縦振動

物体の微小部分の運動方程式を考える例として弾性体の棒に力を加えたときの縦振動を見ていきます。ついでに気体の場合も少し扱います。

力学ではあまり出てこない単語を使うので、先に単語の定義を与えておきます。

弾性体 (elastic body) というのがあり、大雑把には力を加えると変形し、力を取り除くともとの形に戻る物体のことです。弾性体に力を加えることで起きる変形を表す波を弾性波 (elastic wave) と言います。ここでは弾性体の棒としますが、後で出てくるフックの法則を使うためです。

物体に力を加えたとき、物体の各部分はその力によって影響を受け、物体の変形が起きます。この物体の各部分 (内部) で起きる単位面積あたりの力を応力 (stress) と言います (物体の内部の適当な面に作用している力をその面の面積で割ったもの)。特に、作用する面に対して垂直な応力を垂直応力 (normal stress) と言います。

ひずみ (strain) と呼ばれる量があり、長さの変化量をもとの長さで割ったものとして定義されています。ただし、ひずみの定義は他にもいくつかあるのでどの定義を使っているかに注意が必要です。ここでは、ある面に対して垂直方向のみに物体の変形が起きている場合を扱い、このときは垂直ひずみ (normal strain) と呼ばれます。

ここでは弾性体の棒の変形が棒に沿ってのみ起きる場合を見ていきますが、細かい設定をすると大変なので分かりやすい状況設定を作っていきます。

細い棒があり、断面積は A、密度 ρ は一定とします。細いとしているのは棒の構造を無視するためです。この棒を x 軸に平行になるように置き、何かしらの力を作用させたとき (例えば棒の片側の面を叩く)、棒の伸縮が棒に沿って起きると考えます。このとき、x 軸に平行な伸縮だけが起きているとし、y 軸方向には変化が起きないとします (現実的には x 軸方向に伸ばせば y 軸方向は縮みますが、それを無視)。これは、垂直応力が断面に対して一様に作用し、その断面は常に棒に対して垂直になっているとも言えます。

運動方程式を作ります。棒は形を持っているために運動方程式を直接作れないので、微小部分を考えます。力が加わる前の安定している棒の左端を原点とします。位置 x の地点の断面を S_1、そこから微小に離れた $x+\Delta x$ での断面を S_2 とします。この S_1 と S_2 に挟まれた部分を位置 x での棒の微小部分として運動方程式を作り ($x-\Delta x/2$ と $x+\Delta x/2$ による微小部分を x での微小部分としても同じ)、$\Delta x \to 0$ の極限を取ることにします。

力が加わっていないときの微小部分の位置 x からの変位 (位置が x' になるなら変位は $x'-x$) の式として運動方程式を作ります。棒の伸縮は、棒の各部分で異なり、伸縮の具合は時間変化するはずなので、変位を表す関数は $u(x,t)$ として位置と時間に依存させます (この x は力の加わっていないときの棒の位置)。今の設定で運動方程式を作るなら、バネの単振動では静止しているときの重りの位置からの距離に対して運動方程式を作ったのと同じように、変位に対して

$$\rho A\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = F_0(x,t) \tag{1}$$

微小部分に作用して変位を起こす力を F_0 とし、棒の各部分に作用している力は一般的には変化していくはずなので、位置と時間に依存させています。左辺は、運動方程式は時間変化と力による式なので、時間の偏微分にしています。後は、現実の物体の運動に対応する力の形を与えればいいです。

弾性体において垂直ひずみが小さいときには法則性があり、面に垂直に作用している単位面積あたりの力と垂直ひずみは比例します (棒を伸ばす力と棒の伸びは比例)。これをフック (Hooke) の法則と言い、その比例定数はヤング率 (Young's modulus) と呼ばれます。ヤング率は実験から決められます。フックの法則は、もとの長さを l、長さの変化を Δl、作用する力を F、断面積を A とすれば

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l}$$

と書けます。右辺の $\Delta l/l$ は垂直ひずみ、左辺の F/A は応力 (単位面積あたりの力) で、面に垂直なので垂直応力 (normal stress) と呼ばれます。垂直ひずみが正なら垂直応力は棒を伸ばすように作用し、負なら縮めるように作用します。また、これから分かるように、ヤング率の単位は MKS 単位系において $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}]$ です。

右辺の垂直ひずみは変位を使って書けます。今は x と $x+\Delta x$ の 2 つの地点があり、力が加わるとそれぞれが変位を起こすので、S_1 の変位は $u(x,t)$、S_2 の変位は $u(x+\Delta x,t)$ とします。そうすると、変形後の S_1 と S_2 の間の長さは

$$x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)-(x+u(x,t))=\Delta x+u(x+\Delta x,t)-u(x,t) \tag{2}$$

と与えられます。これともとの長さ Δx との差を取って Δx で割ったのが垂直ひずみ ϵ なので

$$\epsilon=\frac{1}{\Delta x}(\Delta x+u(x+\Delta x,t)-u(x,t)-\Delta x)=\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}$$

$\Delta x\to 0$ の極限で

$$\epsilon=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{3}$$

となります。また、(2) を Δx の 1 次までで展開すれば

$$\Delta x+u(x+\Delta x,t)-u(x,t)\simeq\Delta x+u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-u(x,t)=\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x=\Delta x+\epsilon\Delta x$$

なので、垂直ひずみがもとの長さ Δx からの変化を与えています。

(3) から、微小部分に作用している垂直応力に対するフックの法則は、$\Delta x\to 0$ の極限で

$$\frac{F(x,t)}{A}=Y\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

フックの法則はもとの長さ Δx(S_1 と S_2 の間の微小部分の長さ) からの変化量に対する法則で、その変化量は (2) から S_1,S_2 の変位の差です。つまり、S_1,S_2 の変位はそれぞれに作用している垂直応力によって作られているので、変位の変化量 (変位の時間変化) を与えているのは S_1 での力と S_2 での力の差です。例えば、垂直ひずみが正なら、S_1,S_2 間の幅を広げるように力は作用するので、S_1 での力は負の方向、S_2 での力は正の方向に作用し、その差が変位の変化を与えます。

そうすると、(1) の力は

$$F(x+\Delta x,t)-F(x,t)=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x$$

と与えられ

$$\rho A\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x$$

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{A}$$

Δx がいなくなっているので、そのまま垂直ひずみでのフックの法則を入れれば

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

となり、波動方程式になります。右辺の係数は、ヤング率の単位 $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}]$ を密度 $[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}]$ でわっていることから

$$\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}^{-2}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^{-2}}$$

となるので $\sqrt{Y/\rho}$ は速度の単位を持ちます。今は棒に沿った方向への変位が振動しているので縦振動 (longitudinal vibration) と呼ばれ、その波としての性質は縦波 (longitudinal wave) です。このように、横波、縦波はどちらも同じ方程式として出てきます。

棒の方向への振動なので何を波と言っているのか分かりづらいですが、縦を u、横を x としたときに書かれる図が縦波を表し、それが動く速度が $\sqrt{Y/\rho}$ です。速度は例えば金属では大体 $5\times10^3[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$ です。また、今は力 (応力) が $\partial u/\partial x$ に比例しているので、波の形は力と関係しています。

同じ波動方程式なので「弦の振動」での両端を固定した解はここでの解にもなります（「弦の振動」では x 軸上に置かれた弦の y 軸方向の変位の解、ここでは x 軸上に置かれた棒の x 軸方向の変位の解)。なので、異なる境界条件での場合を求めます。

ここでは棒の左端のみが固定されていて、右端では力は消えているとします。この条件は、棒の長さを L とすれば (左端は原点)、左端が固定されているので $x=0$ で変位は 0、右端で力が 0 なので（2）からゆがみが 0 ということです。なので、境界条件は

$$u(0,t) = 0\ ,\ \epsilon(L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0$$

「弦の振動」と同じように、解の形として

$$u(x,t) = A(x)\cos(\omega t+\phi)$$

$$A(x) = B_1\cos(\sqrt{\frac{\rho}{Y}}\omega x) + B_2\sin(\sqrt{\frac{\rho}{Y}}\omega x)$$

$B_1, B_2, \omega>0, \phi$ は条件から決まる定数です。このときの境界条件は

$$u(0,t) = A(0)\cos(\omega t+\phi) = 0\ \Rightarrow\ A(0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = \frac{\partial A}{\partial x}|_{x=L}\cos(\omega t+\phi) = 0\ \Rightarrow\ \frac{\partial A}{\partial x}|_{x=L} = 0$$

$A(0)$ から $B_2=0$ として

$$A(x) = B_1\sin(kx)\quad (k = \sqrt{\frac{\rho}{Y}}\omega)$$

これを微分して $x=L$ としたとき

$$\frac{\partial A}{\partial x}|_{x=L} = B_1 k\cos(kL) = 0$$

cos は

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} = \cdots = 0$$

となっているので

$$k = \frac{1}{L}(n\pi - \frac{\pi}{2}) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

とすれば、これを満たせます。ω は

$$\omega = k\sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \frac{1}{L}(n\pi - \frac{\pi}{2})\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

よって、この境界条件での解は

$$u(x,t) = B\sin(\frac{2n-1}{2L}x)\cos(\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\frac{2n-1}{2L}\pi t + \phi)$$

となります。B, ϕ は初期条件によって決まります。より一般的な解は、n による別々の解を重ね合わせたものなので

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(\frac{2n-1}{2L}x)\cos(\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\frac{2n-1}{2L}\pi t + \phi_n)$$

C_n, ϕ_n は n で区別される定数です。

ついでに、気体でも同様の設定から波動方程式が出てくることを見ます。これもまともに扱わずに、簡易的な状況にして細かいことは無視します。考え方は棒のときと同じですが、気体の密度は簡単に変わるという性質を組み込みます。

まず、気体は断面積 A の円筒の管に一定の密度 ρ_0 で詰まっているとし、円筒内における任意の点で気体は同じ性質を持つとします。また、何もない状況では気体に一定の圧力 P_0 が一様に作用して形を保っているとします。この円筒を x 軸上に置いて、圧力が変化したときの変位を求めます。ただし、圧力は x 軸に平行に作用し、気体は x 軸方向のみに動くとします（気体が渦を巻いたりせずに単純に x 軸方向に動く)。

圧力が変化していないときの位置 x にいる気体の塊が、時間 t での圧力変化によって x 軸方向に $u(x,t)$ だけ動いたとします (変位が $u(x,t)$)。そうすると、x にいた部分は $x + u(x,t)$ に行きます。同様に、x から微小に離れた $x + \Delta x$ にいた気体は $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$ に行きます。このように、x と $x + \Delta x$ の間にいた気体の塊は $x + u(x,t)$ と $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$ の間の微小部分に移動します。

円筒内の全質量は変化しないことから、移動の前後で微小部分の密度は変わっても質量は変わらないとして

$$\rho_0 A\Delta x = A\rho(x,t)(x + \Delta x + u(x + \Delta x, t) - x + u(x,t))$$

$$= A\rho(x,t)(\Delta x + u(x + \Delta x, t) + u(x,t))$$

$\rho(x,t)$ は変化後の密度です。$A, \Delta x$ で割ると

$$\rho_0 = \rho(x,t)(1 + \frac{u(x+\Delta x, t) + u(x,t)}{\Delta x})$$

$\Delta x \to 0$ にすれば偏微分の定義になるので

$$\rho_0 = \rho(x,t)(1 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) \tag{4}$$

これが密度の関係を与えます。

次に圧力を見ます。時間 t で位置 x の気体に作用する圧力を $P(x,t)$ とします。x と $x+\Delta x$ でそれぞれに $P(x,t), P(x+\Delta x, t)$ の圧力が作用しているので、この気体の塊に作用する力は

$$-F \simeq A(P(x,t) + \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\Delta x) - AP(x,t) = A\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\Delta x$$

圧力は単位面積あたりの力なので断面積 A をかけています。後の符号に合わせるためにマイナスを付けています。

質量 $\rho_0 A\Delta x$ の塊にこの力が作用して変位を起こすので、運動方程式は

$$\begin{aligned}\rho_0 A\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= -A\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\Delta x\\ \rho_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \qquad (5)\end{aligned}$$

ここに気体の状態方程式を加えます。状態方程式は圧力と密度の関係で、適当な関数 f によって $P = f(\rho)$ と書かれます。そうすると

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

から

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

これに (4) を x で偏微分した

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0(1 + \frac{\partial u}{\partial x})^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を入れれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\\ &= (1 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x})^{-2}\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

これは $u(x,t)$ による波動方程式の形になっていますが、係数に u がいるために非線形の形になっています。

さらに近似を加えた場合では線形として出てきます。変位の位置の変化は緩やかに起きているとして、$\partial u/\partial x$ が 1 よりも十分小さいと近似します。f を ρ_0 周りでテイラー展開すると

$$P(x,t)=f(\rho)\simeq f(\rho_0)+\frac{\partial f}{\partial\rho}|_{\rho=\rho_0}(\rho-\rho_0)=f(\rho_0)+\frac{\partial P}{\partial\rho}|_{\rho=\rho_0}(\rho-\rho_0)$$

ρ_0 のときの圧力は P_0 としているので

$$P(x,t)\simeq P_0+\frac{\partial P}{\partial\rho}|_{\rho=\rho_0}(\rho-\rho_0)$$

$\partial u/\partial x\ll 1$ のときでは

$$\rho(x,t)=\rho_0(1+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x})^{-1}\simeq\rho_0(1-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x})$$

と近似できるので

$$P(x,t)\simeq P_0-\rho_0\frac{\partial P}{\partial\rho}|_{\rho=\rho_0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=P_0-\alpha\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\quad\ (\alpha=\rho_0\frac{\partial P}{\partial\rho}|_{\rho=\rho_0})$$

α は体積弾性率 (bulk modulus of elasticity) と呼ばれます。α は x に依存していないので

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}$$

これを (5) に入れれば

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\alpha}{\rho_0}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}$$

となり、係数が定数の波動方程式になります。このように気体の振動として伝わる波を音波 (sound wave, acoustic wave) と言い、円筒に平行な方向への変位 (縦振動) なので縦波です。ただし、固体や液体でも音の伝達はあるので音波と言うことがあり、区別は曖昧です (棒での場合も sound wave と言っていることがある)。

今の波動方程式は変位の式ですが、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}&=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}&=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2P(x,t)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

とすれば

$$\frac{\partial^2P(x,t)}{\partial t^2}=-\alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

から

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{\rho_0}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

として、圧力による波動方程式になります。このため、気体の振動による波でなく圧力の変化による波とも言えます。これは、音は空気を伝わる圧力の波という感覚的に分かりやすい意味に対応させられます。

さらに、密度の変化は

$$\rho(x,t) - \rho_0 = -\rho_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

なので

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial t^2} = -\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

となることから

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\alpha}{\rho_0}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\alpha}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\alpha}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

となり、密度でも同じ波動方程式になります。このときでは、密度の変化による波と言えます。