1 次元波動方程式

2 階線形偏微分方程式の例として 1 次元波動方程式を扱います。
2 階線形偏微分方程式の一般的な話はしていません。

力学の「波動方程式」で導出しているように、振動している 1 次元の弦の時間 t、点 x での変位 $u(x,t)$ は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (t > 0)$$

という偏微分方程式に従い、これは 1 次元波動方程式と呼ばれます。2 変数ですが、x を空間座標、t を時間とするので 1 次元と呼ばれます (時間なので $t > 0$ にしている)。v は弦の張力 T と弦の密度 ρ によって

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} > 0$$

となっています。このような 1 次元波動方程式について見ていきます。
2 階微分方程式なので、$t = 0$ での u と $\partial u/\partial t$ の条件が必要になります。これらは初期条件で、偏微分方程式なので値でなく関数によって

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{x=0} = g(x)$$

のように与えます。そして、例えば弦の運動とした場合、弦の両端がどうなっているかに対応する条件も必要になります。弦の長さは L とし、弦の両端 $(x = 0, x = L)$ が壁に固定されているなら、両端で弦の変位は 0 なので

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

という条件になります。このような位置に対する $u(x,t)$ の条件は境界条件 (boundary condition) と呼ばれます。初期条件と境界条件の下で波動方程式を解くことは、初期境界値問題と言います。また、弦の長さが無限大なら両端の影響は無視できると考えて、初期条件だけを使ったりします。
境界条件を無視するために $-\infty < x < \infty$ での 1 次元波動方程式を扱います。これは弦の長さを無限大に取った場合に対応し、境界条件は出てきません。初期条件は

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \tag{1}$$

と与えます。
まずは、1 階のときと同じように変数を変換します。変数は

$$\alpha = a_1x + a_2t\ ,\ \beta = b_1x + b_2t$$

とし、$u(x,t) = w(\alpha,\beta)$ とします。$a_i, b_i\ (i = 1,2)$ は定数です。この変換で偏微分は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \beta} = a_1\frac{\partial w}{\partial \alpha} + b_1\frac{\partial w}{\partial \beta}$$

2 回行えば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + b_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \beta} &= a_1 (a_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} + b_1 \frac{\partial}{\partial \beta})\frac{\partial u}{\partial \alpha} + b_1 (a_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} + b_1 \frac{\partial}{\partial \beta})\frac{\partial u}{\partial \beta} \\
&= a_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2a_1 b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} + b_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}
\end{aligned}
$$

最後に $u(x, y)$ を $w(\alpha, \beta)$ に置き換えてます。同様に

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = a_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha} + b_2 \frac{\partial w}{\partial \beta} \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2a_2 b_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} + b_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}
\end{aligned}
$$

これらから波動方程式は

$$
\begin{aligned}
0 &= a_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2a_2 b_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} + b_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - v^2 (a_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2a_1 b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} + b_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}) \\
&= (a_2^2 - v^2 a_1^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2(a_2 b_2 - v^2 a_1 b_1) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} + (b_2^2 - v^2 b_1^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \\
&= A \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2B \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} + C \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}
\end{aligned}
$$

ここでの a_1, a_2, b_1, b_2 はヤコビアンが

$$
\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial \beta}{\partial x} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \tag{2}
$$

となっていれば任意に選べます。なので、式が簡単になるように選びます。

そのために係数 A, B, C の関係を出します。微分演算子が 2 次方程式の形をしているので、判別式 $B^2 - AC$ を計算してみると

$$
\begin{aligned}
B^2 - AC &= (a_2 b_2 - v^2 a_1 b_1)^2 - (a_2^2 - v^2 a_1^2)(b_2^2 - v^2 b_1^2) \\
&= a_2^2 b_2^2 + v^4 a_1^2 b_1^2 - 2v^2 a_1 a_2 b_1 b_2 - (a_2^2 b_2^2 + v^4 a_1^2 b_1^2 - v^2 a_1^2 b_2^2 - v^2 a_2^2 b_1^2) \\
&= -2v^2 a_1 a_2 b_1 b_2 + v^2 a_1^2 b_2^2 + v^2 a_2^2 b_1^2 \\
&= v^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2
\end{aligned}
$$

これから $B^2 - AC \geq 0$ が分かり、さらにヤコビアンから $B^2 - AC \neq 0$ が要求されているので、$B^2 - AC > 0$ であればいいです。よって、A, B, C の内どれか 1 つは 0 になるように選べます。

$B^2 - AC > 0$ から、A, C が消えて、B が消えないように a_i, b_i を選びます。なので

$$A = a_2^2 - v^2 a_1^2 = 0\ ,\ C = b_2^2 - v^2 b_1^2 = 0\ ,\ B = a_2 b_2 - v^2 a_1 b_1 \neq 0$$

となるようにします。A, C を変形させて

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} - v^2 = 0\ ,\ \frac{b_2^2}{b_1^2} - v^2 = 0$$

A, C から a_1, b_1 が 0 だと a_2, b_2 も 0 になり、$B = 0$ になってしまうので、$a_1, b_1 \neq 0$ です。これらは単純に

$$\frac{a_2}{a_1} = \pm v\ ,\ \frac{b_2}{b_1} = \pm v$$

ここで、$a_1, b_1 = 1$ と選び、$a_2 = v,\ b_2 = -v$ とすれば

$$A = C = 0\ ,\ B = a_2 b_2 - v^2 a_1 b_1 = -2v^2 \neq 0$$

と出来ます。

　というわけで、波動方程式は変換

$$\alpha = x + vt\ ,\ \beta = x - vt$$

によって

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial\alpha} = 0$$

となります。これに対して、w_1, w_2 を解とし、$w_1 + w_2$ を入れれば線形性から

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha}(w_1 + w_2) = \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha}w_1 + \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha}w_2 = 0$$

となるので、$w_1 + w_2$ も解です。そして、

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha}w_1 + \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha}w_2 = \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial w_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial w_2}{\partial\beta}$$

なので

$$\frac{\partial w_1}{\partial\alpha} = 0\ ,\ \frac{\partial w_2}{\partial\beta} = 0$$

1 階偏微分方程式なので、w_1, w_2 の一般解は任意関数 $G(\alpha), F(\beta)$ によって

$$w_1 = G(\alpha)\ ,\ w_2 = F(\beta)$$

となります。
　よって、$w(\alpha,\beta)$ の一般解は

$$w(\alpha,\beta)=G(\alpha)+F(\beta)$$

となり (2 階偏微分方程式なので任意関数は 2 個)、x,t に戻せば

$$u(x,t)=F(x-vt)+G(x+vt)$$

となり、これが 1 次元波動方程式の一般解となります。
　任意関数 F,G を初期条件 (1) から決定します。$t=0$ で

$$u(x,0)=F(x)+G(x)$$

なので、初期条件から

$$f(x)=F(x)+G(x)$$

t で偏微分して $t=0$ にすれば、初期条件から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=&\ -v\frac{\partial F(\xi_-)}{\partial \xi_-}\Big|_{t=0}+v\frac{\partial G(\xi_+)}{\partial \xi_+}\Big|_{t=0}\qquad(\xi_\pm=x\pm vt)\\
\frac{1}{v}g(x)=&\ -F'(x)+G'(x)\qquad\Big(F'(\xi_-)=\frac{\partial F(\xi_-)}{\partial \xi_-}\ ,\ G'(\xi_+)=\frac{\partial G(\xi_+)}{\partial \xi_+}\Big)
\end{aligned}$$

$F'(x)-G'(x)$ が $g(x)/v$ になればいいので、x 積分から

$$F(x)=C-\frac{1}{2v}\int_0^x ds\ g(s)\ ,\ G(x)=C+\frac{1}{2v}\int_0^x ds\ g(s)$$

と出来ます。C は定数です。初期条件を合わせれば

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2v}\int_0^x ds\ g(s)-C\ ,\ G(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2v}\int_0^x ds\ g(s)+C$$

変数をつけかえて

$$F(x-vt)=\frac{1}{2}f(x-vt)-\frac{1}{2v}\int_0^{x-vt} ds\ g(s)-C\ ,\ G(x+vt)=\frac{1}{2}f(x+vt)+\frac{1}{2v}\int_0^{x+vt} ds\ g(s)+C$$

よって、初期条件によって $u(x,t)$ は

$$u(x,t)=\frac{f(x-vt)+f(x+vt)}{2}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} ds\ g(s)$$

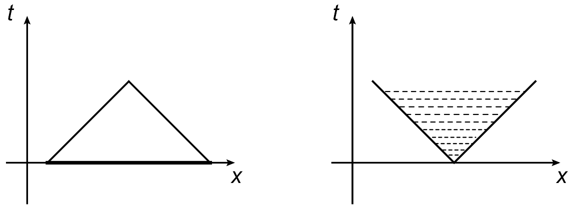

図 1: 左は依存領域、右は影響領域

と求まります。これは今の初期条件 (1) におけるダランベール (d'Alembert) の公式と呼ばれます。証明は省きますが、1 次元波動方程式と初期条件 (1) による初期値問題に対する一意的な解になっています (初期条件を与えれば解は決まる)。

第一項は $x - vt, x + vt$ での初期条件 f、第二項は $x - vt$ から $x + vt$ での初期条件 g に依存しています。このため、$u(x, t)$ は区間 $[x - vt, x + vt]$ での初期条件に依存していることになり、この区間を点 (x, t) の依存領域 (domain of dependence) と呼びます。

解の性質を見ていきます。そのために波動方程式の特性曲線を与えます。「1 階線形偏微分方程式」での移送方程式で触れたように、波動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3b}$$

と分解でき、これらの 1 階偏微分方程式の特性曲線は $x \pm vt = C$ です (C は定数)。F, G は (3a),(3b) での解で、$x \pm vt$ は波動方程式の特性曲線になります。なので f の変数と積分範囲は特性曲線になっています。特性曲線の定義については最後に触れます。

特性曲線を決めるために、$x = x_0, t = t_0$ の地点 (x_0, t_0) を取り

$$u(x_0, t_0) = F(x_0 - vt_0) + G(x_0 + vt_0)$$

とします。このときの特性曲線の式は $x \pm vt = x_0 \pm vt_0$ で与えられるので、特性曲線は xt 平面で

$$\pm t = -\frac{1}{v}x + \frac{1}{v}(x_0 \pm vt_0)$$

となる直線です。よって、$x - vt$ は $(x_0 - vt_0, 0)$ と (x_0, t_0) を結ぶ直線、$x + vt$ は $(x_0 + vt_0, 0)$ と (x_0, t_0) を結ぶ直線となり、特性曲線と x 軸は

$$(x_0, t_0)\ ,\ (x_0 - vt_0, 0)\ ,\ (x_0 + vt_0, 0)$$

による三角形を作ります。三角形の x 軸部分は依存領域です (図 1 の左の太線)。

依存領域を逆向きに見ると、初期条件が解に影響する領域が分かります。まず、点 (x_0, t_0) の依存領域を作り、その中の $(x_0, 0)$ を見ます。次に別の点 $(x_0 + a, t_0)$ $(0 < a < vt_0)$ での依存領域を作ると、これはまだ $(x_0, 0)$ を含んでいます (図 2)。このように (x_0, t_0) から右の点での依存領域を作っていくと、$(x_0 + vt_0, t_0)$ を過ぎた点からの依存領域は $(x_0, 0)$ を含まなくなります。つまり、$(x_0, 0)$ を通る特性曲線 $x - vt = x_0$ を超えた点での解には $(x_0, 0)$ での初期条件 (初期値) が影響しなくなります。$(x_0 - a, t_0)$ $(0 < |a| < vt_0)$ と動かした場合も同様で、$(x_0, 0)$ を通

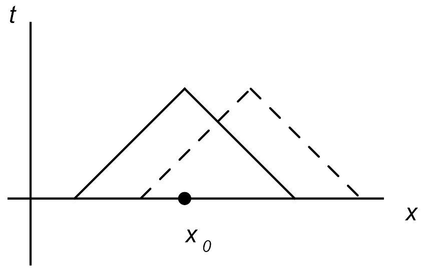

図 2

る特性曲線 $x+vt=x_0$ を超えた点での依存領域は $(x_0,0)$ を含まないので、$(x_0,0)$ での初期条件は影響しなくなります。

このように、ある点 $(x_0,0)$ を通る特性曲線による V 字の内側での点 (x,t) の解は、$(x_0,0)$ での初期条件の影響を受け、外側での解は影響を受けません。V 字の内側のことを影響領域 (domain of influence) と言います（図 1 の右)。

これは別の見方もできます。特性曲線の傾きは $1/v$ となっているので、影響領域（V 字の内側）に入るためには v より小さい必要があり、v より大きければ影響領域の外になります。これは、v を速度とすれば、初期条件 (初期値) の情報は速度 v を超えて伝達しないということです。例えば、点 $(x_0,0)$ から遠く離れた点 (x,t) (影響領域の外の点。特性曲線の傾きを超えるほど t に対して x が大きい点) の解に $(x_0,0)$ の初期値が影響しないのは、時間 t の間に (x,t) に着かない速度 v でしか伝達しないからと言えます (例えば弦を弾いた影響が瞬時に遠方に伝わらない)。

「1 階線形偏微分方程式」で触れたように $F(x-vt)$ は特性曲線上で定数です。特性曲線を $x-vt=x_0-vt_0$ とすれば定数は $F(x_0-vt_0)$ で、x は $x=vt+x_0-vt_0$ に従って動いています。つまり、特性曲線において $F(x-vt)$ は同じ値を持って速度 v で x の正の方向に動きます ($t>0$)。$G(x+vt)$ でも同様で、特性曲線において同じ値 $G(x_0+vt_0)$ を持って速度 v で x の負の方向に動きます。簡単に言えば、$F(x-vt)$ は前方に進み、$G(x+vt)$ は後方に進みます。この性質のために、特性曲線に沿って速度 v で現象 (例えば弦では振動) が伝達すると言われます。影響領域の話から、v は初期値が伝達する最大速度です。

ただし、$u=F+G$ なので実際の振る舞いは F と G の和になります。例えば、点 (x_0,t_0) は、$(x_0-vt_0,0)$ からの特性曲線 $x-vt=x_0-vt_0$ と、$(x_0+vt_0,0)$ からの特性曲線 $x+vt=x_0+vt_0$ が交わる点です。なので、点 (x_0,t_0) での $u(x_0,t_0)$ は特性曲線上の前方に進む解と後方に進む解の和 $F(x_0-vt_0)+G(x_0+vt_0)$ となります (重ね合わせ)。

最後に、2 階線形偏微分方程式での特性曲線の定義を与えておきます。一般的にせずに 1 次元波動方程式で行います。後のために波動方程式を

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\quad (a_{11}=-v^2\ ,\ a_{22}=1)$$

と書きます。変数の変換に戻って、(x,t) を $(\alpha_1(x,t),\alpha_2(x,t))$ と変換することにします。偏微分は

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2}$$

2 回行うと

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2})=\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2}$$

第一項は

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha_2})\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}=(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x})^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2}+\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1}$$

第二項も同様で

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2}=(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x})^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x})^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2}+\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1}+(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x})^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\\&\quad+\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\\&=\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}\end{aligned}$$

最後に $u(x,t)$ を $w(\alpha_1,\alpha_2)$ に変えています。t 微分でも同じなので波動方程式は

$$a_{11}(\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i})+a_{22}(\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\frac{\partial \alpha_j}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i})=0$$

x,t を x_1,x_2 $(x_1=x,\ x_2=t)$ と書くことにして

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1}a_{11}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}+\sum_{i,j=1}^{2}a_{22}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_2}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}+\sum_{i=1}^{2}a_{11}\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_1^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}+\sum_{i=1}^{2}a_{22}\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_2^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}\\&=\sum_{i,j=1}^{2}(\sum_{k=1}^{2}a_{kk}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j})+\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}a_{kk}\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_k^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}\end{aligned}$$

とまとめます。

変数変換 α_i は x_1,x_2 の 1 次までを含む線形変換として、第二項は消します。上で見たように残る第一項では

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$$

の項が残るようにします。そのためには

$$\sum_{k=1}^{2}a_{kk}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_k}=0\ ,\ \sum_{k=1}^{2}a_{kk}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_k}=0$$

となればいいです。ここで、α_1,α_2 がある曲線を表す式になっているとすれば、2 次元の曲線 $C(x_1,x_2)=0$ に対する法線ベクトル

$$n_k = (\frac{\partial C}{\partial x_1}, \frac{\partial C}{\partial x_2})$$

と同じ形を含んでいることが分かります。なので、α_1, α_2 が何かの曲線を表しているとし、その法線ベクトル (曲線に直交するベクトル) を

$$\eta_k = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_k}\ ,\ \xi_k = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_k}$$

とすれば、

$$\sum_{k=1}^{2} a_{kk}\eta_k\eta_k = 0\ ,\ \sum_{k=1}^{2} a_{kk}\xi_k\xi_k = 0 \tag{4}$$

展開して書けば

$$-v^2\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} = 0$$
$$-v^2\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} = 0$$

このとき $\alpha_1 = x_1 + vx_2,\ \alpha_2 = x_1 - vx_2$ はこれらを満たし、上で与えた特性曲線となります。この (4) が 2 変数の 2 階線形偏微分方程式での特性曲線の定義です。このように、特性曲線は、偏微分方程式の係数 a_{ij} と曲線の法線ベクトルの関係式によって与えられます。

今は $\partial^2 x/\partial x_1 \partial x_2$ の項がいないために a_{kk} となっていますが、そういった項がいるなら a_{12} のような係数がいるので、特性曲線の定義は

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\eta_i\eta_j = 0\ ,\ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j = 0$$

となります。細かく言うと、ある曲線が点 P でこの関係を満たすときその曲線は点 P で特性的 (characteristic) と言い、曲線上の各点で特性的であるなら特性曲線と呼ばれます。0 でないときは非特性的 (non-characteristic) と呼ばれます。この定義は n 個の変数の場合 $(i = 1, \ldots, n)$ にそのまま一般化されます。2 変数では曲線でしたが、3 変数では曲面になり特性曲面と呼ばれます。