運動方程式の座標変換

ガリレイの相対性原理の要求のもとで運動方程式の座標変換を行います。
座標変換の話をした後に、その話を使わない位置と時間の平行移動とガリレイ変換を行っているので、座標変換の話としては流れが悪いです。
ガリレイの相対性原理の要求を与えますが、その意味には触れずに進めています。
回転変換は下の補足で求めています。
ローマ文字の添え字は 1 から 3 です。

3 次元デカルト座標での座標変換を行います。デカルト座標の座標軸を x_1 軸、x_2 軸、x_3 軸とし、そのベクトルは $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ $(V_i,\ i = 1, 2, 3)$ とします。

力学はニュートンの運動の法則によって作られていますが、成立すべきとされる原理（仮定）があります。それは、運動方程式 (第二法則) は

(i) 空間の並進 (平行移動)

(ii) 時間の並進

(iii) 一定速度で動かす

(iv) 回転

という変換のもとで形を変えないというものです。(iii) のことをガリレイ変換と言います。もしくは、4 つの変換を合わせてガリレイ変換と呼ぶこともあります。

これらの変換 (もしくは (iii) だけ) で運動方程式の形が変わらないことを、ガリレイの相対性原理 (Galilean principle of relativity) と言います。つまり、質量 m は変換とは無関係とし、(i) から (iv) の変換前の粒子の軌道 (位置) を $r_i(t)$、作用している力を F_i、変換後の粒子の軌道を $r'_i(t')$、作用している力を F'_i としたとき $(i = 1, 2, 3)$、変換前と変換後で

$$m\frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i\ ,\ m\frac{d^2 r'_i}{dt'^2} = F'_i$$

となることが要求されます。F_i, F'_i は変数を書いていませんが、一般的に位置、速度、時間に依存します。この要求によって力に対する制限が出てきます。相対性原理の解釈については無視して (この手の話は沢山あるのでそっちを見てください)、数式上の話だけをしていきます。

これらの変換には 2 通りの見方があり、対象を見ている観測者側の変換と、対象そのものの変換とがあります。前者を passive point of view、後者を active point of view と言います。ここでは passive point of view とし、最後に active point of view との対応を簡単に見ます。

この手の話で出てくる単語の意味を言っておきます。座標系 (coordinate system) は対象の位置を特定するために設定するものです。原点を決め、対象の位置の表し方が 1 つに決まるように基準 (座標軸) を決めることで座標系は作られます。極座標のように表し方が決まらない場合もありますが、その場合も座標系として扱われます。また、基準系や参照系 (reference frame, frame of reference) という単語があり、これらは観測者が設定した座標系のことです。なので、基準系と座標系（観測者による座標系）はほぼ同じ意味で使われます。ただし、基準系は使い方がそれほどはっきりしない曖昧な単語で、座標軸を設定する前の段階を指したり、何かしらの観測対象を指したりします。

少し一般化した状況で座標変換の話をしていきます。しかし、この話が必要になるのは (iv) の回転の場合だけなので、(i) から (iii) の話だけで十分なら飛ばしていいです。

基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とします。任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ は、基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ とスカラーの組 A_i によって

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$$

と一意的に展開できます。ベクトルの位置を指定する係数の組 (A_1, A_2, A_3) のことを座標 (coordinate) と呼びます。基底ベクトルは他にも存在できるので、$\boldsymbol{e}_i$ とは異なる基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_i$ とすれば、ベクトル $\boldsymbol{A}$ は基底ベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ によっても

$$\boldsymbol{A} = A'_1\boldsymbol{e}'_1 + A'_2\boldsymbol{e}'_2 + A'_3\boldsymbol{e}'_3$$

と書け、A'_i は一意的に決まります。これがベクトル $\boldsymbol{A}$ を異なる座標系から見ることに対応し、$\boldsymbol{e}_i$ から $\boldsymbol{e}'_i$ への変換が座標変換です。この変換を見ていきます。

ベクトルは基底ベクトルで展開でき、基底ベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ はベクトルなので、基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ によって

$$\boldsymbol{e}'_1 = S_{11}\boldsymbol{e}_1 + S_{12}\boldsymbol{e}_2 + S_{13}\boldsymbol{e}_3 \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = S_{21}\boldsymbol{e}_1 + S_{22}\boldsymbol{e}_2 + S_{23}\boldsymbol{e}_3 \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{e}'_3 = S_{31}\boldsymbol{e}_1 + S_{32}\boldsymbol{e}_2 + S_{33}\boldsymbol{e}_3 \tag{1c}$$

と展開できます。これらは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ を作っているので、$\boldsymbol{e}_i$ から $\boldsymbol{e}'_i$ への変換の式です。なので、S_{ij} が基底ベクトルの変換規則を与えています。また、後で原点を平行移動させる変換を行いますが、このときは基底ベクトルは変換されません (ベクトルは平行移動で変化しないから)。

(1a)〜(1c) をまとめて

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} S_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{2a}$$

$\boldsymbol{e}'_i$ から $\boldsymbol{e}_i$ への変換として書いた場合を、T_{ij} として

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\boldsymbol{e}'_j \tag{2b}$$

とします。そうすると

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v'_i\boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{3} v'_i \sum_{j=1}^{3} S_{ij}\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} v'_i S_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} v_i \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\boldsymbol{e}'_j = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} v_i T_{ij}\boldsymbol{e}'_j$$

これらから

$$v_j = \sum_{i=1}^{3} v'_i S_{ij}\ ,\ v'_j = \sum_{i=1}^{3} v_i T_{ij}$$

となり、ベクトルの成分の変換の式になります。S_{ij}, T_{ij} を 3×3 行列、ベクトルの成分を 1×3 行列とすれば行列の計算規則になります。S, T のように書いたときは行列 S, T のこととします。

今、変換を起こすものとして S_{ij} と T_{ij} の 2 つが出てきています。しかし、$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}'_i$ は変換によってお互いを行き来しているので、S_{ij} と T_{ij} には関係があります。

(2a) に T_{ki} をかけて和を取ると

$$\sum_{i=1}^{3} T_{ki}\boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{3} T_{ki} \sum_{j=1}^{3} S_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{e}_k = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} T_{ki}S_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

なので、例えば $k=1$ のとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} T_{1i}S_{ij}\boldsymbol{e}_j &= \sum_{j=1}^{3}(T_{11}S_{1j}\boldsymbol{e}_j + T_{12}S_{2j}\boldsymbol{e}_j + T_{13}S_{3j}\boldsymbol{e}_j) \\ &= (T_{11}S_{11} + T_{12}S_{21} + T_{13}S_{31})\boldsymbol{e}_1 + (T_{11}S_{12} + T_{12}S_{22} + T_{13}S_{32})\boldsymbol{e}_2 + \cdots\end{aligned}$$

$\boldsymbol{e}_1$ の項だけが 0 でなければいいので

$$T_{11}S_{11} + T_{12}S_{21} + T_{13}S_{31} = \sum_{i=1} T_{1i}S_{i1} = 1$$

$$T_{11}S_{12} + T_{12}S_{22} + T_{13}S_{32} = \sum_{i=1} T_{1i}S_{i2} = 0$$

$$T_{11}S_{12} + T_{12}S_{22} + T_{13}S_{33} = \sum_{i=1} T_{1i}S_{i3} = 0$$

これは $k=2,3$ の場合も同様なので

$$\sum_{i=1} T_{1i}S_{i1} = \sum_{i=1} T_{2i}S_{i2} = \sum_{i=1} T_{3i}S_{i3} = 1$$

$$\sum_{i=1} T_{1i}S_{i2} = \sum_{i=1} T_{1i}S_{i3} = \sum_{i=1} T_{2i}S_{i1} = \sum_{i=1} T_{2i}S_{i3} = \cdots = 0$$

となればいいことが分かります。このような性質を持っている記号がクロネッカーデルタ δ_{ij} で、$i=j$ のとき 1 で、$i\neq j$ のとき 0 です。クロネッカーデルタによって

$$\sum_{i=1} T_{ki}S_{ij} = \delta_{kj} \quad \left(\boldsymbol{e}_k = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} T_{ki}S_{ij}\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{3}\delta_{kj}\boldsymbol{e}_j\right)$$

とまとめて書けます（$S_{ki}T_{ij}$ でも同様で、(2b) の方で S_{ki} をかけて同じことをすれば求まる）。というわけで、S_{ij} と T_{ij} はこのような関係を持っていて、行列の言葉で言えば、T_{ij} は S_{ij} の逆行列 $(S^{-1})_{ij}$ です。逆行列は

$$\sum_{i=1}^{3} S_{ki}(S^{-1})_{ij} = \sum_{i=1}^{3}(S^{-1})_{ki}S_{ij} = \delta_{kj}$$

として定義されます（単位行列 I を使えば $SS^{-1} = S^{-1}S = I$）。というわけで、変換は S_{ij} とその逆行列 $(S^{-1})_{ij}$ によって行き来しているという分かりやすい関係になっています。S^{-1} を使えば、変換は

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3}(S^{-1})_{ij}\boldsymbol{e}'_j \ , \ \boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} S_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{3}$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} v'_j S_{ji} \ , \ v'_i = \sum_{j=1}^{3} v_j (S^{-1})_{ji} \tag{4}$$

となります。この変換の導出ではデカルト座標の性質を使っていないので、デカルト座標以外でも成立します。基底ベクトルとベクトル成分で同じ変換になっていないことに注意してください。

変換の前後でデカルト座標のように基底ベクトルが直交し、大きさが 1 のとき、変換の式はもっと単純になります。基底ベクトルは直交し、大きさは 1 として

$$|\boldsymbol{e}_i| = 1 \ , \ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \ , \ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0 \ , \ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$$

これらはクロネッカーデルタによって

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

とまとめて書けます。変換後の基底ベクトルも同じように $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij}$ とします。そうすると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_i &= \sum_{j=1}^{3} S_{ij}\boldsymbol{e}_j \\
\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}'_i &= \sum_{j=1}^{3} S_{ij}\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_j \\
\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}'_i &= \sum_{j=1}^{3} S_{ij}\delta_{kj} \\
&= S_{ik}
\end{aligned}$$

となり、S_{ij} は変換前後の基底ベクトルの内積 $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j$ によって求まります。さらに

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{j}} = \sum_{k=1}^{3} S_{ik}\boldsymbol{e}_k \cdot \sum_{l=1}^{3} S_{jl}\boldsymbol{e}_l = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} S_{ik}S_{jl}\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} S_{ik}S_{jl}\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} S_{ik}S_{jk}$$

から

$$\sum_{k=1}^{3} S_{ik}S_{jk} = \delta_{ij}$$

ここで、S を転置した行列を U とします。t を転置の記号として、$S_{ij} = (S^t)_{ji} = U_{ji}$ です。そうすると、$S_{ij} = U_{ji}$ なので

$$\sum_{k=1}^{3} S_{ik}U_{kj} = \delta_{ij}$$

なので、U_{kj} は S_{ik} の逆行列 $(S^{-1})_{kj} = U_{kj}$ となります。よって、$S_{jk} = (S^t)_{kj} = U_{kj} = (S^{-1})_{kj}$ から

$$v'_i = \sum_{j=1}^{3} v_j (S^{-1})_{ji} = \sum_{j=1}^{3} v_j S_{ij} = \sum_{j=1}^{3} S_{ij} v_j \tag{5}$$

となって、基底ベクトルの変換 $\boldsymbol{e}'_i = \Sigma S_{ij}\boldsymbol{e}_j$ と同じになります。このときの S は $S^t = S^{-1}$ として転置したものが逆行列になっているので、S は直交行列です。よって、基底ベクトルが直交し、大きさが 1 の座標系の間の変換は直交行列によって行われ、基底ベクトルとベクトル成分の変換は同じ形になります。

これで座標変換の話は終わらせて、(i) から (iv) の変換に戻ります。

今の話に合わせて言えば、(i) から (iv) は、もとの座標系から

(i) 空間上を平行移動した座標系

(ii) 時間軸を平行移動した座標系

(iii) 一定速度で動いている座標系

(iv) 回転した座標系

への座標変換です。これらによる運動方程式の変換を見ていきます。

デカルト座標とし、粒子の軌道 (運動方程式に従う軌道) を r_i （位置ベクトル）で表すことにします。座標変換後の座標系から見たその粒子の軌道は r'_i のように表記します。座標系を変えるだけなので、変換前後で粒子の位置の点は同じままです (r_i, r'_i は異なる座標系から見た同じ位置の位置ベクトル)。また、質量 m は変換とは無関係とするので、$m = 1$ にして省略します (もしくは運動方程式の両辺を m で割って力を再定義しているとする)。

(i) の空間の平行移動から見ていきます。これは、デカルト座標での原点 O を移動させた新しい原点 O' でまたデカルト座標を設定することです。このため基底ベクトルは変更されず、原点の移動だけで終わります。

原点 O を定数のベクトル a_i だけ負の方向に動かした点を新しい原点 O' とします。原点を O' とするデカルト座標から粒子の軌道 $r_i(t)$ を見ると

$$r'_i(t) = r_i(t) + a_i \tag{6}$$

これが (i) の変換の形です。$r_i(t)$ は運動方程式に従った軌道で、$r'_i(t)$ はその軌道に a_i が加わった軌道です。なので、軌道そのものが平行移動して見えるだけのはずです。このとき、運動方程式は O, O' の座標系で同じになって

いる必要があります (これがガリレイの相対性原理)。実際にそう出来るのかを見ます。(ii) から (iv) の変換でもこの考え方に従っていきます。

位置の変換なので、力は $F_i(r)$ として位置の依存性だけを明確に書くことにします (変数のときは r_i でなく r と書きます)。

O の座標系での運動方程式

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i(r)$$

の左辺は時間微分がいるので定数があっても関係なしに

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(r_i + a_i) = \frac{d^2 r'_i}{dt^2}$$

一方で、力は位置の依存性を持てて、$F_i(r)$ と $F_i(r+a)$ は一般的に一致しません。なので、O, O' の座標系では一般的には関数形を変える必要があります。それを変換後の座標系での力 F'_i として、O' の座標系で

$$\frac{d^2 r'_i}{dt^2} = F'_i(r')$$

として運動方程式が成立しているとします。そうすると、運動方程式の左辺は r_i と r'_i の置き換えで形を変えないために

$$F_i(r) = \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{d^2 r'_i}{dt^2} = F'_i(r')$$

となり、同じ点での力は変換の前後で等しいことが要求されます。これによって、O, O' の座標系で運動方程式の形 (第二法則) は変更されずに成立します。

ここで、力は原点の移動で変わらないとし、$F_i(r) = F_i(r')$ としてみます。これは、O の座標系において、軌道 $r_i(t)$ の粒子（力 $F_i(r)$ が作用している）を $r'_i = r_i + a_i$ に平行移動したとき、力は $F_i(r')$ として作用するなら

$$F_i(r') = \frac{d^2 r'_i}{dt^2} = \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i(r)$$

となるからです。このとき、r_i, r'_i の運動方程式は同じなので (r_i に「$'$」がついているだけの同じ式)、粒子の軌道 (運動方程式の解) が同じです。ただし、原点 O から見て 2 つの軌道は片方の軌道に対して a_i だけ平行移動しています。これを原点の移動にも適用することで、原点の異なった座標系で同じ軌道となります (軌道は原点 O, O' から見た時とで a_i だけ平行移動している)。

$F_i(r) = F_i(r')$ が成立するのは F_i が定数の場合と、位置そのものでなく適当な位置 d_i との差 $r_i - d_i$ に依存しているときが考えられます。位置の差は $r_i - d_i = r_i + a_i - (d_i + a_i) = r'_i - d'_i$ となるからです。

というわけで、(6) の変換の前後で運動方程式は

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i(r - d)\ ,\ \frac{d^2 r'_i}{dt^2} = F_i(r' - d')$$

となり、式として同じになります。実際に、2 つの物体間の重力はこのような形になっています。

このように平行移動で変更されないとき、空間は一様 (homogeneous) と言われます。一様は空間に特別な位置がないこと（空間上のどの位置も同じ性質を持つこと）を意味しています。

次に (ii) の時間軸の平行移動を見ます。これは時間軸を設定し、それの原点を移動させたものです。例えば、縦軸を時間軸、横軸を位置とし、粒子の軌道 $r_i(t)$ を書き込んだとします。この軌道を縦軸の負の方向に s だけ移動させた原点から見た軌道 $r'_i(t+s)$ が変換したものです。なので、ベクトルの話とは無関係で、同じ地点を異なる時間で見るので $r_i(t) = r'_i(t+s)$ となるだけです。時間が定数ずれていても時間微分の変更に影響ないので、このときも運動方程式の左辺は等式です。なので、$F_i(r(t), t) = F'_i(r'(t'), t')$ $(t' = t+s)$ が要求されます。このため、式の状況としては (i) と同じです。力が t 依存性を持たなければ $F_i(r(t)) = F'_i(r'(t')) = F'_i(r(t))$ から ($r_i(t)$ は粒子の位置が時間依存していることを表し、今の力はその位置に依存する関数で、時間そのものに依存する関数ではない)、運動方程式は

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i(r(t)) \ , \ \frac{d^2 r'_i}{dt'^2} = F_i(r'(t'))$$

となり、変換前後で同じになります。力が時間とは無関係であることで、異なる時間で行った同じ実験が同じ結果を出すことなります。

そして、絶対時間の概念を使うなら意味のない変換です。絶対時間では、全ての慣性系で同じ時間 t です。このため、慣性系ごとに時間が異なるという設定は使われず、$t' = t$ のみが使われます ((i) から (iv) の変換は観測者の見方の変換なので、異なる慣性系にいる観測者と言える)。

(iii) は (i) と同じようになります。一定速度 V_i で座標軸を動かすので、平行移動と同じで基底ベクトルが変更されず原点が動きます。なので、定数のベクトル a_i を $V_i t$ に置き換えればよくて、変換は

$$r'_i(t) = r_i(t) + V_i t \tag{7}$$

変換前の原点 O に対して変換後の原点 O' が負の方向に一定速度 V_i で動いています ($t = 0$ ではお互いの原点は一致している)。これを時間微分すれば、速度 v_i の変換になり

$$v'_i = v_i + V_i \quad (v_i = \frac{dr_i}{dt},\ v'_i = \frac{dr'_i}{dt})$$

もう 1 回時間微分すれば

$$\frac{d^2 r'_i}{dt^2} = \frac{d^2 r_i}{dt^2}$$

となり、運動方程式の左辺は (i) のときと変わりません。よって、(i) と同じで

$$F_i = \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{d^2 r'_i}{dt^2} = F'_i$$

しかし、今の場合では速度も変換を受けているために、力が v に依存していれば $F_i(r, v), F'_i(r', v')$ なので、$F_i(r, v) = F_i(r', v')$ とします。v'_i は $v'_i = v_i + V_i$ なので、定数 V_i がいるだけです。このため、V_i が a_i と同じことになっているので、力は適当な速度 u_i との差 $v_i - u_i$ として依存している必要があります。

よって、F_i には v_i の依存性だけを書けば、(7) の変換の前後で運動方程式は

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i(v_i - u_i)\ ,\ \frac{d^2 r'_i}{dt^2} = F_i(v'_i - u'_i)$$

となり、同じになります。

(iv) は元の座標軸を回転させるので、基底ベクトルの変換になります。回転変換については下の補足で示しています。デカルト座標での 3 次元の回転は x_1, x_2, x_3 軸周りの回転から作られ、その回転させる直交行列を R とします (補足での $S^{(i)}$ を組み合わせたもの)。そうすると、基底ベクトルの変換は (3) から

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\boldsymbol{e}_j\ ,\ \boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^{3} (R^{-1})_{ij}\boldsymbol{e}'_j$$

となります。R^{-1} は R の逆行列です。

ベクトル成分の変換は (5) ですが、r'_i から r_i への変換として求めてみます。$\boldsymbol{r}$ を基底ベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ によって展開し、$\boldsymbol{e}'_i$ を変換によって $\boldsymbol{e}_i$ に戻せば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r'_1\boldsymbol{e}'_1 + r'_2\boldsymbol{e}'_2 + r'_3\boldsymbol{e}'_3 \\
&= r'_1\sum_{j=1}^{3} R_{1j}\boldsymbol{e}_j + r'_2\sum_{j=1}^{3} R_{2j}\boldsymbol{e}_j + r'_3\sum_{j=1}^{3} R_{3j}\boldsymbol{e}_j \\
&= r'_1(R_{11}\boldsymbol{e}_1 + R_{12}\boldsymbol{e}_2 + R_{13}\boldsymbol{e}_3) + \cdots \\
&= (r'_1R_{11} + r'_2R_{21} + r'_3R_{31})\boldsymbol{e}_1 + (r'_1R_{12} + r'_2R_{22} + r'_3R_{32})\boldsymbol{e}_2 + (r'_1R_{13} + r'_2R_{23} + r'_3R_{33})\boldsymbol{e}_3 \\
&= r_1\boldsymbol{e}_1 + r_2\boldsymbol{e}_2 + r_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

これと、R は直交行列なので逆行列 R^{-1} は R を転置した R^t であることを使えば ($R^t = R^{-1},\ R_{ij} = (R^t)_{ji} = (R^{-1})_{ji}$)

$$\begin{aligned}
r_1 &= r'_1R_{11} + r'_2R_{21} + r'_3R_{31} = \sum_{i=1}^{3} r'_iR_{i1} = \sum_{i=1}^{3} (R^{-1})_{1i}r'_i \\
r_2 &= r'_1R_{12} + r'_2R_{22} + r'_3R_{32} = \sum_{i=1}^{3} r'_iR_{i2} = \sum_{i=1}^{3} (R^{-1})_{2i}r'_i \\
r_3 &= r'_1R_{13} + r'_2R_{23} + r'_3R_{33} = \sum_{i=1}^{3} r'_iR_{i3} = \sum_{i=1}^{3} (R^{-1})_{3i}r'_i
\end{aligned}$$

となって、成分の変換が求まります。

回転の行列は時間依存性を持たないので、時間微分とは無関係で

$$F_i(r) = \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{j=1}^{3}(R^{-1})_{ij}r'_j = \sum_{j=1}^{3}(R^{-1})_{ij}\frac{d^2 r'_j}{dt^2} = \sum_{j=1}^{3}(R^{-1})_{ij}F'_j(r')$$

これから力には

$$F_i(r) = \sum_{j=1}^{3} (R^{-1})_{ij} F'_j(r')$$

が要求されます。$F_i(r)$ からの変換にするなら、両辺に R_{ki} をかけて和を取って

$$\sum_{i=1}^{3} R_{ki} F_i(r) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} R_{ki} (R^{-1})_{ij} F'_j(r') = \sum_{j=1}^{3} \delta_{kj} F'_j(r') = F'_k(Rr)$$

変数の r' の変換を Rr と書いています。これから

$$F'_k(Rr) = \sum_{i=1}^{3} R_{ki} F_i(r)$$

となります。

ここでも、座標軸を回転させる前の座標系において、軌道 r_i の位置では $F_i(r)$、r_i を回転させた軌道 $r'_i = \Sigma R_{ij} r_j$ では $F_i(r') = F_i(Rr)$ として作用しているとすれば、運動方程式は

$$F_i(r') = \frac{d^2 r'_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} \frac{d^2 r_j}{dt^2} = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} F_j(r)$$

なので、力は

$$F_i(Rr) = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} F_j(r)$$

これから運動方程式は、座標軸の回転の前後で

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i(r) \ , \ \frac{d^2 r'_i}{dt^2} = F_i(r')$$

となり、同じになります。

このように座標軸の回転に対して運動方程式が成立しているとき、空間は等方的 (isotropic) と呼ばれます。これは空間に特別な方向がないことを意味しています (回転させても見る方向が変わるだけで状況は変わらない)。

(i) から (iv) の変換全てを行うと

$$r'_i(t') = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} r_j(t) + V_i t + a_i$$

となり、このときの力は $F_i(r-d, v-u)$ となります。これを一般的なガリレイ変換と呼ぶこともあります。

見方を active point of view に変えた場合も見ておきます。すでに力の関数形を決めるために使ったように、粒子が動いたと見ることでも同じ変換になります。つまり、

(i) 粒子の位置を平行移動

(ii) 粒子の時間を平行移動

(iii) 粒子を一定速度で動かす

(iv) 粒子の位置を回転

という変換です。粒子の位置が変わるために、変換前の位置ベクトル r_i と変換後の位置ベクトル r'_i は異なった点をさします (passive point of view では位置ベクトル r_i, r'_i は同じ点をさしている)。簡単に言えば、変換の前後で、観測者の位置 (座標系) が変わり粒子の位置が変わらないのが passive point of view、観測者の位置が変わらず粒子の位置が変わるのが active point of view です。

2 つの視点が同じことは (i) や (ii) が分かりやすく、観測者が平行移動することと粒子の軌道が平行移動することとは状況として同じです。実際に、粒子の軌道が原点にいる観測者から a_i だけ平行移動しているなら、変換後の軌道は

$$r'_i = r_i + a_i$$

となり、原点を移動させるときと同じ変換です。ただし、原点の移動として見るときは原点の $-a_i$ の平行移動、粒子の平行移動として見るときは粒子の $+a_i$ の平行移動です。(iii) も動かし方は平行移動と同じなので、原点が $-V_i t$ で動いているとした場合が粒子が $+V_i t$ で動く場合に対応します。

回転変換は基底ベクトルの変換として導入しましたが、この見方だと粒子の位置が変わるので基底ベクトルの変換ではなくなります。

x_3 軸周りの回転とし、x_1x_2 平面の回転とします。位置ベクトル r_i は、x_1 軸との間の角度を θ とすれば

$$r_1 = |\boldsymbol{r}|\cos\theta \ , \ r_2 = |\boldsymbol{r}|\sin\theta$$

これを左方向に φ 回転させたものを r'_i とします。そうすると、回転させるだけなのでベクトルの大きさは変更されないことから

$$r'_1 = |\boldsymbol{r}|\cos(\theta+\varphi) = |\boldsymbol{r}|(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) = r_1\cos\varphi - r_2\sin\varphi$$

$$r'_2 = |\boldsymbol{r}|\sin(\theta+\varphi) = |\boldsymbol{r}|(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) = r_2\cos\varphi + r_1\sin\varphi$$

今のように $+\varphi$ 回転させると x_1 軸から離れる回転です。一方で、座標軸を $+\varphi$ 回転させた場合は粒子の位置が x_1 軸に近づく回転です。なので、$-\varphi$ 回転させるようにすれば

$$r'_1 = r_1\cos(-\varphi) - r_2\sin(-\varphi) = r_1\cos\varphi + r_2\sin\varphi$$

$$r'_2 = r_1\sin(-\varphi) + r_2\cos(-\varphi) = -r_1\sin\varphi + r_2\cos\varphi$$

となって、基底ベクトルを変換したときの成分の変換 (8) と一致します。回転の場合も 2 つの見方で、回転の方向が反対になります。

ついでの話として、等価原理を見ておきます。原点を O とするデカルト座標と、これに対して一定の加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ で動いてる原点を O' とするデカルト座標を用意します。それぞれを O 系、O' 系とします。O からの粒子の位置を $\boldsymbol{r}$、O' からの粒子の位置を $\boldsymbol{r}'$ とし、O' は O から $\boldsymbol{R}(t)$ の位置にいるとします。そうすると粒子の位置 $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{r}'(t)$ なので

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}$$

$\boldsymbol{R}(t)$ は O から離れていく O' の位置ベクトルなので、2 回微分すれば加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ になります。ここで、O 系での運動方程式を

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

とすれば、O' 系では

$$m\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - m\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\alpha}$$

O' 系は加速しているために慣性系ではないので、慣性力 $m\boldsymbol{\alpha}$ が現れています。ここで、力が重力によるものとして、万有引力の法則から $\boldsymbol{F} = m_g\boldsymbol{g}$ とします (「運動の法則」参照)。m_g は粒子の重力質量 (m は慣性質量)、$\boldsymbol{g}$ は重力加速度に方向を付けたベクトルです。そうすると、O' 系の運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = m_g\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{\alpha}$$

ここで、等価原理から $m_g = m$ とすれば

$$m\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\alpha})$$

もし $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\alpha}$ なら右辺は 0 になり、等速直線運動の運動方程式となります。これから、O' 系において重力は O 系に対する加速度によって消せると言えます。この結果を考察していくことでアインシュタインの等価原理が出てきます。

・補足

デカルト座標での基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$、これらの基底ベクトルを回転させた基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とします。回転は、x_3 軸周りに左に φ 回転させます (x_1 軸から x_2 軸の方向。反時計周り)。x_3 軸周りなので、x_1 軸と x_2 軸による 2 次元平面上での $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の回転を見ます。このとき、$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{e}'_2$ の間の角度は両方とも φ です。

$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ は、$\boldsymbol{e}_3$ は変更されず、2 次元平面上なので

$$\boldsymbol{e}'_1 = S_{11}\boldsymbol{e}_1 + S_{12}\boldsymbol{e}_2 + S_{13}\boldsymbol{e}_3 = S_{11}\boldsymbol{e}_1 + S_{12}\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{e}'_2 = S_{21}\boldsymbol{e}_1 + S_{22}\boldsymbol{e}_2 + S_{23}\boldsymbol{e}_3 = S_{21}\boldsymbol{e}_1 + S_{22}\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{e}'_3 = S_{31}\boldsymbol{e}_1 + S_{32}\boldsymbol{e}_2 + S_{33}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$$

となります。$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ は $\boldsymbol{e}_1$ 方向のベクトルと $\boldsymbol{e}_2$ 方向のベクトルの和です。

あるベクトル $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$$

となる $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ があるとし、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ は直交しており、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度を ϕ とします ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ による直角三角形)。このときそれぞれの長さは

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cos\phi \ , \ |\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}| \sin\phi$$

これらを今の場合に合わせれば、$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{e}_1'$、$\boldsymbol{B}$ の方向は $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{C}$ の方向は $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の間の角度が φ なので

$$\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{e}_1 = |\boldsymbol{A}| \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 \ , \ \boldsymbol{C} = |\boldsymbol{C}|\boldsymbol{e}_2 = \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 \quad (|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{e}_1'| = 1)$$

から

$$\boldsymbol{e}_1' = S_{11}\boldsymbol{e}_1 + S_{12}\boldsymbol{e}_2 = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2$$

となります。$\boldsymbol{e}_2'$ では、$\boldsymbol{B}$ の方向が $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{C}$ の方向が $-\boldsymbol{e}_1$ になるだけなので、同様にして

$$\boldsymbol{e}_2' = S_{21}\boldsymbol{e}_1 + S_{22}\boldsymbol{e}_2 = -\sin\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2$$

これらによる $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ と $\boldsymbol{e}_3$ が、x_3 軸周りに角度 φ だけ回転させたときの座標系の基底ベクトルです。そして、このときの変換は

$$S_{11} = \cos\varphi \ , \ S_{12} = \sin\varphi \ , \ S_{13} = 0$$

$$S_{21} = -\sin\varphi \ , \ S_{22} = \cos\varphi \ , \ S_{23} = 0$$

$$S_{31} = 0 \ , \ S_{32} = 0 \ , \ S_{33} = 1$$

によって与えられます。

$\boldsymbol{e}_1'$ に $\sin\varphi$、$\boldsymbol{e}_2'$ に $\cos\varphi$ かけて足せば

$$\sin\varphi \boldsymbol{e}_1' + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2' = \sin\varphi\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin^2\varphi \boldsymbol{e}_2 - \sin\varphi\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \cos^2\varphi \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$$

$\boldsymbol{e}_1'$ に $\cos\varphi$、$\boldsymbol{e}_2'$ に $\sin\varphi$ かけて引けば

$$\cos\varphi \boldsymbol{e}_1' - \sin\varphi \boldsymbol{e}_2' = \cos^2\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 + \sin^2\varphi \boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\cos\varphi \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1$$

よって、$\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ から変換したときは

$$\boldsymbol{e}_1 = T_{11}\boldsymbol{e}_1' + T_{12}\boldsymbol{e}_2' = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1' - \sin\varphi \boldsymbol{e}_2' \ , \ \boldsymbol{e}_2 = T_{21}\boldsymbol{e}_1' + T_{22}\cos\varphi = \sin\varphi \boldsymbol{e}_1' + \cos\varphi \boldsymbol{e}_2'$$

$S_{11} = T_{11},\ S_{22} = T_{22},\ S_{12} = T_{21},\ S_{21} = T_{12}$ です ($S_{33} = T_{33} = 1$、残りは両方とも 0)。

S と T は

$$\sum_{j=1}^{3} S_{1j}T_{j1} = S_{11}^2 - S_{12}T_{21} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$\sum_{j=1}^{3} S_{2j}T_{j2} = S_{21}T_{12} + S_{22}^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$\sum_{j=1}^{3} S_{1j}T_{j2} = S_{11}T_{12} + S_{12}T_{22} = -\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

のようになっているので

$$\sum_{j=1}^{3} S_{ij}T_{jk} = \delta_{ik}$$

から、T は S の逆行列 S^{-1} です。そして、$S_{12} = T_{21}, S_{21} = T_{12}$ から、S を転置すれば T になります ($S_{ij} = T_{ji},\ (S^t)_{ij} = T_{ij} = (S^{-1})_{ij}$)。転置した S^t が逆行列 S^{-1} なので、S は直交行列です。

ベクトルの成分の変換を見てみます。任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して今の結果を入れると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3 \\
&= A_1(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1' - \sin\varphi\boldsymbol{e}_2') + A_2(\sin\varphi\boldsymbol{e}_1' + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2') + A_3\boldsymbol{e}_3' \\
&= A_1\cos\varphi\boldsymbol{e}_1' - A_1\sin\varphi\boldsymbol{e}_2' + A_2\sin\varphi\boldsymbol{e}_1' + A_2\cos\varphi\boldsymbol{e}_2' + A_3\boldsymbol{e}_3' \\
&= (A_1\cos\varphi + A_2\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1' + (-A_1\sin\varphi + A_2\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2' + A_3\boldsymbol{e}_3' \\
&= A_1'\boldsymbol{e}_1' + A_2'\boldsymbol{e}_2' + A_3'\boldsymbol{e}_3'
\end{aligned}$$

A_1', A_2' が回転後の座標系でのベクトルの成分です。よって、ベクトルの成分は

$$\begin{aligned}
A_1' &= A_1\cos\varphi + A_2\sin\varphi = S_{11}A_1 + S_{12}A_2 \\
A_2' &= -A_1\sin\varphi + A_2\cos\varphi = S_{21}A_1 + S_{22}A_2 \\
A_3' &= A_3
\end{aligned} \tag{8}$$

と変換されています。よって、上で示したように、基底ベクトルが直交し、大きさが 1 のとき、変換の行列 S は直交行列で、基底ベクトルとベクトル成分の変換が同じ形で行われます。

x_3 軸周りの回転で見てきましたが、他にも x_1 軸、x_2 軸周りでも回転は行えるので、それらの回転行列も必要になります。しかし、x_1 軸周りでは x_2x_3 平面、x_2 軸周りでは x_1x_3 平面上での回転となり、結局は同じことをするだけです (どれも反時計周りの回転)。

x_j 軸周りで回転させたときの基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_i^{(j)}$、S_{ik} を $S_{ik}^{(j)}$ と書くことにします (x_2 軸周りで回転させたなら $\boldsymbol{e}_i^{(2)}, S_{ik}^{(2)}$)。$x_1$ 軸周りのときの $\boldsymbol{e}_i^{(1)}$ は x_3 軸周りでの $\boldsymbol{e}_i^{(3)}$ と、$\boldsymbol{e}_1^{(1)}$ が $\boldsymbol{e}_3^{(3)}$、$\boldsymbol{e}_2^{(1)}$ が $\boldsymbol{e}_1^{(3)}$、$\boldsymbol{e}_3^{(1)}$ が $\boldsymbol{e}_2^{(3)}$ として対

応するので、その対応を取ればいいだけです。x_3 軸周りの時の $S^{(3)}_{ij}$ を、x_1 軸周りでの $S^{(1)}_{ij}$ にするには、成分を (i,j) と書けば

$$(1,1) \Rightarrow (2,2)\ ,\ (1,2) \Rightarrow (2,3)\ ,\ (1,3) \Rightarrow (2,1)$$

$$(2,1) \Rightarrow (3,2)\ ,\ (2,2) \Rightarrow (3,3)\ ,\ (2,3) \Rightarrow (3,1)$$

$$(3,1) \Rightarrow (1,2)\ ,\ (3,2) \Rightarrow (1,3)\ ,\ (3,3) \Rightarrow (1,1)$$

と置き換えればいいです ($S^{(3)}_{11} = S^{(1)}_{22}, \ldots$)。$x_2$ 軸周りでは、$\boldsymbol{e}^{(2)}_1$ が $\boldsymbol{e}^{(3)}_2$、$\boldsymbol{e}^{(2)}_2$ が $\boldsymbol{e}^{(3)}_3$、$\boldsymbol{e}^{(2)}_3$ が $\boldsymbol{e}^{(3)}_1$ と対応するので

$$(1,1) \Rightarrow (3,3)\ ,\ (1,2) \Rightarrow (3,1)\ ,\ (1,3) \Rightarrow (3,2)$$

$$(2,1) \Rightarrow (1,3)\ ,\ (2,2) \Rightarrow (1,1)\ ,\ (2,3) \Rightarrow (1,2)$$

$$(3,1) \Rightarrow (2,3)\ ,\ (3,2) \Rightarrow (2,1)\ ,\ (3,3) \Rightarrow (2,2)$$

というわけで、それぞれの回転は行列の形で書けば (x_i 軸周りの回転行列 $S^{(i)}$)

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\ ,\ S^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}\ ,\ S^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定義上の注意ですが、sin の符号が逆になっているときがあります (S でなく T の方、もしくは回転の方向を逆に取っている)。これら 3 つの回転を角度を変えて組み合わせれば (例えば、$S^{(1)}$ で回転させた後の座標軸を新しい $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とし、それに対して $S^{(3)}$ で回転させるといったことを繰り返せばいい。なので、複数の回転は積によって $S = S^{(3)}S^{(1)}$ のようになる)、3 次元空間上で任意の回転を起こせます。なので、一般的に回転させると言ったときは、回転の行列を適当に組み合わせた R によって、$\boldsymbol{e}'_i = \Sigma R_{ij}\boldsymbol{e}_j$ のように書かれます。

任意の地点への回転行列を作ります。回転は距離を変えずに別の地点へ行くことなので、球上の任意の地点へ行けるようにすればいいです。なので、球上の適当な点のベクトル $\boldsymbol{a} = (x_0, y_0, z_0)$ が球面を描くように動かせばいいです。これは簡単で、まず z 軸周りで回転させます。これで z_0 の球面上の円周を描きます。次に x 軸周りに回転させて z_1 に移動させて、そこで z 軸周りに回転させれば z_1 の球面上の円周の位置に行けます。これを繰り返せば $\boldsymbol{a}$ は球面を描きます。つまり、、z, x, z 軸周りで回転させることで、球上の任意の地点へ行けます。

もう少し想像しやすく言うと、まず z 軸周りに回転させて $(0, y_1, z_0)$ に移動し、その次に x 軸周りに回転させて $(0, y_2, z)$ に移動させ、そこから z 軸周りに回転させることで球上の任意の地点に行けるということです。

というわけで、一般的な回転行列 R とするには z, x, z 軸周りの回転として組み合わせとして

$$\begin{aligned} R &= S^{(3)}(\psi)S^{(1)}(\theta)S^{(3)}(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$