = m\omega$$

と置き換えて

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2\omega'^2}{4m^2\omega^2}\Big(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}+4(\epsilon\cdot\epsilon')^2-2\Big)$$

これをクライン・仁科 (Klein-Nishina) の公式と呼びます。この公式は実験との合致率がかなり高いものです。

ω' と ω は

$$\omega' = \frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)}$$

という関係を持っているので、$\omega\to 0$ で $\omega=\omega'$ になります。これは入射エネルギーが小さく、入射と散乱後で同じになることです。このときの微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{2m^2}(1+1+4(\epsilon\cdot\epsilon')^2-2) = \alpha^2\frac{1}{m^2}(\epsilon\cdot\epsilon')^2$$

これをトムソン (Thomson) の散乱公式と呼びます。これは古典論から導くこともでき、量子論的な影響を含んでいません。係数の部分を $\hbar$ と c を戻して、CGS ガウス単位系とすれば

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{\hbar}{mc} = \frac{e^2}{mc^2} = r_0 \simeq 2.8 \times 10^{-13}(\text{cm})$$

これは古典電子半径 (classical radius of the electron) です。自然単位系から CGS 単位系にするために $m^{-1} = \hbar/mc$ としています。これは質量 m の粒子でのコンプトン波長 (質量 m の粒子がもっている波としての広がり) を表します。

電子のスピン和は終わりましたが、光子の振動方向は電子のスピンと同じように光子の自由度なので、偏極ベクトルの和も同様に取る必要があります。クーロンゲージを取っているので、$\epsilon_\mu(\lambda)$ は $\boldsymbol{\epsilon}(\lambda)$ $(\lambda = 1, 2)$ の 2 方向なので

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2\omega'^2}{4\omega^2 m^2}\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'=1}^{2}(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\boldsymbol{\epsilon}(\lambda)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(\lambda'))^2 - 2)$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ の空間における関係は（$\lambda = 1$ を $\boldsymbol{\epsilon}(1)$、$\lambda = 2$ を $\boldsymbol{\epsilon}(2)$）

- $\boldsymbol{\epsilon}$ と $\boldsymbol{k}$ は内積が 0 なので直交
- $\boldsymbol{\epsilon}(1)$ と $\boldsymbol{\epsilon}'(1)$ の作る角度は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}'$ の作る角度に等しいので θ になる
- $\boldsymbol{\epsilon}(2)$ は $\boldsymbol{\epsilon}(1), \boldsymbol{k}$ と直交するために、$\boldsymbol{\epsilon}(1)$ と $\boldsymbol{k}$ のつくる平面に対して垂直 ($\boldsymbol{\epsilon}', \boldsymbol{k}'$ でも同様)

２番目のは $\boldsymbol{\epsilon}(1), \boldsymbol{\epsilon}'(1)$ はそれぞれが $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ に対して振動する方向なので、$\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}'$ と同じ方向に向ければ $\boldsymbol{\epsilon}(1)$ と $\boldsymbol{\epsilon}'(1)$ も同じ方向になるからです。さらに、$\boldsymbol{\epsilon}(1), \boldsymbol{\epsilon}'(1), \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ は同じ平面上にいるとします。そうすると、3 番目の直交性から、$\boldsymbol{\epsilon}(2), \boldsymbol{\epsilon}'(2)$ はこの平面に対して垂直です。このため、$\epsilon_\mu(2)$ と $\boldsymbol{\epsilon}'(2)$ は同じ方向を向く必要があるので、$\boldsymbol{\epsilon}(2)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(2) = 1$ です。

よって、$\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}'$ の関係は

$$\boldsymbol{\epsilon}(1)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(1) = \cos\theta$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(2)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(2) = 1$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(1)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(2) = \boldsymbol{\epsilon}(2)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(1) = 0$$

となるので、和は

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda,\lambda'=1}^{2}(\boldsymbol{\epsilon}(\lambda)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(\lambda'))^2 &= (\boldsymbol{\epsilon}(1)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(1))^2 + (\boldsymbol{\epsilon}(2)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(2))^2 + (\boldsymbol{\epsilon}(1)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(2))^2 + (\boldsymbol{\epsilon}(2)\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(1))^2 \\ &= \cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

よって、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2\omega'^2}{4\omega^2m^2}\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'}^{2}(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}+4(\epsilon\cdot\epsilon')^2-2)$$
$$= \frac{\alpha^2\omega'^2}{4\omega^2m^2}\frac{1}{2}4(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}+(\cos^2\theta+1)-2)$$
$$= \frac{\alpha^2\omega'^2}{2\omega^2m^2}(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta)$$

$\omega\to 0$ をとれば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}(1+\cos^2\theta)$$

となります。

最後に、角度積分を実行した場合を大雑把に求めておきます。角度積分は

$$\sigma = \frac{\alpha^2\omega'^2}{2\omega^2m^2}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\frac{\omega'^2}{\omega^2}(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta)$$

ω' を ω にして

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2m^2}\int d\theta d\phi\frac{\sin\theta}{(1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta))^2}\Big(\frac{1}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)}+(1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta))-\sin^2\theta\Big)$$
$$= \frac{\alpha^2\pi}{m^2}\int_{-1}^{1}dz\frac{1}{(1+\frac{\omega}{m}(1-z))^2}\Big(\frac{1}{1+\frac{\omega}{m}(1-z)}+(1+\frac{\omega}{m}(1-z))-(1-z^2)\Big)\quad (z=\cos\theta)$$
$$= \frac{\alpha^2\pi}{m^2}\int_{-1}^{1}dz\Big(\frac{1}{(1+\frac{\omega}{m}(1-z))^3}+\frac{1}{1+\frac{\omega}{m}(1-z)}-\frac{(1-z^2)}{(1+\frac{\omega}{m}(1-z))^2}\Big)$$
$$= \frac{\alpha^2\pi}{m^2}\int_0^2 dx\Big(\frac{1}{(1+\frac{\omega}{m}x)^3}+\frac{1}{1+\frac{\omega}{m}x}+\frac{x^2-2x}{(1+\frac{\omega}{m}x)^2}\Big)\quad (1-z=x)$$
$$= \frac{2\pi\alpha^2}{m^2}\Big(\frac{1+\gamma}{\gamma^3}(\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma}-\log(1+2\gamma))+\frac{1}{2\gamma}\log(1+2\gamma)-\frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2}\Big)\quad (\gamma=\frac{\omega}{m})$$

使っている積分を公式として載せておくと

$$\int\frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a}\log[1+ax]$$
$$\int\frac{dx}{(1+ax)^3} = \frac{1}{2a(1+ax)^2}$$
$$\int dx\frac{x}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2}(\log[1+ax]+\frac{1}{1+ax})$$
$$\int dx\frac{x^2}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^3}(1+ax-2\log[1+ax]-\frac{1}{1+ax})$$