スピン-0 の場合

スピン 1/2 のフェルミオンと電磁場を扱ってきましたが、フェルミオンの代わりにスピン 0 で質量ありのボソンを使った場合を簡単に触れておきます。

スピン 0 の粒子をボソンやスカラー粒子やスカラーボソンと呼んでいます。スカラーとつくのでわかるように、スピノールやベクトルでなくスカラー量として表現されます。また、ボソンを扱うときはディラックの海の問題がまた表面化されます。理由は単純で、ボソンはパウリの排他律に従わないために負エネルギーで満たされているという仮定が使えないからです。しかし、ファインマンの発想で問題なく扱えます。

使う方程式はディラック方程式でなくクライン・ゴルドン方程式になります。相対論的量子力学で見たように、クライン・ゴルドン方程式はスピン 0 の粒子を記述します。例えば、スピン 0 の粒子にはパイオン (pion、パイ中間子) があります。

最初にクライン・ゴルドン方程式の関係を羅列しておきます。

- クライン・ゴルドン方程式

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0$$

- 4 元確率密度

$$j_\mu = ie(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*)$$

- 正負のエネルギーに対する平面波 ($E = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$)

$$\varphi^+_{\boldsymbol{p}}(x) = N\exp[-i(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})]$$

$$\varphi^-_{\boldsymbol{p}}(x) = N\exp[i(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})] \quad (N = \sqrt{\frac{1}{2E(2\pi)^3}})$$

1 でなく $2E$ で規格化しています (このように規格化する理由は場の量子論の「規格化について」参照)。

- 直交性

直交性は確率密度

$$\rho = \frac{i}{2m}(\phi^*(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial t} - \phi(x)\frac{\partial\phi^*(x)}{\partial t})$$

と対応させるために

$$\int d^3x\ i(\phi^*\partial_0\phi - \phi\partial_0\phi) \tag{1}$$

と与え、これは内積の定義となります。平面波を使えば

$$i\int d^3x(\varphi_{\boldsymbol{p}'}^{\pm *}\partial_0\varphi_{\boldsymbol{p}}^{\pm}-\varphi_{\boldsymbol{p}}^{\pm}\partial_0\varphi_{\boldsymbol{p}'}^{\pm *})=\pm\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})$$

- 電磁場が存在する場合 ($\partial_\mu \ \Rightarrow \ \partial_\mu+ieA_\mu$)

$$((\partial^\mu+ieA^\mu)(\partial_\mu+ieA_\mu)+m^2)\phi(x)=0$$

左辺は

$$\Box\phi(x)+ie\partial^\mu(A_\mu\phi(x))+ieA^\mu\partial_\mu\phi(x)-e^2A^\mu A_\mu\phi(x)+m^2\phi(x)$$

なので

$$\begin{aligned}(\Box+m^2)\phi(x)=&-(ie(\partial_\mu A^\mu+A^\mu\partial_\mu)-e^2A^\mu A_\mu)\phi(x)\\=&-V\phi(x)\end{aligned}$$

右辺の微分演算子はどちらも $\phi(x)$ に作用します。
4 元カレントは

$$j_\mu=ie(\phi^*\partial_\mu\phi-\phi\partial_\mu\phi^*)-2e^2A_\mu\phi^*\phi$$

クライン・ゴルドン方程式での伝播関数を求めます。求め方は電子のときと同じで、「伝播関数」と同じことをします。伝播関数 Δ_F が満たす方程式はクライン・ゴルドン方程式から

$$(\partial'^\mu\partial'_\mu+m^2)\Delta_F(x',x)=-\delta(x'-x)$$

右辺がマイナスになっているのは定義上の問題でしかないです (場の量子論の「伝播関数について」参照)。この式から、運動量表示での伝播関数は

$$\begin{aligned}(-p^2+m^2)\Delta_F(p)=&-1\\\Delta_F(p)=&\frac{1}{p^2-m^2}\end{aligned}$$

というわけで、フーリエ変換で座標表示に変えれば

$$\Delta_F(x',x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp[-ip\cdot(x'-x)]\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

電子と同じように分母に $+i\epsilon$ を加えることで極を避けています。なので、ここでも負エネルギーでは時間を逆行する性質を持っています。

伝播関数は階段関数 Θ を使えば

$$\Delta_F(x', x) = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}\big(\Theta(t'-t)e^{-iE(t'-t)} + \Theta(t-t')e^{iE(t-t')}\big)$$

正負のエネルギーによる平面波 $\varphi^{\pm}_{\boldsymbol{p}}(x)$ を使って書くなら

$$\Delta_F(x', x) = -i\Theta(t'-t)\int d^3p\varphi^{+}_{\boldsymbol{p}}(x')\varphi^{+*}_{\boldsymbol{p}}(x) - i\Theta(t-t')\int d^3p\varphi^{-}_{\boldsymbol{p}}(x')\varphi^{-*}_{\boldsymbol{p}}(x) \tag{2}$$

第 2 項では $\boldsymbol{p}$ を $-\boldsymbol{p}$ に置き換えています (角度依存性のない全空間積分なので、ベクトルは反転させられる)。

S 行列の話は同じです。電磁場のないクライン・ゴルドン方程式の解を $\varphi(x)$、電磁場がいるときの解を $\phi(x)$ とすれば

$$\phi(x) = \varphi(x) + \int d^4y\ \Delta_F(x, y)V(y)\phi(y) \tag{3}$$

右辺の第 2 項が散乱された波動関数です。入射してくる粒子の波動関数を ϕ_i、散乱後を平面波 φ^+_f とすれば、過去から未来へ進むときの S 行列は

$$S = \lim_{t\to\infty}\langle\varphi^+_f; t|\phi_i; t\rangle$$

今は、内積 (確率密度) は (1) なので

$$S = \lim_{t\to\infty}\int d^3x\ i(\varphi^+_f(x)\partial_0\phi_i(x) - \phi_i(x)\partial_0\varphi^+_f(x))$$

これに (3) を入れて、

$$\int d^3x\ \varphi^+_f(x)\partial_0\phi_i(x) = \int d^3x\ \varphi^+_f(x)\partial_0(\varphi_i(x) + \int d^4y\ \Delta_F(x, y)V(y)\phi_i(y))$$
$$\int d^3x\ \phi_i(x)\partial_0\varphi^+_f(x) = \int d^3x\ (\varphi_i(x) + \int d^4y\ \Delta_F(x, y)V(y)\phi_i(y))\partial_0\varphi^+_f(x)$$

なので

$$\begin{aligned}S = &\lim_{t\to\infty} i\int d^3x\ (\varphi^+_f(x)\partial_0\varphi_i(x) - \varphi_i(x)\partial_0\varphi^+_f(x))\\ &+ \lim_{t\to\infty} i\int d^3x\int d^4y\ \varphi^+_f(x)\partial_0(\Delta_F(x, y)V(y)\phi_i(y))\\ &- \lim_{t\to\infty} i\int d^3x\int d^4y\ \Delta_F(x, y)V(y)\phi_i(y)\partial_0\varphi^+_f(x)\end{aligned}$$

第 1 項は直交性から $\varphi_i(x)$ は $\varphi_i^+(x)$ のときに 0 でないので、φ_f^+ の運動量 $\boldsymbol{p}_f$、$\varphi_i^+(x)$ の運動量を $\boldsymbol{p}_i$ とすれば

$$\lim_{t\to\infty} i\int d^3x\ (\varphi_f^+(x)\partial_0\varphi_i^+(x)-\varphi_i^+(x)\partial_0\varphi_f^+(x))=\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)$$

第 2 項は、$t\to\infty$ から (2) の第 1 項だけが残り

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} i\int d^3x\int d^4y\ \varphi_f^+(x)\partial_0(\Delta_F(x,y)V(y)\phi_i(y))\\
&\quad=\lim_{t\to\infty}\int d^3x\int d^4y\ \varphi_f^+(x)\partial_0(\int d^3p\varphi_{\boldsymbol{p}}^+(x)\varphi_{\boldsymbol{p}}^{+*}(y)V(y)\phi_i(y))\\
&\quad=\lim_{t\to\infty}\int d^3x\int d^4y\int d^3p\ \varphi_f^+(x)(\partial_0\varphi_{\boldsymbol{p}}^+(x))\varphi_{\boldsymbol{p}}^{+*}(y)V(y)\phi_i(y))
\end{aligned}$$

第 3 項は

$$\begin{aligned}
&-\lim_{t\to\infty} i\int d^3x\int d^4y\ \Delta_F(x,y)V(y)\phi_i(y)\partial_0\varphi_f^+(x)\\
&\quad=-\lim_{t\to\infty}\int d^3x\int d^4y\int d^3p\ \varphi_{\boldsymbol{p}}^+(x)\varphi_{\boldsymbol{p}}^{+*}(y)V(y)\phi_i(y)\partial_0\varphi_f^+(x)\\
&\quad=-\lim_{t\to\infty}\int d^3x\int d^4y\int d^3p\ \varphi_{\boldsymbol{p}}^+(x)(\partial_0\varphi_f^+(x))\varphi_{\boldsymbol{p}}^{+*}(y)V(y)\phi_i(y)
\end{aligned}$$

なので、第 2 項と第 3 項の和は

$$\lim_{t\to\infty}\int d^3x\int d^4y\int d^3p\ (\varphi_f^+(x)\partial_0\varphi_{\boldsymbol{p}}^+(x)-\varphi_{\boldsymbol{p}}^+(x)\partial_0\varphi_f^+(x))\varphi_{\boldsymbol{p}}^{+*}(y)V(y)\phi_i(y)$$

直交性から

$$-i\int d^4y\int d^3p\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p})\varphi_{\boldsymbol{p}}^{+*}(y)V(y)\phi_i(y)=-i\int d^4y\varphi_{\boldsymbol{p}_f}^{+*}(y)V(y)\phi_i(y)$$

よって、S 行列は

$$S=\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)-i\int d^4y\varphi_{\boldsymbol{p}_f}^{+*}(y)V(y)\phi_i(y)\tag{4}$$

同様にすれば、$t\to-\infty$ で $\varphi_{\boldsymbol{p}_i}$ になるとして未来から過去への S 行列は

$$S=\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)-i\int d^4y\varphi_{\boldsymbol{p}_i}^{-*}(y)V(y)\phi_f(y)$$

このとき特徴的なのは、V は電荷 e と e^2 の 2 つを線形に含んでいることです。つまり、摂動展開していくと、e^n, e^{2n} によって区別される項が出てきます。このため、最低次での S 行列でも 2 つのファインマン図が出てきます。さらに細かくいうと、1 つの光子の頂点 (vertex) に対して 2 つの光子が放出されるものを書けます。これは後でまた触れます。

S 行列 (4) のポテンシャルに電磁場 $A_\mu(\kappa_b$ を含めている) を入れて、最低次を取り出すために $\phi_i(x)$ を $\varphi_i^{(+)}$ として

$$
\begin{aligned}
S =& -i\int d^4x\varphi_{p_f}^+(x)V(x)\phi_i(x)\\
=& \int\frac{d^4x}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_fE_i}}\exp[ip_f\cdot x](e(\partial^\mu A_\mu+A_\mu\partial^\mu)+ie^2g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu)\exp[-ip_i\cdot x]\\
=& S_a+S_b
\end{aligned}
$$

実際に e のオーダによって 2 つに分離し、それぞれが別のファインマン図となります。第 1 項は e の 1 次のオーダ、第 2 項は e^2 なので e の 2 次のオーダです。

S_a と S_b をもう少し見やすい形に変形させます。S_a は

$$
\begin{aligned}
S_a =& \int\frac{d^4x}{(2\pi)^3}\frac{e}{\sqrt{2E_fE_i}}\exp[ip_f\cdot x](\partial^\mu A_\mu+A_\mu\partial^\mu)\exp[-ip_i\cdot x]\\
=& \frac{e}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int d^4x\big(\exp[ip_f\cdot x]\partial^\mu A_\mu\exp[-ip_i\cdot x]\\
&\qquad\qquad +\exp[ip_f\cdot x]A_\mu\partial^\mu\exp[-ip_i\cdot x]\big)\\
=& \frac{e}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int d^4x\big(\partial^\mu\big(\exp[i(p_f-p_i)\cdot x]A_\mu\big)\\
&\qquad\qquad -\big(\partial^\mu\exp[ip_f\cdot x]\big)A_\mu\exp[-ip_i\cdot x]+\exp[ip_f\cdot x]A_\mu\partial^\mu\exp[-ip_i\cdot x]\big)\\
=& \frac{e}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int d^4x\big((-ip_f^\mu)\exp[i(p_f-p_i)\cdot x]A_\mu+A_\mu(-ip_i^\mu)\exp[i(p_f-p_i)\cdot x]\big)\\
=& \frac{-ie}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int d^4x(p_f^\mu+p_i^\mu)\exp[i(p_f-p_i)\cdot x]A_\mu\\
=& \frac{-ie(p_f^\mu+p_i^\mu)}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int d^4x\ \ \exp[i(p_f-p_i)\cdot x]A_\mu(x)\\
=& \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}(-ie)(p_f^\mu+p_i^\mu)A_\mu(p_f-p_i)
\end{aligned}
$$

途中で表面積分は消えるとしています ($\partial^\mu A_\mu$ の ∂^μ は A_μ の後にもかかっていることに注意)。また、最後は座標表示から運動量表示へのフーリエ変換です。

これは特に変なこともない結果で、$-ie(p_f+p_i)_\mu$ の部分が頂点 $-ie\gamma_\mu$ に対応しています。また、$A_\mu(p_f-p_i)$ を伝播関数の形に直せば、e がもう 1 つ出てくるので、不変振幅におけるオーダは e^2 です。

S_b のほうを変形すると

$$
\begin{aligned}
S_b &= ie^2 g_{\mu\nu}\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int d^4xA^\mu(x)A^\nu(x)\exp[i(p_f-p_i)\cdot x] \\
&= ie^2 g_{\mu\nu}\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int d^4xA^\mu(x)\exp[iq\cdot x]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^\nu(k)\exp[ik\cdot x] \quad (q=p_f-p_i) \\
&= ie^2 g_{\mu\nu}\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int\frac{d^4xd^4k}{(2\pi)^4}A^\mu(x)\exp[i(q-k)\cdot x]A^\nu(k) \\
&= ie^2 g_{\mu\nu}\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_fE_i}}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^\mu(q-k)A^\nu(k)
\end{aligned}
$$

フーリエ変換とフーリエ逆変換を両方使って変形しています。

この式を見ると、光子が 2 つ含まれているのが分かります。しかし、式の構造上、頂点は $ie^2g_{\mu\nu}$ と考えられます。さらに面倒なことに、光子が 2 つあるために、同種粒子の散乱のときのように光子の入れ替えができると思えます。このため、正確な頂点は $2ie^2g_{\mu\nu}$ になります。これがボソンと電磁場による散乱の特徴的な性質で、2 つ光子が出ている頂点では 2 倍され、$2ie^2g_{\mu\nu}$ が対応します。また、フェルミオンと違い、ボソンでは粒子の入れ替えに対して符号が変わることはないです。ただし、2 つの頂点に挟まれて光子がループしている場合は、2 つある頂点両方に対して 2 の因子がついてしまうので 1/2 にする必要があります。

このように入れ替えたものが同じになって 2 倍されるのは、頂点に対して光子が 2 つ関係している場合であって、他の例えばコンプトン散乱のように頂点が違うもの同士での散乱を交換した場合は別々に考えなくてはならないです。

次に断面積を求めてみます。簡単なものとしてクーロンポテンシャルによる散乱（ラザフォード散乱）を考えることにします。

最低次のオーダーだけを考えるために S_a だけを使います。「ラザフォード散乱」と計算が同じなので、細かい計算は飛ばします。クーロンポテンシャルは (A_μ の 0 成分)、原子番号 Z の原子核によるとして

$$
A_0(q) = 2\pi\delta(q_0)\frac{4\pi\kappa_eZe}{|\boldsymbol{q}|^2}
$$

入射カレントは

$$
j_{in} = -i(\varphi^{+*}_{p_i}\nabla\varphi^+_{p_i} - \varphi^+_{p_i}\nabla\varphi^{+*}_{p_i}) = -i\frac{1}{2E_iV}(2i\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{v}_i}{V}
$$

マイナスがついているのは空間成分だけを取り出しているからです。規格化の範囲を V にするために

$$
N = \sqrt{\frac{1}{2E(2\pi)^3}} \ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{1}{2EV}}
$$

と置き換えています。というわけで、断面積は

$$
d\sigma = \frac{V}{|\boldsymbol{v}_i|T}\Big|\frac{-ie(E_f+E_i)}{V\sqrt{2E_fE_i}}2\pi\delta(E_f-E_i)\frac{-4\pi\kappa_eZe}{|\boldsymbol{q}|^2}\Big|^2\frac{Vd^3p_f}{(2\pi)^3}
$$

2 乗の計算をしていけば

$$
d\sigma = \frac{4Z^2\alpha d^3p_f}{|\boldsymbol{q}|^4|\boldsymbol{v}_i|}\delta(E_f-E_i) \quad (E_f=E_i\ ,\ \alpha=\kappa_ee^2)
$$

微分断面積にすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d|\boldsymbol{p}_f|\frac{4Z^2\alpha|\boldsymbol{p}_f|^2}{|\boldsymbol{q}|^4|\boldsymbol{v}_i|}\delta(E_f-E_i) &= \int dE_f\frac{4Z^2\alpha|\boldsymbol{p}_f|E_f}{|\boldsymbol{q}|^4|\boldsymbol{v}_i|}\delta(E_f-E_i) \\
&= \int dE_f\frac{4Z^2\alpha E_f^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\delta(E_f-E_i) \\
&= \frac{4Z^2\alpha E^2}{|\boldsymbol{q}|^4} \\
&= \frac{Z^2\alpha E^2}{4|\boldsymbol{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{Z^2\alpha}{4|\boldsymbol{p}|^2v^2\sin^4\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}
$$

途中で

$$
\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{v}_i|E_i} = 1\ ,\ E_f dE_f = |\boldsymbol{p}_f|d|\boldsymbol{p}_f|\ ,\ |\boldsymbol{q}|^2 = 4|\boldsymbol{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\ ,\ \frac{|\boldsymbol{p}|}{E} = v
$$

としています。
　求まった微分断面積を「ラザフォード散乱」の結果と比べてみると

$$
(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2})
$$

というものがないのが分かります。これの第 2 項はスピンによる磁場の影響部分と言っていたように、スピン 0 では出てこなくなっています。なので、スピンの影響であったことが今の結果から確かめられたとも言えます。