

単振り子での摂動展開

非線形な微分方程式を摂動展開で解く例として単振り子を見ていきます。摂動展開で解いていくだけなので、非線形振動の物理的な話はしていません。
摂動展開の話は数学での「非線形微分方程式」を見てください。

非線形な振動の問題としては、「単振り子」で出した (l は紐の長さ、 g は重力)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \theta \quad (\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}})$$

これが最初によく出てきます。これは第1種完全楕円積分によって厳密に解け、それによって非線形振動の振る舞いを見ることができます。しかし、ここでは近似的に解く方法を見ていきます。

まず、 $\sin \theta$ の展開は

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$$

となっているので、方程式を

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \epsilon \omega_0^2 x^3 = 0 \quad (1)$$

と書き直します (θ を x と書き直している)。これは Duffing 方程式と呼ばれています。 x^3 の項が非線形項で、 $\epsilon = 0$ ならよくある単振り子の方程式になります。 $\epsilon = 0$ のときの解は

$$x(t) = a \cos \omega_0 t \quad (2)$$

初期条件は

$$x(t=0) = a, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad (3)$$

としています。

ここで数学での「非線形微分方程式」での摂動展開をします。 ϵ が小さいとして ((2) の非線形項の寄与は小さいとする)、 $x(t)$ を

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$$

と展開します。 ϵ の2次の項までも見ることにして、これを (1) に入れば

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x_0}{dt^2} + \epsilon \frac{d^2x_1}{dt^2} + \epsilon^2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2(x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t)) \\ &\quad - \epsilon \omega_0^2(x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t))^3 \\ &\simeq \frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega_0^2 x_0 + \epsilon \frac{d^2x_1}{dt^2} + \epsilon \omega_0^2 x_1 - \epsilon \omega_0^2 x_0^3 + \epsilon^2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + \epsilon^2 \omega_0^2 x_2 - 3\epsilon^2 \omega_0^2 x_0^2 x_1 \end{aligned}$$

これから、 ϵ のオーダー (次数) ごとに式を取り出すと

$$\epsilon^0 : \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\epsilon^1 : \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_0^3 = 0$$

$$\epsilon^2 : \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 - 3\omega_0^2 x_0^2 x_1 = 0$$

$\epsilon = 0$ のときの解が (2) で与えられていて、今は非線形項からの寄与は小さいとしているので、(1) の解に含まれる振動数 ω も ω_0 によって

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots$$

と展開できると考えます。これを式の中に入れるために、 t を $t' = \omega t$ と変換して

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt'} = \omega \frac{d}{dt'}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \Rightarrow \frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt'} \right) = \omega^2 \frac{d^2}{dt'^2}$$

とすることで ϵ^0 のオーダの式は

$$\frac{d^2 x_0}{dt'^2} + \omega_0^2 x_0 = \omega^2 \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + \omega_0^2 x_0 = (\omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)^2 \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + \omega_0^2 x_0$$

ϵ^1 は

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{d^2 x_1}{dt'^2} + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_0^3 \right) &= \epsilon \left(\omega^2 \frac{d^2 x_1}{dt'^2} + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_0^3 \right) \\ &= \epsilon \left((\omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)^2 \frac{d^2 x_1}{dt'^2} + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_0^3 \right) \end{aligned}$$

ϵ^2 は

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \left(\frac{d^2 x_2}{dt'^2} + \omega_0^2 x_2 - 3\omega_0^2 x_0^2 x_1 \right) &= \epsilon^2 \left(\omega^2 \frac{d^2 x_2}{dt'^2} + \omega_0^2 x_2 - 3\omega_0^2 x_0^2 x_1 \right) \\ &= \epsilon^2 \left((\omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)^2 \frac{d^2 x_2}{dt'^2} + \omega_0^2 x_2 - 3\omega_0^2 x_0^2 x_1 \right) \end{aligned}$$

ここからまた ϵ のオーダで分ければ

$$\epsilon^0 : \omega_0^2 \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\epsilon^1 : \omega_0^2 \frac{d^2 x_1}{dt'^2} + 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_0^3 = 0$$

$$\epsilon^2 : \omega_0^2 \frac{d^2 x_2}{dt'^2} + 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 x_1}{dt'^2} + \omega_1^2 \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + 2\omega_0\omega_2 \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + \omega_0^2 x_2 - 3\omega_0^2 x_0^2 x_1 = 0$$

これから $x(t)$ を求めるには、 ϵ^0 の式から x_0 の解、その解を ϵ^1 の式に入れて x_1 の解、…として求めていけばいいです。 x_0 の解は単純に

$$x_0(t) = a \cos \omega t \quad (t' = \omega t)$$

初期条件は (3) です。これを ϵ^1 の式に入れて

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x_1}{dt'^2} + 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + x_1 - x_0^3 \\ &= \frac{d^2 x_1}{dt'^2} - 2a \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos t' + x_1 - a^3 \cos^3 t' \\ \frac{d^2 x_1}{dt'^2} + x_1 &= 2a \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos t' + a^3 \cos^3 t' \\ &= 2a \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos t' + \frac{a^3}{4} (\cos 3t' + 3 \cos t') \quad (\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta)) \\ &= (2a \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{3a^3}{4}) \cos t' + \frac{a^3}{4} \cos 3t' \end{aligned} \quad (4)$$

これは非同次の線形微分方程式です。線形方程式なので、この方程式の解は

$$\frac{d^2 x_1}{dt'^2} + x_1 = (2a \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{3a^3}{4}) \cos t' \quad (5a)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt'^2} + x_1 = \frac{a^3}{4} \cos 3t' \quad (5b)$$

としたときの、2つの解の和とすることができます。単純に言えば、この2つの方程式を足せば元の方程式に戻るからというだけです。このとき、1番目の方程式 (5a) は、「減衰振動・強制振動」で力を $F \cos(\omega t)$ と加えたのと同じです。そのとき、解は

$$x = A \cos(\Omega_0 t + \alpha) + \frac{F}{m} \frac{1}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) \quad (m \frac{d^2 x}{dt^2} + m \Omega_0^2 x = F \cos(\Omega t)) \quad (6)$$

と求められました (A, α は定数)。第一項は同次での解、第二項が特解です。 F の形自体はどうでもよくて、注意すべきなのは $\cos(\Omega t)/(\Omega_0^2 - \Omega^2)$ 部分です。今は $\Omega = \Omega_0$ の場合なので、 $\cos(\Omega t)/(\Omega_0^2 - \Omega^2)$ は発散しています。なので、この場合を知るにはこの解ではなく、さらに抵抗を加えた

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F \cos(\omega t) \quad (7)$$

に対する解で $\gamma = 0$ として求める必要があります。しかし、大雑把に知ることはできるので、(6) を使ってしまします。簡単にするために初期条件として

$$x(t=0) = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

とすれば

$$A = -\frac{F}{m} \frac{1}{\Omega_0^2 - \Omega^2}, \quad \alpha = 0$$

となります。これから

$$x = \frac{F}{m} \frac{1}{\Omega_0^2 - \Omega^2} (\cos(\Omega t) - \cos(\Omega_0 t))$$

$\Omega = \Omega_0 + \epsilon$ として展開すれば ($\epsilon t \ll 1$)

$$\cos(\Omega t) - \cos(\Omega_0 t) \simeq \cos(\Omega_0 t) - \epsilon t \sin(\Omega_0 t) - \cos(\Omega_0 t) = -\epsilon t \sin(\Omega_0 t)$$

となるので

$$x \simeq -\frac{F}{m} \frac{\epsilon}{\Omega_0^2 - \Omega^2} t \sin(\Omega_0 t) = \frac{F}{m} \frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2} t \sin(\Omega_0 t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\Omega_0 + \Omega} t \sin(\Omega_0 t)$$

よって、 $\Omega \rightarrow \Omega_0$ の極限で t に比例することが分かり、時間が経過するにつれて振幅が大きくなることが分かります。(7) から同様の結果が出てきます。

今考えている状況は単振り子の運動なので、振幅が時間の経過でどこまでも大きくなるという状況は考えていません。というわけで、物理としての理由からこの解は消えるべきです。そのためには、方程式 (5a) が出てこなければいいと考えることで (右辺が 0 なら同次方程式になる)

$$2a \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{3a^3}{4} = 0$$

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} \omega_0 a^2$$

という条件を入れればいいです。これによって

$$\frac{d^2 x_1}{dt'^2} + x_1 = \frac{a^3}{4} \cos 3t'$$

の解だけを求めればいいことになります。これも同じように (6) が解なので、

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{a^3 \omega^2}{4} \frac{1}{(\omega^2 - 9\omega^2)} \cos(3\omega t)$$

$$= A \cos(\omega t + \alpha) - \frac{a^3}{32} \cos(3\omega t)$$

第一項は同次の解なので、これで (5b) の解になります。 $x(t)$ には初期条件 (3) があるので、それを満たすためには

$$x_1(t) = \frac{a^3}{32} (\cos t' - \cos 3t')$$

とする必要があります。これは $x_0(t)$ が初期条件 (3) を満たしているのので ($x_0(0) = a$)、 $x_1(t)$ は初期条件 $t = 0$ を入れたとき 0 にならないといけないからです。

摂動展開による解法は、解の精度（厳密解にどれだけ近づくか）は ϵ のオーダーをあげていくにつれてよくなっていくと期待して、後も同じように ϵ の次のオーダーの式に入れて解くというのを繰り返していきます。ここまで求めた状況は (ϵ^1 のオーダーまで)

$$x(t) \simeq a \cos \omega t + \epsilon \frac{a^3}{32} (\cos(\omega t) - \cos(3\omega t))$$

$$\omega \simeq \omega_0 - \epsilon \frac{3}{8} \omega_0 a^2 \quad (\omega_1 = -\frac{3}{8} \omega_0 a^2)$$

となっています。ちなみに、 ω の ϵ^2 のオーダーは ϵ^2 の式に x_0, x_1 を入れれば微分方程式を解かなくても求められます。 ϵ^2 の式は

$$0 = \frac{d^2 x_2}{dt'^2} + 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{d^2 x_1}{dt'^2} + \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + 2 \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + x_2 - 3x_0^2 x_1$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt'^2} + x_2 = -2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{d^2 x_1}{dt'^2} - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \frac{d^2 x_0}{dt'^2} - 2 \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{d^2 x_0}{dt'^2} + 3x_0^2 x_1$$

$$= \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{a^3}{16} (\cos t' - 9 \cos 3t') + a \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \cos t' + 2a \frac{\omega_2}{\omega_0} \cos t' + \frac{3a^5}{32} \cos^2 t' (\cos t' - \cos 3t')$$

$$= \left(\frac{a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} + a \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + 2a \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) \cos t' - \frac{9a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos 3t' + \frac{3a^5}{32} \cos^2 t' (\cos t' - \cos 3t')$$

第三項は

$$\begin{aligned} \cos^2 t' (\cos t' - \cos(3t')) &= \cos^3 t' - \cos^2 t' \cos 3t' \\ &= \cos^3 t' - \cos^2 t' \cos 3t' \\ &= \cos^3 t' - \cos^2 t' (4 \cos^3 t' - 3 \cos t') \\ &= \cos^3 t' - 4 \cos^5 t' + 3 \cos^3 t' \\ &= 4(\cos^3 t' - \cos^5 t') \\ &= 4 \left(\frac{1}{4} (3 \cos t' + \cos 3t') - \frac{1}{16} (10 \cos t' + 5 \cos 3t' + \cos 5t') \right) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} + a \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + 2a \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) \cos t' - \frac{9a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos(3t') \\ &\quad + \frac{3a^5}{8} \left(\frac{1}{4} (3 \cos t' + \cos 3t') - \frac{1}{16} (10 \cos t' + 5 \cos 3t' + \cos 5t') \right) \\ &= \left(\frac{a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} + a \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + 2a \frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{3a^5}{64} \right) \cos t' - \left(\frac{9a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{3a^5}{128} \right) \cos(3t') - \frac{3a^5}{128} \cos 5t' \end{aligned}$$

よって ϵ^2 のオーダーでは

$$\frac{d^2 x_2}{dt'^2} + x_2 = \left(\frac{a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} + a \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + 2a \frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{3a^5}{64}\right) \cos t' - \left(\frac{9a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{3a^5}{128}\right) \cos(3t') - \frac{3a^5}{128} \cos 5t'$$

これも ϵ^1 のオーダーでの式と同じ非同次の線形微分方程式です。ここでも第一項は (6) での第二項を作るようになっています。なので、この項が消える条件によって ω_2 が

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{16} \frac{\omega_1}{\omega_0} + a \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + 2a \frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{3a^5}{64} &= 0 \\ \frac{a^2}{16} \omega_1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_0} + 2\omega_2 + \frac{3a^4}{64} \omega_0 &= 0 \\ \omega_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{16} \omega_1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_0} + \frac{3a^4}{64} \omega_0 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{a^2}{16} \frac{3}{8} \omega_0 a^2 + \frac{1}{\omega_0} \frac{9}{64} \omega_0^2 a^4 + \frac{3a^4}{64} \omega_0 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{128} + \frac{9}{64} + \frac{3}{64} \right) a^4 \omega_0 \\ &= -\frac{21}{256} a^4 \omega_0 \end{aligned}$$

と求まります。そうすると、 ω は ϵ^2 のオーダーまでで

$$\omega \simeq \omega_0 - \epsilon \frac{3}{8} \omega_0 a^2 - \epsilon^2 \frac{21}{256} a^4 \omega_0$$

となるのが、方程式を解かなくても分かります。この結果は第1種完全楕円積分を使った厳密解と近似的に一致しています。

このように単振り子を摂動展開によって解いてきましたが、この方法を使うときに注意すべき問題があります。ここでは $x(t), \omega$ を摂動展開して解くときに、単振り子の振る舞いから、時間の経過で振幅が増えていく部分を消すようにしました。しかし、単振り子のことは忘れて単に微分方程式 (簡単にするために $\omega_0 = 1$ にして ω が出てこないようにします)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x - \epsilon x^3 = 0$$

を摂動展開で解こうとすると、解は

$$x(t) \simeq a \cos t + \epsilon \frac{a^3}{32} (\cos t - \cos 3t) - \epsilon \frac{3}{8} a^3 t \sin t \quad (8)$$

として出てきます。第三項は大雑把には、 ϵ^1 のオーダーの式

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 - a^3 \cos^3 t \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 &= -\frac{3}{4} a^3 \cos t + \frac{1}{4} a^3 \cos 3t \end{aligned}$$

での右辺第一項が、(1) から

$$\frac{F}{m} \frac{1}{\Omega_0 + \Omega} t \sin(\Omega_0 t) \Rightarrow -\frac{3}{4} \frac{1}{2} a^3 t \sin t = -\frac{3}{8} a^3 t \sin t \quad (\Omega = \Omega_0 = 1, F = -\frac{3}{4} a^3)$$

となることで出てきます。

この微分方程式の解として知りたいのは $x(t)$ が t によってどのように振舞うかです。 t の範囲は時間だと思えば $0 \sim \infty$ に取るので、解は t の $0 \sim \infty$ の範囲に対して意味のあるものでなければいけません。しかし、(8) は

$$\epsilon \frac{3}{8} a^3 t \sin t$$

という項のせいで、 $t \rightarrow \infty$ で発散してしまいます。尚且つ、 t が $1/\epsilon$ 程度になれば、この項は ϵ^1 のオーダーですらなくなります。これは摂動展開が破綻していることを意味していて (ただし $\epsilon t \ll 1$ なら成立している)、このように摂動展開を破綻させる項 (時間の増加によって解を増加させる項) のことを永年項 (secular term) と言います。この項があると摂動展開が破綻する理由を単純に言えば、摂動展開は ϵ のオーダーが低い項の寄与が大きいと考える (期待する) ので

$$O(\epsilon) > O(\epsilon^2) > O(\epsilon^3) > \dots$$

となるべきだからです。例えば、 ϵ^2 のオーダーの項 $O(\epsilon^2)$ に永年項があると ϵ^1 のオーダーの項 $O(\epsilon)$ よりも大きな寄与になってしまいます。上では永年項を物理的な要請から除外したということです。