中心力による運動

距離のみに依存している力が作用しているときの運動を扱います。最初は具体的な形を与えずに見ていき、後半で重力に対応する形を使います。
極座標は知っているとしています。また、円錐曲線が出てきますが、楕円、放物線、双曲線のことだと知っていれば十分です。

原点は 3 次元空間に固定され、力が作用している粒子の質量は m とします。力は原点と粒子を結ぶ直線に沿って作用し、その力は原点と粒子の距離 r にのみ依存しているとします。このような力を中心力 (central force) と言います。

力は粒子と原点を結ぶ直線に沿っているので、粒子の位置ベクトル (動径ベクトル) を $\boldsymbol{r}$ とすれば、力のベクトルは単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ ($|\boldsymbol{e}_r| = 1$) で与えられます。というわけで、粒子の運動方程式は、力の大きさを $F(r)$ として

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = F(r)\boldsymbol{e}_r \quad (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\boldsymbol{e}_r,\ r = |\boldsymbol{r}|) \tag{1}$$

となります。このときの保存量から見ていきます。

中心力は保存力になっていることを示します。適当な 2 点を P_1, P_2 とし、これらの点をつなぐ経路を C とします。経路 C を微小な区間 Δs_i に分割し、その区間のベクトルを $\Delta\boldsymbol{s}_i$ とすれば、線積分の定義から

$$\lim_{\Delta s\to 0}\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{F_i}\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i = \int_C d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{F} = \int_C ds\ \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{F}$$

$\boldsymbol{q}$ は曲線の単位接ベクトルです。経路 C を表す曲線を弧長 s によって $\boldsymbol{x}(s)$ と与えれば、$\boldsymbol{q}$ は曲線の接ベクトルなので

$$\boldsymbol{q} = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}$$

から

$$\int_C ds\ \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{F} = \int_C d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F}$$

曲線上の微小変化 $\Delta\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{F}$ の内積は、間の角度を θ とすれば

$$\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{x} = F(|\boldsymbol{x}|)|\Delta\boldsymbol{x}|\cos\theta$$

中心力なら $\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$) なので、$|\Delta\boldsymbol{x}|\cos\theta$ は $\boldsymbol{e}$ 方向の微小変化、つまり $|\boldsymbol{x}|$ の微小変化です (極座標で書けば分かりやすい)。そうすると、積分は

$$\int_C d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F} = \int_{P_1}^{P_2} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F} = \int_{x_1}^{x_2} d|\boldsymbol{x}|F(|\boldsymbol{x}|)$$

x_1, x_2 は経路 C の両端の位置です。よって、任意の経路に対して、その経路とは無関係の積分 (x_1 から x_2 への直線上の積分) になるので、中心力は保存力です (下の補足 1 で $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ を示している)。というわけで、ポテンシャル U を

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U$$

と与えられ、力学的エネルギーの保存が成立します。力学的エネルギーは後で触れます。

角運動量 (angular momentum) を導入します。運動方程式に $\boldsymbol{r}$ のベクトル積を作用させてみると

$$m\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = F(r)\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_r$$

右辺は、同じベクトルのベクトル積は 0 になることから

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = 0$$

なので

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = 0$$

となります。時間微分を「$\cdot$」で表して、粒子の速度ベクトルを $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ とすれば

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{v}} = 0$$

これの左辺は

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) - \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{l}$$

となるので、$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ は定数です。よって、$\boldsymbol{l}$ は今の運動（中心力が作用している運動）における保存量です。これに m をかけた $m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ を角運動量と言い、m は定数なので角運動量は保存量です。$m\boldsymbol{v}$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ にして、角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

と定義されます。ベクトル積なので $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$ の並びに注意してください。

重要なのは、角運動量はベクトルの計算から

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}) = 0 \quad (\boldsymbol{L} \neq 0)$$

となり、位置ベクトルと直交していることです。さらに、角運動量が保存していれば、角運動量は常に同じ方向を向きます。このため、角運動量が保存している粒子の運動は $\boldsymbol{L}$ に直交する 2 次元平面上に制限されます。

位置ベクトルは 2 次元平面にいるので、2 次元極座標で運動方程式を書いてみます (極座標については数学の「極座標」参照)。先に必要な量を求めておきます。デカルト座標での位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は xy 平面上にいるとすれば、2 次元極座標 (r, ϕ) によって

$$x = r\cos\phi \ , y = r\sin\phi$$

デカルト座標の基底 $\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0)$ と極座標の基底 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi$ $(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\phi = 0)$ は

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \cos\phi + \boldsymbol{e}_y \sin\phi \ , \ \boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x \sin\phi + \boldsymbol{e}_y \cos\phi$$

時間微分すると、ϕ が時間依存していることから

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_r &= \dot{\phi}(-\boldsymbol{e}_x \sin\phi + \boldsymbol{e}_y \cos\phi) = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi \\
\dot{\boldsymbol{e}}_\phi &= \dot{\phi}(-\boldsymbol{e}_x \cos\phi - \boldsymbol{e}_y \sin\phi) = -\dot{\phi}\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}$$

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は極座標では $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ なので、$\dot{\boldsymbol{r}}$ は

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}(r\boldsymbol{e}_r) = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

もう 1 回微分すれば

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi) &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\boldsymbol{e}}_\phi \\
&= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{r}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi - r\dot{\phi}^2\boldsymbol{e}_r \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned}$$

角運動量を極座標にすると

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = mr\boldsymbol{e}_r \times (\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi) = mr^2\dot{\phi}(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\phi) = mr^2\dot{\phi}\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{n}$ は

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\phi) = \dot{\boldsymbol{e}}_r \times \boldsymbol{e}_\phi + \boldsymbol{e}_r \times \dot{\boldsymbol{e}}_\phi = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_\phi - \dot{\phi}\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_r = 0$$

なので、角運動量保存から $mr^2\dot{\phi}$ は定数で

$$|\boldsymbol{L}| = mr^2\dot{\phi} \quad (|\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\phi| = |\boldsymbol{e}_r||\boldsymbol{e}_\phi| = 1)$$

と分かります。

中心力での運動方程式を極座標にします。中心力は保存力なので

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} \quad (\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \nabla)$$

となるポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ が存在します。中心力は $\boldsymbol{e}_r$ 方向しかないために、位置 $\boldsymbol{r}$ の偏微分も $\boldsymbol{e}_r$ 方向のみになって

$$F\boldsymbol{e}_r = -\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r$$

となり、$\boldsymbol{e}_\phi$ 方向の偏微分は出てきません。運動方程式の左辺は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi$$

なので、運動方程式は $\boldsymbol{e}_r$ の項と $\boldsymbol{e}_\phi$ の項によって

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} \tag{2a}$$

$$m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = 0 \tag{2b}$$

となります。(2b) は角運動量保存の式です。実際に角運動量保存は

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = 0$$

なので、(2b) と一致します。

(2a) を角運動量の大きさ $L = |\boldsymbol{L}| = mr^2\dot{\phi}$ によって

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = m(\ddot{r} - r(\frac{L}{mr^2})^2) = m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}$$

と書き換えると

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = & -\frac{\partial U}{\partial r} \\ m\ddot{r} = & -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{mr^3} \\ = & -\frac{\partial}{\partial r}(U + \frac{L^2}{2mr^2}) \end{aligned}$$

右辺はポテンシャル U が $U + L^2/2mr^2$ に置き換わっていると見えるので、これを新しく V とすれば

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \tag{3}$$

となり、r に対する 1 次元の運動方程式の形になります。このように 3 次元での中心力の運動方程式 (1) は 1 次元の運動方程式 (3) にまで変形できます。$L^2/2mr^2$ は遠心力ポテンシャル (centrifugal potential)、V は有効ポテンシャル (effective potential) と呼ばれます。有効ポテンシャルは、元々のポテンシャルに別の寄与が加わって作られるポテンシャルのことです。今の場合では、U は 3 次元運動方程式のポテンシャル、V はそれを変形していき 1 次元運動方程式の形にすることで導入されたポテンシャルです。

力学的エネルギーは運動エネルギーとポテンシャル U の和なので

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\boldsymbol{r}) \quad (v^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = |\dot{\boldsymbol{r}}|^2) \tag{4}$$

一方で、1 次元運動方程式 (3) での力学的エネルギーは

$$E' = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U$$

となりますが、これらは一致しています。このことは

$$m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 = m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi)\cdot(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi) = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2 = m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2}$$

から分かります。

また、運動エネルギーの関係は

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

これは極座標の関係を使わなくても求められます。内積とベクトル積は

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2 + (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2 = |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2$$

となることを使うと

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2 + (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})^2 = r^2v^2$$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2 + l^2 = r^2v^2 \quad (l = |\boldsymbol{l}|)$$

左辺第 1 項は

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}=r\dot{r}$$

なので

$$v^2=\dot{r}^2+\frac{l^2}{r^2} \tag{5}$$

これに $m/2$ をかければ

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{ml^2}{2r^2}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}\qquad(ml=L)$$

となり、同じ関係が導かれます。

求めたい r,ϕ は力学的エネルギーから計算できます。力学的エネルギーを変形させて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V(r)&=E\\
\dot{r}&=\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(r))}\\
\frac{dr}{dt}&=\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(r))}\\
dr&=\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(r))}dt\\
dt&=dr\frac{1}{\sqrt{2(E-V(r))/m}}\\
\int dt&=\int dr\frac{1}{\sqrt{2(E-V(r))/m}}
\end{aligned} \tag{6}$$

積分を実行すれば $t(r)$ が求まるので、そこから r が求まります。ϕ は角運動量から

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}&=\frac{L}{mr^2}\\
d\phi&=dt\frac{L}{mr^2}\\
\phi&=\int dt\frac{L}{mr^2}\\
&=\int dr\frac{L}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{2(E-V(r))/m}}
\end{aligned} \tag{7}$$

として求められます。後は F に具体的な形を与えればいいです。

ここでは、中心力として

$$\boldsymbol{F} = -F(r)\boldsymbol{e}_r = -\frac{\mu}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

とした場合を扱います。μ は正の定数として、$\boldsymbol{F}$ は原点へ向かうようにします (引力)。運動方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{\mu'}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (\mu' = \frac{\mu}{m}) \tag{8}$$

となり、ポテンシャル U は

$$-\frac{\mu}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r$$
$$U = -\frac{\mu}{r}$$

U が持つ任意定数は 0 になるように基準を選んだとしています。しかし、(6),(7) の積分を実行するのは大変なので (積分を公式扱いすればすぐ求まる)、別方向から見ていきます。

$\boldsymbol{r}/r$ の時間微分を持ち出します。これは

$$\frac{dr^2}{dt} = 2r\dot{r}\ ,\ \frac{dr^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\ \Rightarrow\ r\dot{r} = \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$

を使うと

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{r^3} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}r^2}{r^3} - \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{r^3} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{r^3}$$

ベクトルの関係

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

を使えば

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\boldsymbol{r}\times(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r})}{r^3} = \frac{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})}{r^3} = \frac{(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

ここに運動方程式 (8) を入れると

$$\mu'\frac{\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} = \mu'(\boldsymbol{l}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) = \boldsymbol{l}\times\frac{\mu'}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -\boldsymbol{l}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{l}$$

となることから

$$\mu'\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{l}$$

そして、$\boldsymbol{l}$ は保存量 $d\boldsymbol{l}/dt = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mu'\frac{\boldsymbol{r}}{r}) &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{l}) \\
\mu'\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \mu'\boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{l}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ は定数のベクトルです (積分定数)。さらに、これと $\boldsymbol{r}$ の内積をとると

$$
\begin{aligned}
\mu'(r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon}) &= \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{l}) \\
&= \boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})) \\
&= \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l} \\
r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon} &= \frac{l^2}{\mu'} \quad (l^2 = \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l})
\end{aligned} \tag{9}
$$

$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = r\epsilon\cos\alpha$ ($\epsilon = |\boldsymbol{\epsilon}|$) とすれば

$$
\begin{aligned}
r + r\epsilon\cos\alpha &= \frac{l^2}{\mu'} \\
r &= \frac{1}{1+\epsilon\cos\alpha}\frac{l^2}{\mu'}
\end{aligned} \tag{10}
$$

これから、r は ϵ を離心率 (eccentricity) とする円錐曲線 (conic section) の式になることが分かります。原点が焦点、α は真近点角 (true anomaly。原点と近点を繋いだ直線と r の間の角度。$\alpha = 0$ のとき r は最も小さくなるので $\boldsymbol{\epsilon}$ 上に近点がいる) になります。このため ϵ によって粒子の軌道は分類でき、軌道は ϵ に対してそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\epsilon = 0 &: \text{円} \\
0 < \epsilon < 1 &: \text{楕円} \\
\epsilon = 1 &: \text{放物線} \\
\epsilon > 1 &: \text{双曲線}
\end{aligned}
$$

となります。楕円のときケプラーの第一法則に対応します。また、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{l}$ は直交しているので

$$
\begin{aligned}
(\mu'\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \mu'\boldsymbol{\epsilon})^2 &= (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{l})^2 \\
\mu'^2(1+\epsilon^2+\frac{2}{r}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon}) &= v^2 l^2
\end{aligned}
$$

(4) と (9) を使うと

$$\mu'^2(1+\epsilon^2+\frac{2}{r}(\frac{l^2}{\mu'}-r)) = l^2\frac{2}{m}(E+U)$$

$$m\mu'^2(\epsilon^2-1-\frac{2}{r}\frac{l^2}{\mu'})+2ml^2\frac{\mu'}{r} = 2l^2E$$

$$\frac{m\mu'^2}{2l^2}(\epsilon^2-1) = E \tag{11}$$

これから、$\epsilon < 1$ のとき E は負、$\epsilon = 1$ のとき $E = 0$、$\epsilon > 1$ のとき E は正となることが分かります ($\epsilon = |\boldsymbol{\epsilon}| \geq 0$)。これは分かりやすい結果です。力学的エネルギーが負だと (4) から運動エネルギーはポテンシャルを超えられないために（正の運動エネルギーと負のポテンシャルの和が負になる領域に制限される)、束縛された運動をすることになり (r に上限がある)、それが円か楕円となります。

$\epsilon = 0$ とすると

$$r = \frac{l^2}{\mu'}$$

右辺は定数なので r も定数です。r が定数だと、(5) から

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} = \frac{l^2}{r^2} = \frac{\mu'^2}{l^2}$$

となり、速度も定数と分かるので等速円運動です。力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}m\frac{\mu'^2}{l^2} - m\frac{\mu'^2}{l^2} = -\frac{m}{2}\frac{\mu'^2}{l^2} = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{r}$$

となり、(11) と同じ結果が求まり、負になっていることが分かります。また、ポテンシャルも定数なので、ポテンシャルの定数の任意性から $-\mu/r$ を消せば運動エネルギーだけになります (円運動の方向と中心力は直交してるため円上での線積分は 0)。

運動方程式 (3) を解いても同じ結果が導けます。運動方程式は時間微分を含んでいますが、時間微分でなく ϕ 微分に変形します。そのために、運動方程式の解として $r(\phi)$ となるものがあると仮定します。実際に、$r(\phi)$ が解になることは (10) からすでに分かっています。

$r(\phi)$ とすると

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{r^2}\frac{dr}{d\phi} = -l\frac{d}{d\phi}\frac{1}{r} \qquad (l = r^2\dot{\phi})$$

さらに t 微分を行うと

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -l\frac{d}{dt}\frac{d}{d\phi}\frac{1}{r} = -l\frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi}\frac{d}{d\phi}\frac{1}{r} = -\frac{l^2}{r^2}\frac{d^2}{d\phi^2}\frac{1}{r}$$

$u = 1/r$ として

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -l^2u^2\frac{d^2u}{d\phi^2}$$

よって、運動方程式 (3) は

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2r}{dt^2} &= -(\frac{\mu}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}) \\
-ml^2u^2\frac{d^2u}{d\phi^2} &= -(\mu u^2 - \frac{L^2}{m}u^3) \\
-ml^2\frac{d^2u}{d\phi^2} &= -\mu + \frac{L^2}{m}u \\
\frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{\mu'}{l^2}
\end{aligned}
$$

これは非同次微分方程式です。なので、まずは同次での一般解を求めます。

同次のときは

$$
\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = 0
$$

となり、単振動の式と同じです。なので、三角関数によって

$$
u_1(\phi) = A\cos(\phi - \phi_0)
$$

A, ϕ_0 は定数です。非同次での特解 u_p は u が定数になる場合を使えばいいです。u が定数なら微分の項は消えるので

$$
u_p = \frac{\mu'}{l^2}
$$

となり、特解になります。

同次の一般解 u_1 と非同次の特解 u_p を足すことで、一般解は

$$
u(\phi) = \frac{\mu'}{l^2} + A\cos(\phi - \phi_0)
$$

となります。r に戻して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{\mu'}{l^2} + A\cos(\phi - \phi_0) \\
&= \frac{\mu'}{l^2}(1 + A\frac{l^2}{\mu'}\cos(\phi - \phi_0)) \\
r &= \frac{1}{1 + (Al^2/\mu')\cos(\phi - \phi_0)}\frac{l^2}{\mu'}
\end{aligned}
$$

よって、任意定数を

$$
\epsilon = \frac{Al^2}{\mu'}\ ,\ \alpha = \phi - \phi_0
$$

とすれば、(10) に一致します。

・補足 1

中心力のとき $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ になることを示します。中心力はデカルト座標で

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{F(r)}{r}(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$
$$\nabla \times \boldsymbol{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})$$

偏微分は

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{F(r)}{r}z) = z\frac{\partial}{\partial y}\frac{F(r)}{r} = z\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{dr}\frac{F(r)}{r} = \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\frac{d}{dr}\frac{F(r)}{r}$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{F(r)}{r}y) = y\frac{\partial}{\partial z}\frac{F(r)}{r} = y\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d}{dr}\frac{F(r)}{r} = \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\frac{d}{dr}\frac{F(r)}{r}$$

よって

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$$

他も同様なので、中心力のとき $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ です。

・補足 2

角運動量保存は位置ベクトルが描く領域の面積と対応させられます。時間 t と時間 $t + \Delta t$ での位置ベクトルを考え、Δt は十分小さいとし、$\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$ の間は微小な角度 $\Delta\phi$ とします。$t = 0$ の位置から $\boldsymbol{r}(t)$ まで動いたとき、$\boldsymbol{r}(t)$ の移動によって描かれる領域 (例えば r が定数なら角度 ϕ の円弧の領域) の面積を $S(t)$ とします。同様に $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$ の場合を $S(t + \Delta t)$ とします。$S(t + \Delta t)$ と $S(t)$ の差 ΔS は、$\Delta\phi$ は微小としているので、$\boldsymbol{r}(t)$ と $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ による平行四辺形の面積の半分で近似できます。なので、

$$\Delta S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{r}|$$

両辺を Δt で割れば

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{r}|\frac{1}{\Delta t}$$
$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}|$$
$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}|$$
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|$$
$$= \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$$

$|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{l}|$ なので、角運動量が保存しているなら

$$\frac{dS}{dt} = const$$

となります。このように角運動量が保存されている運動において、位置ベクトルが動くことによって描かれる領域の面積変化は一定です。dS/dt を面積速度 (area velocity) と呼び、この結果は面積速度が一定ということです。これはケプラーの第二法則に対応します。