3 次元波動方程式

3 次元 (4 変数) での波動方程式を spherical means によって求めます。

3 次元波動方程式の解を求めるための準備が必要なので、先にそれらを導出しておきます。n 次元にした話をするところから太字でない x をベクトルとして書いているので注意してください。
初期条件を関数 f, g で与え、$u(x,t)$ $(t \geq 0)$ の 1 次元波動方程式による

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0 \quad (0 < x < \infty,\ t > 0) \tag{1a}$$

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \quad (x \geq 0) \tag{1b}$$

$$u(0,t) = 0 \quad (t > 0) \tag{1c}$$

という初期境界値問題を解きます。最後の $u(0,t) = 0$ が境界条件です。これは「1 次元波動方程式」での x の範囲を $0 < x < \infty$ に変更し、境界条件を加えたものです。
これを解くために、さらに

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}(x,t) = 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0)$$
$$\tilde{u}(x,0) = f(x)\ ,\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \quad (x \geq 0)$$
$$\tilde{u}(x,0) = -f(-x)\ ,\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}|_{t=0} = -g(-x) \quad (x < 0)$$

という初期値問題を作ります。この解の $0 \leq x < \infty$ は初期境界値問題の解になります。実際に、$\tilde{u}$ は $u(x,t)$ の 1 次元波動方程式と初期条件 (1a),(1b) を満たしているのが式の形から分かります。残っている境界条件 (1c) を満たすこともすぐ分かります。波動方程式は x の符号と $\tilde{u}$ の符号を変えても変更されないので

$$\tilde{u}(x,t) = -\tilde{u}(-x,t)$$

となり、$x = 0$ では

$$\tilde{u}(0,t) = -\tilde{u}(0,t)$$

なので

$$\tilde{u}(0,t) = 0$$

となって、境界条件となります。
そうすると、$\tilde{u}$ では $-\infty < x < \infty$ なので、ダランベールの公式から

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{f(x+vt)+f(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} ds\ g(s)$$

となります。これを $0 \leq x < \infty$ に制限すると、$u(x,t)$ になります。よって、$x \geq 0,\ x < 0$ で f, g は符号が変わることから、初期境界値問題の解 u は、$0 \leq vt \leq x$ では

$$u(x,t) = \frac{f(x+vt)+f(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} ds\ g(s) \tag{2a}$$

$0 \leq x \leq vt$ では

$$u(x,t) = \frac{f(vt+x)-f(vt-x)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{vt-x}^{vt+x} ds\ g(s) \tag{2b}$$

となります。積分範囲は

$$\int_0^{x-vt} ds\ g(s) = -\int_0^{-x+vt} ds\ g(-s) = \int_0^{vt-x} ds\ g(s)$$

となるからです。

次の関係を出す前にここでの n 次元の表記を与えておきます。ここから、n 次元ユークリッド空間の n 次元ベクトルを $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とします。ベクトルを太字にしないのでスカラーとの区別に注意してください。∇_x は

$$\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$$

となります。

n 次元ベクトル x を変数に持つ関数 $w(x)$ を用意し、これを

$$W(r; x_0) = \frac{1}{\Omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,r)} dS_y\ w(y) \quad (|y-x_0| = r) \tag{3}$$

と積分した $W(r; x_0)$ を定義します。$\partial B(x_0, r)$ は中心を x_0 とする半径 r の球の表面、dS_y は $\partial B(x_0, r)$ での面積分、Ω_n は n 次元の単位球の表面積です ($n = 3$ なら 4π)。$|\ |$ は n 次元ベクトルの大きさです。また、$B(x_0, r)$ を中心を x_0 とする半径 r の球を表すことにします。なので、この積分は球の表面 $\partial B(x_0, r)$ による $w(x)$ の平均になっています。このように球の平均を使うので spherical means と呼ばれます。

相対論の表記に慣れてる人は混乱するかもしれませんが x_0 は n 次元ベクトルの x の 0 成分という意味ではなく、n 次元ベクトル x_0 の意味です。

$W(r; x_0)$ の $r \to 0$ の極限を取れば、球は点になるので

$$\lim_{r\to 0} W(r; x) = w(x) \tag{4}$$

となります。

$W(r; x_0)$ は $y = x_0 + rz$ によって半径 $|z| = 1$ の単位球での平均の形にできて

$$W(r; x_0) = \frac{1}{\Omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,r)} dS_y\ w(y) = \frac{1}{\Omega_n}\int_{|z|=1} dS_z\ w(x_0 + rz) \tag{5}$$

と書けます。

$\nabla^2 W(r;x)$ を求めます。$\nabla^2 W$ と十分遠方と原点付近で 0 になる関数 $\psi(x)$ との積に対する n 次元の全空間積分 (n 次元での $-\infty$ から $+\infty$ の積分)

$$I=\int d^nx\ \psi(x)\nabla_x^2W(r;x)=\int_V dV\ \psi(x)\nabla_x^2W(r;x)$$

を考えます。V は n 次元の閉じた領域で、dV は n 次元体積積分です。∇_x^2 は x での偏微分を表しますが、混乱は起きないはずなので x を省きます。微分を変形させて

$$I=\int_V dV\ \psi\nabla^2W=\int_V dV\ (\nabla\cdot(\psi\nabla W)-\nabla\psi\cdot\nabla W)$$

ガウスの定理から、右辺第一項は S を V の表面、n をその表面の外向きの単位法線ベクトルとして

$$\int_V dV\ \nabla\cdot(\psi\nabla W)=\int_S dS\ n\cdot\psi\nabla W$$

と出来ます。$\psi(x)$ は十分遠方で 0 としているので、右辺の表面積分は 0 です。よって

$$I=\int_V dV\ \psi\nabla^2W=-\int_V dV\ \nabla\psi\cdot\nabla W$$

極座標にすると

$$I=-\int_V dV\ \nabla\psi\cdot\nabla W=-\int d^nx\ \nabla\psi\cdot\nabla W=-\int d\Omega_n\int_0^\infty dr\ r^{n-1}\nabla\psi\cdot\nabla W$$

$d\Omega_n$ の積分は n 次元単位球の表面積になります（「ガンマ関数」の補足参照）。(3) から分かるように W には角度依存性がないので

$$\nabla W=\frac{\partial W}{\partial r}$$

であることから

$$\begin{aligned}I=-\int d\Omega_n\int_0^\infty dr\ r^{n-1}\nabla\psi\cdot\nabla W&=\ -\int d\Omega_n\int_0^\infty dr\ r^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial W}{\partial r}\\&=\ -\int d\Omega_n\int_0^\infty dr\ \big(\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\psi\frac{\partial W}{\partial r})-\psi\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial W}{\partial r})\big)\\&=\ \int d\Omega_n\int_0^\infty dr\ \psi\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial W}{\partial r})\end{aligned}$$

最後で第一項が消えるのは ψ は原点付近と十分遠方で 0 になるとしているからです。x 積分の形にすれば

$$I=\int d\Omega_n\int_0^\infty dr\ \psi\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial W}{\partial r})=\int d^nx\ \psi\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial W}{\partial r})$$

よって

$$\int d^n x\ \psi \nabla^2 W = \int d^n x\ \psi \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial W}{\partial r})$$

から

$$\nabla^2 W = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial W}{\partial r}) = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} \tag{6}$$

となります。

準備ができたので、3 次元波動方程式の解を求めます。ここからは $n=3$ とします。3 次元 $(3+1$ 個の変数) での波動方程式は $(u(x,t) = u(x_1,x_2,x_3,t))$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\nabla^2 u = 0 \quad\ (t>0) \tag{7a}$$

となっています。初期条件は関数 f,g によって

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \tag{7b}$$

と与え、x を $-\infty$ から $+\infty$ に取り境界条件は影響しないとします。

まず、(3) から

$$U(r,t;x_0) = \frac{1}{\Omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,r)} dS_y\ u(y,t)$$

$$F(r;x_0) = \frac{1}{\Omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,r)} dS_y\ f(y)$$

$$G(r;x_0) = \frac{1}{\Omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,r)} dS_y\ g(y)$$

を作ります。これらから U を求め、(4) によって u にするという手順になります。

U が従う方程式を求めます。$U(r,t;x_0)$ は (5) から、$y = x_0 + rz$ として

$$U(r,t;x_0) = \frac{1}{\Omega_3 r^2}\int_{\partial B(x_0,r)} dS_y\ u(y,t) = \frac{1}{\Omega_n}\int_{|z|=1} dS_z\ u(x_0+rz,t)$$

波動方程式の変数 x を x_0+rz に変換して、この形に積分すれば

$$\frac{1}{\Omega_n}\int_{|z|=1} dS_z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{1}{\Omega_3}\int_{|z|=1} dS_z\ \nabla^2_{x_0} u = 0$$

第一項は時間は無関係なので時間微分を外に出せて

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{1}{\Omega_3}\int_{|z|=1} dS_z\ u(x_0+rz,t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}U(r,t;x_0)$$

第二項も同様で

$$\nabla_{x_0}^2 (\frac{1}{\Omega_3} \int_{|z|=1} dS_z \ u(x_0 + rz, t)) = \nabla_{x_0}^2 U(r, t; x_0)$$

$\nabla^2 U$ は (6) から

$$\nabla_{x_0}^2 U(r, t; x_0) = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}) U(r, t; x_0)$$

よって、U に対する方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(r, t; x_0) - v^2 (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}) U(r, t; x_0) = 0$$

となります。

ちなみに、$\partial U/\partial r$ を計算してみると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{1}{\Omega_3} \int_{|z|=1} dS_z \ \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + rz, t) \\
&= \frac{1}{\Omega_3} \int_{|z|=1} dS_z \ z \cdot \nabla_y u(x_0 + rz, t) \\
&= \frac{1}{\Omega_3} \frac{1}{r} \int_{|z|=1} dS_z \ z \cdot \nabla_z u(x_0 + rz, t)
\end{aligned}$$

z は単位球の単位法線ベクトルなので、ガウスの定理から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Omega_3} \frac{1}{r} \int_{|z|=1} dS_z \ z \cdot \nabla_z u(x_0 + rz, t) &= \frac{1}{\Omega_3} \frac{1}{r} \int_{|z|<1} dV_z \ \nabla_z^2 u(x_0 + rz, t) \\
&= \frac{1}{\Omega_3} \frac{r^2}{r} \int_{|z|<1} dV_z \ \nabla_{x_0}^2 u(x_0 + rz, t) \\
&= \frac{r}{\Omega_3} \int_{|z|<1} dV_z \ \nabla_{x_0}^2 u(x_0 + rz, t)
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\partial U}{\partial r}|_{r=0} = 0$$

が分かります。また、y への変換でのヤコビアンは対角成分しか残らないことから

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1} & \frac{\partial z_n}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{r^n}$$

と求まるので

$$\begin{aligned} \frac{r}{\Omega_n}\int_{|z|<1} dV_z\ \nabla^2_{x_0} u(x_0+rz,t) &= \nabla^2_{x_0}\frac{r}{\Omega_n}\frac{1}{r^n}\int_{|y-x_0|<1} dV_y\ u(y,t) \\ &= \nabla^2_{x_0}\frac{1}{\Omega_n}\frac{1}{r^{n-1}}\int_{|y-x_0|<1} dV_y\ u(y,t) \end{aligned}$$

ここから極座標に変形して r^{n-1} をかけて、r で微分すれば (6) が得られます。
　というわけで解くのは

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(r,t;x_0) - v^2(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r})U(r,t;x_0) = 0 \tag{8}$$

という偏微分方程式です。これは簡単な形に変形できます。そのために U を $\overline{U} = rU$ に置き換えます。$\overline{U}$ を r で 2 回微分すると

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\overline{U} = \frac{\partial}{\partial r}(U + r\frac{\partial U}{\partial r})$$

これを (8) に入れれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{U} = r\frac{\partial^2}{\partial t^2}U &= v^2 r(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r})U \\ &= v^2(r\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2\frac{\partial U}{\partial r}) \\ &= v^2\frac{\partial}{\partial r}(U + r\frac{\partial U}{\partial r}) \\ &= v^2\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial r^2} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial r^2} = 0$$

となり、1 次元波動方程式の形になります。ただし、$r > 0, t > 0$ で、初期条件は

$$\overline{U}(r,0)=\overline{F}(r)\ ,\ \frac{\partial\overline{U}}{\partial t}|_{t=0}=\overline{G}(r)$$

となっています ($\overline{F}(r)=rF(r),\ \overline{G}(r)=rG(r)$)。この初期値問題は (1) と同じなので、$vt\geq r\geq 0$ として、(2b) から

$$\overline{U}(r,t)=\frac{\overline{F}(vt+r)-\overline{F}(vt-r)}{2}+\frac{1}{2v}\int_{vt-r}^{vt+r}ds\ \overline{G}(s)$$

となります。$vt\geq r$ にしているのは $r\to 0$ の極限を取るからです。

$r\to 0$ の極限を取ると

$$\begin{aligned}u(x,t)=\lim_{r\to 0}U=&\ \lim_{r\to 0}\frac{\overline{U}}{r}\\&=\ \lim_{r\to 0}\big(\frac{\overline{F}(vt+r)-\overline{F}(vt-r)}{2r}+\frac{1}{2vr}\int_{vt-r}^{vt+r}ds\ \overline{G}(s)\big)\\&=\ \lim_{r\to 0}\big(\frac{(vt+r)F(vt+r)-(vt-r)F(vt-r)}{2r}+\frac{1}{2vr}\int_{vt-r}^{vt+r}ds\ sG(s)\big)\end{aligned}$$

第一項は $vt+r-2r=vt-r$ なので、$2r$ を微小とする微分の定義になっていて

$$\lim_{r\to 0}\frac{(vt+r)F(vt+r)-(vt-r)F(vt-r)}{2r}=\frac{\partial}{\partial(vt)}(vtF(vt))=\frac{\partial}{\partial t}(tF(vt))$$

第二項は $sG(s)$ の積分結果を K (sG が K の導関数) とすれば

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2vr}\int_{vt-r}^{vt+r}ds\ sG(s)=\frac{1}{v}\lim_{r\to 0}\frac{K(vt+r)-K(vt-r)}{2r}=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial(vt)}K(vt)$$

なので、

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2vr}\int_{vt-r}^{vt+r}ds\ sG(s)=tG(vt)$$

となります。

よって、$u(x,t)$ は

$$u(x,t)=\lim_{r\to 0}U(r,t;x)=\frac{\partial}{\partial t}(tF(vt;x))+tG(vt;x)$$

F,G は 3 次元では

$$\begin{aligned}F(vt;x)&=\frac{1}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)}dS_y\ f(y)\\G(vt;x)&=\frac{1}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)}dS_y\ g(y)\end{aligned}$$

なので

$$\frac{\partial}{\partial t}(tF(vt;x)) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ f(y)\Big)$$

これに

$$\frac{1}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ f(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1} dS_z\ f(x+vtz)$$

を使えば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ f(y)\Big) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi}\int_{|z|=1} dS_z\ f(x+vtz)\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1} dS_z\ f(x+vtz) + \frac{t}{4\pi}\int_{|z|=1} dS_z\ \frac{\partial}{\partial t}f(x+vtz) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1} dS_z\ f(x+vtz) + \frac{t}{4\pi}\int_{|z|=1} dS_z\ vz\cdot\nabla_y f(x+vtz) \\
&= \frac{1}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ f(y) + \frac{t}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ \frac{y-x}{t}\cdot\nabla_y f(y) \\
&= \frac{1}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ (f(y)+(y-x)\cdot\nabla_y f(y))
\end{aligned}$$

よって、$u(x,t)$ は

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(tF(vt;x)) + tG(vt;x) \\
&= \frac{1}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ (f(y)+(y-x)\cdot\nabla_y f(y)) + \frac{1}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ tg(y) \\
&= \frac{1}{4\pi(vt)^2}\int_{\partial B(x,vt)} dS_y\ (f(y)+(y-x)\cdot\nabla_y f(y)+tg(y))
\end{aligned}$$

これは、(7a),(7b) に対するキルヒホッフ (Kirchhoff) の公式と呼ばれます。

積分範囲から分かるように、解 $u(x,t)$ の依存領域は中心が x で半径 vt の 3 次元球の表面 $\partial B(x,vt)$ です ($\partial B(x,vt)$ での初期条件の値で解が決まる)。このため、$\partial B(x,vt)$ の外の初期条件は影響せず、3 次元の場合でも初期条件が伝達する最大速度が存在し、瞬時に伝達しません。依存領域を逆に見ると（3 次元なので想像しづらいですが)、$(x_0,0)$ での初期条件は $|x-x_0|=vt$ となる $u(x,t)$ に影響するので、$|x-x_0|=vt$ が影響領域です ($|\ |$ は 3 次元ベクトルの大きさ)。影響領域は xt を 3 次元的に書いた時の円錐の表面です。

これらをまとめたものをホイヘンス (Huygens) の原理と言います。つまり、点 (x,t) の解は $|x'-x|=vt$（半径 vt の球面）での初期条件に依存し、点 $(x_0,0)$ での初期条件は $|x-x_0|=vt$ となる点 (x,t) での解に影響するというものです。

特性曲面を求めます（3 次元なので曲面)。t を $x_4=t$ として

$$-v^2\nabla^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$$

と書きます。a_{ij} は対角成分しか持たず、対角成分は $(-v^2, -v^2, -v^2, 1)$ です。(x_1, x_2, x_3, t) を $(\alpha_1(x,t), \alpha_2(x,t), \dots, \alpha_4(x,t))$ と変換して

$$A = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} = 0$$

としたときの、$\alpha_k = 0$ が特性曲面を作ります。展開して書けば

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = &-v^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = (\frac{\partial \alpha}{\partial t})^2 - v^2 (\nabla \alpha)^2 \\ &= (\frac{\partial \alpha}{\partial t} - v|\nabla \alpha|)(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v^2 |\nabla \alpha|) \quad \Big(|\nabla \alpha| = \sqrt{(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial \alpha}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial \alpha}{\partial x_3})^2}\Big) \end{aligned}$$

α の添え字は外しています。これを満たす $\alpha(x,t) = 0$ によって構成される曲面 Γ は

$$\alpha(x,t) = v^2 t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

で与えられ、特性曲面となります。もしくは定数ずらして

$$\alpha(x,t) = v^2 (t - t')^2 - |x - x'|^2$$

よって、依存領域や影響領域で出てきた (x', t') を頂点とする円錐は特性曲面です。また、v が光速 c のとき特性曲面はミンコフスキー空間での光円錐となります。

最後に幾何光学でのアイコナール (eikonal) 方程式を導出しておきます。波動方程式の解として

$$u_\epsilon(x,t) = \phi_\epsilon(x,t) \exp[i \frac{p_\epsilon(x,t)}{\epsilon}]$$

という形を考え、$\epsilon \to 0$ の極限を見ます。exp 部分は振動の言葉で言えば位相なので（ϕ_ϵ は振幅）、$\epsilon \to 0$ は振動数が高い (波長が小さい) 極限です。$p_\epsilon, \phi_\epsilon$ の $\epsilon \to 0$ の極限は p, ϕ とします。また、$p = const$ は波面です。

時間微分すれば

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon = \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial t} e^{ip_\epsilon/\epsilon} + \frac{i}{\epsilon} \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t} \phi_\epsilon e^{ip_\epsilon/\epsilon}$$

もう 1 回して

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\epsilon = &\frac{\partial^2 \phi_\epsilon}{\partial t^2} e^{ip_\epsilon/\epsilon} + \frac{i}{\epsilon} \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial t} \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t} e^{ip_\epsilon/\epsilon} \\ &+ \frac{i}{\epsilon} \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial t^2} \phi_\epsilon e^{ip_\epsilon/\epsilon} + \frac{i}{\epsilon} \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t} \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial t} e^{ip_\epsilon/\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2} (\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t})^2 \phi_\epsilon e^{ip_\epsilon/\epsilon} \\ &= e^{ip_\epsilon/\epsilon} (\frac{\partial^2 \phi_\epsilon}{\partial t^2} + 2 \frac{i}{\epsilon} \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial t} \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t} + \frac{i}{\epsilon} \phi_\epsilon \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \phi_\epsilon (\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t})^2) \end{aligned}$$

同様に x で微分すると

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u_\epsilon &= (\nabla^2\phi_\epsilon)e^{ip_\epsilon/\epsilon} + \frac{i}{\epsilon}(\nabla\phi_\epsilon)\cdot(\nabla p_\epsilon)e^{ip_\epsilon/\epsilon} \\
&\quad + \frac{i}{\epsilon}(\nabla^2 p_\epsilon)\phi_\epsilon e^{ip_\epsilon/\epsilon} + \frac{i}{\epsilon}(\nabla\phi_\epsilon)\cdot(\nabla p_\epsilon)e^{ip_\epsilon/\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2}|\nabla p_\epsilon|^2\phi_\epsilon e^{ip_\epsilon/\epsilon} \\
&= e^{ip_\epsilon/\epsilon}(\nabla^2\phi_\epsilon + 2\frac{i}{\epsilon}(\nabla\phi_\epsilon)\cdot(\nabla p_\epsilon) + \frac{i}{\epsilon}\phi_\epsilon\nabla^2 p_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}\phi_\epsilon|\nabla p_\epsilon|^2)
\end{aligned}
$$

よって、v を光速 c とした波動方程式にいれると

$$
\begin{aligned}
0 &= e^{ip_\epsilon/\epsilon}\big(\frac{\partial^2\phi_\epsilon}{\partial t^2} + 2\frac{i}{\epsilon}\frac{\partial\phi_\epsilon}{\partial t}\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t} + \frac{i}{\epsilon}\phi_\epsilon\frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon^2}\phi_\epsilon(\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t})^2\big) \\
&\quad - c^2 e^{ip_\epsilon/\epsilon}\big(\nabla^2\phi_\epsilon + 2\frac{i}{\epsilon}(\nabla\phi_\epsilon)\cdot(\nabla p_\epsilon) + \frac{i}{\epsilon}\phi_\epsilon\nabla^2 p_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}\phi_\epsilon|\nabla p_\epsilon|^2\big)
\end{aligned}
$$

これの実部は

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2\phi_\epsilon}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon^2}\phi_\epsilon(\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t})^2 - c^2(\nabla^2\phi_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}\phi_\epsilon|\nabla p_\epsilon|^2) \\
\epsilon^2(\frac{\partial^2\phi_\epsilon}{\partial t^2} - v^2\nabla^2\phi_\epsilon) &= \phi_\epsilon((\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t})^2 - c^2|\nabla p_\epsilon|^2)
\end{aligned}
$$

ϵ を 0 の極限にすれば

$$
(\frac{\partial p}{\partial t})^2 - c^2|\nabla p|^2 = 0
$$

となり、アイコナール方程式になります。p が t に依存していないとすれば

$$
|\nabla p|^2 = 0
$$

となります。$p = const$ とすれば、これは曲面を表す式になり、∇p はその曲面の法線方向 (波面に垂直な方向) を向きます。このようにアイコナール方程式は波面を記述します。

また、波面が特性曲面と関係することを一般相対性理論の「マクスウェル方程式」で、マクスウェル方程式を使った直接的な計算から求めています。