コンプトン散乱

電子と光子の散乱であるコンプトン散乱を見ていきます。

最初に雑に電磁場の話をしておきます（場の量子論の「マクスウェル方程式」参照）。真空中の 4 元ベクトルポテンシャル A_μ はマクスウェル方程式

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial^\nu A_\nu) = 0$$

に従います。クーロンゲージ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を取ると、マクスウェル方程式の 0 成分と 3 次元成分は

$$\begin{aligned}&\Box A^0 - \partial^0(\partial^0 A_0) = (\partial_0^2 - \nabla^2)A^0 - \partial_0^2 A_0 = -\nabla^2 A^0 = 0\\&\Box A^i - \partial^i(\partial^0 A_0) = 0\end{aligned}$$

$\nabla^2 A^0 = 0$ はポアソン方程式 $\nabla^2 A^0 = 4\pi\kappa_b\kappa_m\rho$ での $\rho=0$ の解とすれば、$A^0=0$ です。よって、クーロンゲージではマクスウェル方程式は

$$\Box\boldsymbol{A} = 0$$

これは波動方程式なので、平面波と係数 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$ によって

$$\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})(e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}) \quad (k_0=\omega)$$

と書けます。複素共役の項がいるのは $\boldsymbol{A}$ は実数なので

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{a}(e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A}$$

とするためです（$\boldsymbol{a}$ は実数）。これを $\Box\boldsymbol{A}=0$ に入れれば、アインシュタインの関係 $\omega^2=\boldsymbol{k}^2$ $(k_0^2-\boldsymbol{k}^2=0)$ が求まります。

クーロンゲージから、$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}=0$ が要求されています。$\boldsymbol{k}$ は波の進行方向なので、$\boldsymbol{a}$ は進行方向に対して垂直です。垂直方向は 2 つ選べるので、$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)$ $(\lambda=1,2)$ とし、$\boldsymbol{\epsilon}^2=1$ に規格化します $(\boldsymbol{\epsilon}(1)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(2)=0)$。電磁気の話から分かるように、$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)$ は電磁場の振動方向を表し、横波の自由度に対応し、偏極ベクトルと呼ばれます。偏極ベクトルによって $\boldsymbol{A}(x)$ は

$$\boldsymbol{A}(x) = C\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)(e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}})$$

と書けます。

規格化定数 C を決めます。電磁場のエネルギー密度 u は平面波において

$$
\begin{aligned}
u = \frac{1}{4\pi\kappa_e}\boldsymbol{E}^2 = \frac{1}{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}\boldsymbol{B}^2 &= \frac{1}{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2 \\
&= \frac{C^2}{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}(\nabla\times\boldsymbol{\epsilon}(e^{-i\omega t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+e^{i\omega t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}))^2 \\
&= \frac{C^2}{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}(i(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon})(e^{-i\omega t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}-e^{i\omega t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}))^2 \\
&= \frac{4C^2}{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon})^2\sin^2(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{4C^2\omega^2}{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}\sin^2(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

ベクトル積はレヴィ・チビタ記号 ϵ_{ijk} を使い、$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=0,\ \boldsymbol{\epsilon}^2=0$ から

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon})^2 = \epsilon_{ijk}\epsilon_{abk}k_i\epsilon_j k_a\epsilon_b &= (\delta_{ia}\delta_{jb}-\delta_{ib}\delta_{ja})k_i\epsilon_j k_a\epsilon_b \\
&= k_a\epsilon_b k_a\epsilon_b - k_b\epsilon_a k_a\epsilon_b \\
&= \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{\epsilon}^2 - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}) \\
&= \boldsymbol{k}^2 = \omega^2
\end{aligned}
$$

光子のエネルギーが ω なので、このエネルギーの体積 V における 1 周期での時間平均が ω になるとして規格化します。時間平均は、T を周期として

$$
\begin{aligned}
<\sin^2(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})> &= \frac{1}{T}\int_0^T dt\sin^2(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{1}{\omega T}(\frac{1}{2}\omega T-\frac{1}{4}\sin(2\omega T+2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})+\frac{1}{4}\sin(2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}))\quad (T=\frac{2\pi}{\omega}) \\
&= \frac{1}{\omega T}(\frac{1}{2}\omega T-\frac{1}{4}\sin(2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})+\frac{1}{4}\sin(2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}))\quad (\sin(\theta+4\pi)=\sin\theta) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

体積積分を取って

$$
\frac{4C^2\omega^2}{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}\int_V d^3x <\sin^2(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})> = \frac{2\omega^2 V}{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}C^2
$$

これが ω になればいいので

$$
C^2 = \frac{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}{2V\omega}
$$

と求まります。

クーロンゲージとしましたが、ローレンツ不変な形式で計算したいのでゲージ条件を与えない段階を使っていきます。そのために、偏極ベクトルを ϵ^μ とします。ゲージ条件がないと横波に制限されてなく、自由度は 4 のままです。なので、縦波 (進行方向に振動する波) と時間方向に振動する波の自由度があります。このため、$\epsilon^\mu(\lambda)$ での λ は $\lambda=0,1,2,3$ とし、0 は時間方向、$1,2$ は横波、3 は縦波を表すとします。この偏極ベクトルによって A_μ を

$$A_\mu(x,k)=\sqrt{\frac{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}{2V\omega}}\epsilon_\mu(k,\lambda)(e^{-ikx}+e^{ikx}) \tag{1}$$

規格化定数は同じものを使っています。

電磁場の話は終わりにして、真空中の電磁場と電子の散乱を考えます。これは、光子と電子の散乱です。なので、電子と同じように、始状態での光子は (1)、終状態では

$$A_\mu(x',k')=\sqrt{\frac{4\pi\kappa_b^2\kappa_m}{2\omega' V}}\epsilon_\mu(k',\lambda')(e^{-ik'x'}+e^{ik'x'}) \tag{2}$$

散乱はコンプトン散乱とします。コンプトン散乱は電子に光子が当り、そこから光子が飛び出てくる散乱で、散乱が 2 回起きます (下の図)。つまり、入射電子に光子が当たることで散乱された電子がまず現われ (1 回目の散乱)、その後に散乱された電子から光子が出て行く (2 回目の散乱) という散乱です。簡単に言えば、。電子に光子が吸収され、その後に電子を放出するというものです。このため、S 行列の摂動展開では、2 次のオーダが最低次になります (4 元ベクトルポテンシャルによる散乱が 2 回起きているため)。

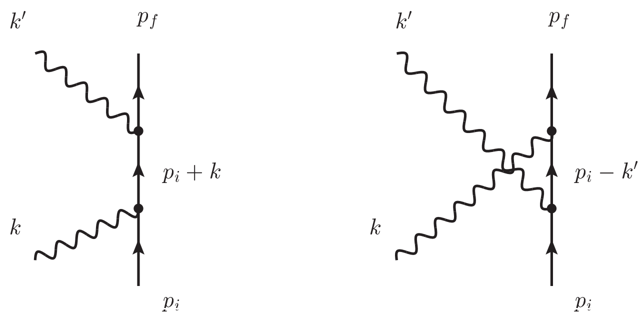
S 行列は 2 次のオーダでの

$$-ie^2\int d^4xd^4y\overline{\psi}_f(x)\gamma^\mu\kappa_b^{-1}A_\mu(x,k')S_F(x-y)\gamma^\nu\kappa_b^{-1}A_\nu(y,k)\psi_i(y)$$

ψ_i,ψ_f は始状態、終状態の電子の平面波です。「電子-陽子散乱」では電磁場を陽子から作りましたが、ここでは電磁場としての光子が飛んでいるので真空中の電磁場です。入射電子 $\psi_i(y)$ が $A(y,k)$ で光子 (電磁場) と散乱し、散乱後の情報を伝播関数 $S_F(x-y)$ が運び、その後 $A(x,k')$ の光子と散乱し終状態 $\psi_f(x)$ となります。

コンプトン散乱にも区別できない過程があり、それは光子が先に放出されてから吸収されるというもので、下の図の右側です。なので、これを足すことで S 行列は

$$\begin{aligned}S=&-ie^2(S^{(1)}+S^{(2)})\\=&-ie^2\int d^4xd^4y\overline{\psi}_f(x)\big(\gamma^\mu A_\mu(x,k')S_F(x-y)\gamma^\nu A_\nu(y,k)\psi_i(y)+\gamma^\mu A_\mu(x,k)S_F(x-y)\gamma^\nu A_\nu(y,k')\big)\psi_i(y)\end{aligned}$$



κ_b は A_μ の中に入れています。第 1 項 $S^{(1)}$ では電子に光子が当たって吸収し、その後光子を放出するので $p_i+k-k' = p_f$、第 2 項 $S^{(2)}$ では電子が光子を放出し、その後に光子を吸収するので $p_i - k' + k = p_f$ です。これから分かるように、k と k' が入れ替わっているだけです。

第 1 項 $S^{(1)}$(図の左側) を計算します。電子の波動関数は

$$\psi_i(y) = \sqrt{\frac{m}{E_iV}}u_i(p_i, s_i)e^{-ip_iy}\ ,\ \psi_f(y) = \sqrt{\frac{m}{E_fV}}u_f(p_f, s_f)e^{-ip_fx}$$

とし、伝播関数 $S_F(x-y)$ は「伝播関数」で求めた

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-y)}}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon}$$

を使い

$$\begin{aligned}
S^{(1)} &= \int d^4xd^4y\overline{\psi}_f(x)\gamma^\mu A_\mu(x, k')S_F(x-y)\gamma^\nu A_\nu(y, k)\psi_i(y) \\
&= \frac{4\pi\kappa_m}{V^2}\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\sqrt{\frac{1}{2\omega'}}\sqrt{\frac{m^2}{E_iE_f}}\int d^4xd^4y\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
&\qquad\qquad \times \overline{u}_f(p_f, s_f)e^{ip_fx}\gamma^\mu\epsilon'_\mu(e^{-ik'x} + e^{ik'x})\frac{e^{-ip(x-y)}}{p_\alpha\gamma^\alpha - m}\gamma^\nu\epsilon_\nu(e^{-iky} + e^{iky})u_i(p_i, s_i)e^{-ip_iy}
\end{aligned}$$

ここでは $i\epsilon$ は無視して問題ないので省いていきます。x, y 積分は

$$\begin{aligned}
&\int d^4xd^4y\ e^{ip_fx}(e^{-ik'x} + e^{ik'x})e^{-ip(x-y)}(e^{-iky} + e^{iky})e^{-ip_iy} \\
&\quad = \int d^4xd^4y\ e^{ip_fx}(e^{-ik'x} + e^{ik'x})e^{-ipx}e^{ipy}(e^{-iky} + e^{iky})e^{-ip_iy} \\
&\quad = \int d^4xd^4y\ (e^{i(p_f-k'-p)x} + e^{i(p_f+k'-p)x})(e^{i(p-k-p_i)y} + e^{i(p+k-p_i)y}) \\
&\quad = (2\pi)^4(\delta^4(p_f - k' - p) + \delta^4(p_f + k' - p))(2\pi)^4(\delta^4(p - k - p_i) + \delta^4(p + k - p_i))
\end{aligned}$$

なので

$$S^{(1)}=\frac{(2\pi)^8 4\pi\kappa_m}{V^2}\sqrt{\frac{1}{4\omega\omega'}}\sqrt{\frac{m^2}{E_iE_f}}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\overline{u}_f(p_f,s_f)\epsilon'_\mu\gamma^\mu\frac{1}{p_\alpha\gamma^\alpha-m}\epsilon_\nu\gamma^\nu u_i(p_i,s_i)$$

$$\times\left(\delta^4(p_f-k'-p)+\delta^4(p_f+k'-p)\right)\left(\delta^4(p-k-p_i)+\delta^4(p+k-p_i)\right)$$

$$=\frac{(2\pi)^4 4\pi\kappa_m}{V^2}\sqrt{\frac{1}{4\omega\omega'}}\sqrt{\frac{m^2}{E_iE_f}}\int d^4p\overline{u}_f(p_f,s_f)\epsilon'_\mu\gamma^\mu\frac{1}{p_\alpha\gamma^\alpha-m}\epsilon_\nu\gamma^\nu u_i(p_i,s_i)$$

$$\times\big(\delta^4(p_f-k'-p)\delta^4(p-k-p_i)+\delta^4(p_f-k'-p)\delta^4(p+k-p_i)$$

$$+\delta^4(p_f+k'-p)\delta^4(p-k-p_i)+\delta^4(p_f+k'-p)\delta^4(p+k-p_i)\big)$$

p 積分から、括弧内のデルタ関数による運動量保存 (エネルギー・運動量の保存を単に運動量保存と言っていきます) は

$$(p_i+k)^\mu=(p_f-k')^\mu\quad(p^\mu=(p_i+k)^\mu)$$

$$(p_i-k)^\mu=(p_f-k')^\mu\quad(p^\mu=(p_i-k)^\mu)$$

$$(p_i+k)^\mu=(p_f+k')^\mu\quad(p^\mu=(p_i+k)^\mu)$$

$$(p_i-k)^\mu=(p_f+k')^\mu\quad(p^\mu=(p_i-k)^\mu)$$

このように 4 つ出てきます。コンプトン散乱では光子の吸収と放出しか行わないことを考えれば、これらの内 $(p_i{+}k)^\mu=(p_f{+}k')^\mu$ が $S^{(1)}$ の過程の運動量保存に対応しています。なので、この項だけを使います $(p^\mu=(p_i{+}k)^\mu)$。

$S^{(2)}$ では $S^{(1)}$ での k と k' が入れ替わります。そして、過程としての運動量保存は $(p_i-k')^\mu=(p_f-k)^\mu$ です。よって、保存を表すデルタ関数は $S^{(1)}$ での第 2 項の k と k' を入れ替えた

$$\delta^4(p_f-k-p)\delta^4(p+k'-p_i)\quad(p^\mu=(p_i-k')^\mu)$$

となります。このため、$S=S^{(1)}+S^{(2)}$ の運動量保存は $\delta^4(p_i+k-p_f-k')$ になり、S 行列は

$$S=-\frac{i4\pi\kappa_m e^2}{V^2}\sqrt{\frac{1}{4\omega\omega'}}\sqrt{\frac{m^2}{E_iE_f}}(2\pi)^4\delta^4(p_i+k-p_f-k')$$

$$\times\overline{u}_f(p_f,s_f)\big(\epsilon'_\mu\gamma^\mu\frac{1}{(p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha-m}\epsilon_\nu\gamma^\nu+\epsilon_\nu\gamma^\nu\frac{1}{(p_i-k')^\alpha\gamma_\alpha-m}\epsilon'_\mu\gamma^\mu\big)u_i(p_i,s_i)$$

ガンマ行列がいるので並びに注意してください。

「電子-電子、電子-陽電子散乱」では、フェルミオンの性質からフェルミオンの入れ替えによる区別できない過程は符号が反転しましたが、光子はボソンなので粒子の入れ替えで符号が変わらず、$S^{(1)}$ と $S^{(2)}$ で符号が同じになります。このため、電子と違い、$k,\epsilon\Leftrightarrow -k',\epsilon'$ の置き換えで符号は変化しません。これは入射が k、散乱が k' と、入射が k'、散乱が k としても区別できない散乱に対して成り立ちます。

S 行列から不変振幅 $M_{\mu\nu}$ を取り出して

$$S = \frac{-i4\pi\alpha}{V^2}\sqrt{\frac{1}{4\omega\omega'}}\sqrt{\frac{m^2}{E_iE_f}}(2\pi)^4\epsilon'^{\mu}(\boldsymbol{k}',\lambda')\epsilon^{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)\delta^4(p_f+k'-p_i-k)M_{\mu\nu}$$

$$M_{\mu\nu} = \overline{u}_f(p_f,s_f)\big(\gamma_\mu\frac{1}{(p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha - m}\gamma_\nu + \gamma_\nu\frac{1}{(p_i-k')^\alpha\gamma_\alpha - m}\gamma_\mu\big)u_i(p_i,s_i)$$

$\alpha = \kappa_e e^2$ です。$M_{\mu\nu}$ はガンマ行列が分子にくるように変形して

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu} &= \overline{u}_f(p_f,s_f)\Big(\gamma_\mu\frac{(p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha + m}{((p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha - m)((p_i+k)^\beta\gamma_\beta + m)}\gamma_\nu + \gamma_\nu\frac{(p_i-k')^\alpha\gamma_\alpha + m}{((p_i-k')^\alpha\gamma_\alpha - m)((p_i-k')^\beta\gamma_\beta + m)}\gamma_\mu\Big)u_i(p_i,s_i) \\
&= \overline{u}_f(p_f,s_f)\Big(\gamma_\mu\frac{(p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha + m}{(p_i+k)^2 - m^2}\gamma_\nu + \gamma_\nu\frac{(p_i-k')^\alpha\gamma_\alpha + m}{(p_i-k')^2 - m^2}\gamma_\mu\Big)u_i(p_i,s_i) \\
&= \overline{u}_f(p_f,s_f)\Big(\gamma_\mu\frac{(p_i+k)^\alpha\gamma_\alpha + m}{2p_i\cdot k}\gamma_\nu + \gamma_\nu\frac{(p_i-k')^\alpha\gamma_\alpha + m}{-2p_i\cdot k'}\gamma_\mu)\Big)u_i(p_i,s_i)
\end{aligned}$$

最後に平面波では $p_0^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ から $p_i^2 = p_f^2 = m^2$ と、アインシュタインの関係 $k^2 = 0$ を使っています。$p^2 = m^2$ を on shell や on mass shell と言い、日本語だと質量殻条件や質量殻上にいると言われます。

ここからは断面積を求めていきます。断面積は

$$\sigma = \frac{|S|^2N}{T|J_{in}|} = \frac{|S|^2N}{T|\boldsymbol{v}|/V} = \int\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{|S|^2V^3}{T|\boldsymbol{v}|}$$

T は時間、$\boldsymbol{v}$ は相対速度です。デルタ関数は、

$$((2\pi)^4\delta(P))^2 \ \Rightarrow\ TV(2\pi)^4\delta(P)$$

なので

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{(4\pi)^2\alpha^2m^2}{4V^4}\int\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega\omega'E_iE_f}\frac{V^3}{T}\frac{(2\pi)^4TV\delta^4(p_f+k'-p_i-k)}{|\boldsymbol{v}|}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2 \\
&= \frac{(4\pi)^2\alpha^2m^2}{4(2\pi)^2}\int d^3p_fd^3k'\frac{1}{\omega\omega'E_iE_f}\frac{\delta^4(p_f+k'-p_i-k)}{|\boldsymbol{v}|}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2 \\
&= \frac{\alpha^2m^2}{\omega'E_i}\int\frac{d^3p_f}{E_f}\frac{d^3k'}{\omega'}\frac{\delta^4(p_f+k'-p_i-k)}{|\boldsymbol{v}|}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2
\end{aligned}$$

実験室系におきかえます。標的を電子とし、光子は光速で飛んでいるので

$$p_i = (m,0)\ ,\ |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}_e| = c$$

はっきりさせるために光速 c を書きましたが、$c = 1$ に戻します。

立体角 $d\Omega$ は d^3k' の極座標から

$$d^3k' = |\boldsymbol{k}'|^2 d|\boldsymbol{k}'|d\Omega = \omega'^2 d\omega' d\Omega \quad (k'^2 = \omega'^2 - \boldsymbol{k}'^2 = 0)$$

$d\Omega$ は 3 次元角度積分部分です。これによって

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 m^2}{\omega E_i}\int \frac{d^3p_f}{E_f}\int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{k}'|\ |\boldsymbol{k}'|^2}{|\boldsymbol{k}'|}\int d\Omega \frac{\delta^4(p_f + k' - p_i - k)}{|\boldsymbol{v}|}|\epsilon'^\mu M_{\mu\nu}\epsilon^\nu|^2$$

微分断面積にしたいので、$d\Omega$ は積分せずに

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\alpha^2 m^2}{\omega E_i}d\Omega\int \frac{d^3p_f}{E_f}\int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{k}'|\ |\boldsymbol{k}'|^2}{|\boldsymbol{k}'|}\frac{\delta^4(p_f + k' - p_i - k)}{|\boldsymbol{v}|}|\epsilon'^\mu M_{\mu\nu}\epsilon^\nu|^2 \\ &= d\Omega\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\epsilon'^\mu M_{\mu\nu}\epsilon^\nu|^2 I \end{aligned}$$

I は

$$I = \int \frac{d^3p_f}{2E_f}\frac{2|\boldsymbol{k}'|^2 d|\boldsymbol{k}'|}{|\boldsymbol{k}'|}\delta^4(p_f + k' - p_i - k)$$

$d^3p_f/2E_f$ は

$$\int \frac{d^3p}{2E} = \int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\Theta(p_0)$$

によって置き換えて (Θ は階段関数)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{2|\boldsymbol{k}'|^2 d|\boldsymbol{k}'|}{|\boldsymbol{k}'|}\int \frac{d^3p_f}{2E_f}\delta^4(p_f + k' - p_i - k) \\ &= 2\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}'|\ |\boldsymbol{k}'|\int d^4p_f\delta^4(p_f + k' - p_i - k)\delta(p_f^2 - m^2)\Theta(p_{f0}) \\ &= 2\int_0^\infty d\omega'\ \omega'\int d^4p_f\delta^4(p_f + k' - p_i - k)\delta(p_f^2 - m^2)\Theta(p_{f0}) \end{aligned}$$

p_f 積分を実行すると、$\delta^4(p_f + k' - p_i - k)$ から $p_f = -k' + p_i + k$ となるので ($p_i = (m, 0, 0, 0), k_0 = \omega, k'_0 = \omega'$)

$$I = 2\int_0^\infty d\omega'\ \omega'\delta((p_i + k - k')^2 - m^2)\Theta(m + \omega - \omega')$$

デルタ関数内は

$$
\begin{aligned}
(p_i+k-k')^2-m^2 &= p_i^2+k^2+k'^2+2p_i\cdot k-2p_i\cdot k'-2k\cdot k'-m^2 \\
&= m^2+2m\omega-2m\omega'-2(\omega\omega'-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')-m^2 \qquad (p_i=(m,0)) \\
&= 2m\omega-2m\omega'-2(\omega\omega'-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|\cos\theta) \\
&= 2m\omega-2m\omega'-2\omega\omega'(1-\cos\theta)
\end{aligned}
$$

そして、階段関数 $\Theta(m+\omega-\omega')$ から、ω' の値は $m+\omega$ を超えないので積分の上限は $m+\omega$ となり

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{\omega+m} d\omega'\ \omega'\delta((2m\omega-2m\omega'-2\omega\omega'(1-\cos\theta)) \\
&= 2\frac{1}{|-2m-2\omega(1-\cos\theta)|}\frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)} \\
&= \frac{\omega'}{m|1+\omega(1-\cos\theta)/m|} \\
&= \frac{\omega'^2}{m\omega}
\end{aligned}
$$

デルタ関数の関係

$$
\int dx\ g(x)\delta(f(x)) = \sum_i \frac{g(x_i)}{|\frac{\partial f}{\partial x}|_{x_i}} \qquad (f(x_i)=0)
$$

を使い、積分後に使っている ω' はデルタ関数の条件より

$$
\begin{aligned}
0 &= 2m\omega-2m\omega'-2\omega\omega'(1-\cos\theta) \\
\frac{\omega}{\omega'} &= 1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta) \\
\omega' &= \frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)}
\end{aligned}
$$

また、$\cos\theta$ は 1 を超えないので、分母の絶対値は外せます。というわけで、微分断面積は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2m^2}{\omega E_i}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2 I &= \frac{\alpha^2m^2}{\omega m}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2\frac{1}{m}\frac{\omega'^2}{\omega} \\
&= \frac{\alpha^2\omega'^2}{\omega^2}|\epsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}|^2
\end{aligned}
$$

となります。

・補足

ゲージ不変性について少し触れておきます。$M_{\mu\nu}$ に k'^{μ} をかけてみます。デルタ関数から $k+p_i=k'+p_f$ なので

$$\begin{aligned}
k'^{\mu}M_{\mu\nu} &= \overline{u}_f(p_f)\Big(k'^{\mu}\gamma_\mu\frac{(p_f+k')^{\alpha}\gamma_\alpha+m}{2p_i\cdot k}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{(p_i-k')^{\alpha}\gamma_\alpha+m}{-2p_i\cdot k'}k'^{\mu}\gamma_\mu\Big)u_i(p_i)\\
&= \overline{u}_f(p_f)\Big(\frac{2(p_f\cdot k')-p_f^{\alpha}k'^{\mu}\gamma_\alpha\gamma_\mu+k'^2+k'^{\mu}\gamma_\mu m}{2p_i\cdot k}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{2(p_i\cdot k')-k'^{\mu}p_i^{\alpha}\gamma_\mu\gamma_\alpha-k'^2+k'^{\mu}\gamma_\mu m}{-2p_i\cdot k'}\Big)u_i(p_i)\\
&= \overline{u}_f(p_f)\Big(\frac{-(p_f^{\alpha}\gamma_\alpha-m)k'^{\mu}\gamma_\mu+2(p_f\cdot k')}{2p_i\cdot k}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{-k'^{\mu}\gamma_\mu(p_i^{\alpha}\gamma_\alpha-m)+2(p_i\cdot k')}{-2p_i\cdot k'}\Big)u_i(p_i)
\end{aligned}$$

ここでディラック方程式

$$\overline{u}_f(p_f)(p_f^{\mu}\gamma_\mu-m)=0\ ,\ (p_i^{\mu}\gamma_\mu-m)u_i(p_i)=0$$

を使うと

$$k'^{\mu}M_{\mu\nu}=\overline{u}_f(p_f)\gamma_\nu(\frac{p_f\cdot k'}{p_i\cdot k}-\frac{p_i\cdot k'}{p_i\cdot k'})u_i(p_i)$$

$(k+p_i)^2=(k'+p_f)^2$ から、

$$k^2+p_i^2+2p_i\cdot k=k'^2+p_f^2+2p_f\cdot k'$$
$$m^2+2p_i\cdot k=m^2+2p_f\cdot k'$$
$$p_i\cdot k=p_f\cdot k'$$

なので

$$k'^{\mu}M_{\mu\nu}=\overline{u}_f(p_f)\gamma_\nu(1-1)u_i(p_i)=0$$

同様に $k^{\mu}M_{\mu\nu}$ でも 0 になります。この結果を電磁気と対応させます、
4 元ベクトルポテンシャル A^{μ} のゲージ変換は

$$A^{\mu}+\frac{\partial\chi}{\partial x_\mu}$$

一方で、電流と電磁場の相互作用はラグランジアンにおいて

$$\int d^4xJ_\mu A^{\mu}$$

つまり、ゲージ変換に対して不変であるためには

$$\int d^4x J_\mu \frac{\partial \chi}{\partial x_\mu} = 0$$

を要求します。そして、部分積分して表面項をおとせば

$$\int d^4x \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}\chi = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

であればいいとも言えます。これはそのまま今の場合に適用できます。

量子論的には J_μ はカレントで、$\overline{u}u$ という形です。なので、ここでは $M_{\mu\nu}$ がそれに相当すると考えられるので、微分を運動量 k'^μ として

$$k'^\mu M_{\mu\nu} = 0$$

これが成立しているとゲージ不変となります。そして、こうなっていることは上で計算したとおりで、ゲージ不変性の要求を満たしています。このように、ゲージ不変性の要求から出てくる関係をワード恒等式 (Ward identity) と呼んでいます (ワード恒等式については、「くり込み〜頂点補正〜」や場の量子論での「ワード・高橋恒等式」参照)。