ベクトル空間

当たり前のように使われることが多い単語の定義を羅列しています。簡単な定理はいくつか示しています。
解析学や集合の入門的なことは知っているとしています。
ローマ文字はベクトル、ギリシャ文字は実数か複素数としています。また、写像にもローマ文字を使っています。

- ベクトル空間

  実数 R と複素数 C をまとめて K と表記し、実数なら $\mathrm{K}=\mathrm{R}$、複素数なら $\mathrm{K}=\mathrm{C}$ とします。例えば、α が実数なら $\alpha \in \mathrm{R}$、α を実数と複素数どちらの場合でもいいとするなら $\alpha \in \mathrm{K}$ とします。このような α をスカラー (scalar) と言います。また、K を体 (field) と呼んだりもしますが、「基礎知識」に定義を載せています。

  ある集合 V において、和とスカラー倍 (定数倍) として

  - 和：$v+w \in V \quad (v, w \in V)$
  - スカラー倍：$\alpha v \in V \quad (\alpha \in \mathrm{K})$

  が定義され、$v, w, u \in V,\ \alpha, \beta \in \mathrm{K}$ に対して

  - $v+w=w+v$ (交換法則)
  - $v+(w+u)=(v+w)+u$ (結合法則)
  - $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w$ (分配法則)
  - $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$ (分配法則)
  - $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$ (結合法則)
  - $1v=v$

  これらが成立し、

  - $v+\mathbf{0}=v\ ,\ 0v=\mathbf{0}$
  - $v+(-v)=\mathbf{0}$

  となる $\mathbf{0}$(この規則を満たす $\mathbf{0}$ のことで実数の 0 ではない) と逆元 $w=-v$ が存在するとき、V をベクトル空間と定義します。K が実数なら実ベクトル空間、複素数なら複素ベクトル空間と呼ばれます。ベクトル空間の元がベクトルで、$\mathbf{0}$ はゼロベクトルと呼ばれます。ゼロベクトルを太字にしないで書いていきますが、おそらく混乱はしないと思います。

  数学での線形代数は主にベクトル空間から何が言えるかを調べていく分野です。

- 数ベクトル空間

  ベクトル空間の重要な例が n 個の実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{R}$ を組にした $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ による集合です。これを R^n と書くことにし、R^n は n 個の実数の組による集合とします。$v=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{R}^n$ として、この集合に和とスカラー倍を $(w \in \mathrm{R}^n,\ \alpha, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathrm{R})$

  $$v+w=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)+(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)=(\lambda_1+\rho_1, \lambda_2+\rho_2, \ldots, \lambda_n+\rho_n)$$
  $$\alpha v=\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)=(\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_n)$$

  と定義すれば、$v+w$ と αv はどちらも n 個の組のままなので R^n にいます。ゼロベクトルは $(0, 0, \ldots, 0)$ です。よって、ベクトル空間になり (複素数でも同様)、ベクトル空間としての R^n は n 次元数ベクトル空間と呼ばれます。

  ここでは R^n は n 次元数ベクトル空間を表すものとして使っていきますが、分野によって R をベクトル空間でない実数の集合としたり、ユークリッド空間としていたりすることも多いので注意が必要です。

- 関数のベクトル空間

もう 1 つの重要な例が関数によるベクトル空間です。例えば、実数の閉区間 $[\lambda_1, \lambda_2]$ における実数値の連続関数の集合 $C[\lambda_1, \lambda_2]$ があるとします。関数 $f \in C[\lambda_1, \lambda_2]$ の変数は $t \in [\lambda_1, \lambda_2]$ とし、$f(t)$ は実数です ($f(t) \in \mathrm{R}$)。連続関数は和とスカラー倍の後も連続関数のままなので、関数の和 $h = f + g$ とスカラー倍 αf ($\alpha \in \mathrm{R}$) を

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad\ (h(t) = f(t) + g(t))\\
&(\alpha f)(t) = \alpha f(t)
\end{aligned}
$$

と与えれば、$C[a, b]$ はベクトル空間となります。$(f+g)(t), (\alpha f)(t)$ は関数 $f+g, \alpha f$ の t での値です。ゼロベクトルは全ての $[\lambda_1, \lambda_2]$ から 0 にする関数です。実際に、その関数を $g(t) = 0$ とすれば

$$
(f+g)(t) = f(t) + g(t) = f(t) + 0 = f(t)
$$

となるので、ゼロベクトルの性質になっています。

- 線形結合

ベクトル空間 V があり、ベクトルを $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V,$ スカラーを $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K}$ とし、これらによる

$$
\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n
$$

という形を $v_1, v_2, \ldots, v_n$ の線形結合 (一次結合、linear combination) と言います。

ベクトル空間 V の部分集合 X があり、$x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ による全ての線形結合による集合は $\mathrm{Span}\ X$ と表記されます。

- 部分空間

ベクトル空間 V の部分集合 U があり、U に含まれるベクトルによる線形結合が U に含まれているなら U は V の部分空間 (subspace) と呼ばれます。つまり、$u_1, u_2 \in U$ が $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{K}$) となっているなら (バラして書けば、和 $u_1 + u_2 \in U,$ スカラー倍 $\alpha u \in U$)、部分空間です。この定義から、部分空間はベクトル空間です。

例えば、$\mathrm{Span}\ X$ ($X \subset V$) は

$$
\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n \in X\ ,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K})
$$

による集合で、$s_1, s_2 \in \mathrm{Span}\ X$ の和とスカラー倍が定義できるので V の部分空間になっています。

- 線形従属、線形独立

$v_1, v_2, \ldots, v_n \in V,$ スカラー $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K}$ に対して（右辺の 0 はゼロベクトル）

$$
\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \tag{1}
$$

という式が、$\alpha_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots n$) で成立しているとき $v_1, v_2, \ldots, v_n$ は線形従属 (一次従属、linearly dependent)、$\alpha_i = 0$ で成立しているとき線形独立（一次独立、linearly independent）と呼ばれます。

v_i のうちの 1 つでも 0 になっていれば線形従属です。これは単純で、例えば $v_3 = 0$ なら $\alpha_i = 0 (i \neq 3),\ \alpha_3 \neq 0$ で (1) が成立するからです。

$\sin, \cos$ は線形独立になっています。$\alpha_1 \sin\theta + \alpha_2 \cos\theta = 0$ を満たすのは $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ のときなので、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は線形独立です。簡単に言えば、$\theta = 0$ では $\alpha_2 = 0$、$\theta = \pi/2$ では $\alpha_1 = 0$ が要求されるので、$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ のとき成立します。

ついでに、定理を 1 つ示します。ベクトル空間 V のベクトルの集合 $\{v_i\}_{i=1}^m = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ は線形独立とし、$\{v_i\}_{i=1}^m$ の線形結合で $v_{m+1} \in V$ は作れないとします。このとき、$\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ は線形独立になります。これを示します。

線形独立かを知りたいのでスカラー α_i によって

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0 \tag{2}$$

とおきます。$\alpha_{m+1} \neq 0$ とすれば

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} v_1 + \ldots + \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} v_m + v_{m+1} = 0$$

$$v_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} v_m$$

右辺は $\{v_i\}_{i=1}^m$ の線形結合なので、v_{m+1} は線形結合で書けないとした設定に矛盾します。なので、$\alpha_{m+1} = 0$ で

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$$

$\{v_i\}_{i=1}^m$ は線形独立なので $\alpha_i\ (i = 1, \dots, m)$ は 0 です。よって、(2) において $\alpha_i = 0\ (i = 1, \dots, m)$ となり、$\{v_i\}_{i=1}^{m+1}$ は線形独立となります。

- 次元

n 個のベクトルでは線形独立になり、$n+1$ 個では線形独立にならないとき、n はベクトル空間の次元 (dimension) と定義され、n が有限であれば有限次元、そうでなければ無限次元と呼ばれます。

- 基底

線形独立な集合 E があり、Span $E = V$ となるとき、E を V の基底 (basis) と呼びます。もっと直接的に言えば、$v \in V$ が E の線形結合で書けるなら、E は V の基底となります。V の基底のベクトルの数は V の次元となります。

任意のベクトルは基底による線形結合で書けます。n 次元ベクトル空間の基底を $e_1, e_2, \dots, e_n$ とします。基底と任意のベクトル $v \in V$ を用意したとき、n 次元なので $n+1$ 個のベクトルでは線形従属になるために

$$\alpha_0 v + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

となるのは、$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ が 0 でないときです。なので

$$v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n \quad (\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_0},\ i = 1, 2, \dots, n)$$

と変形できます。このように、任意のベクトルは基底による線形結合で書けます。β_i はベクトルの成分 (component) と呼ばれ、一意的に決まります。一意性は e_i の係数を β'_i としたものを β_i での場合から引いて、線形独立であることを使えば $\beta_i = \beta'_i$ となるからです。

R^n において、$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ (e_i の i 番目が 1 で他は 0) としたものは基底になります。線形独立であることは R^n の和の定義からすぐに分かります。この基底を R^n の標準基底 (standard basis) と言います。

- 直積、直和

k 個のベクトル空間 (もしくは集合)V_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ があり、$v_i \in V_i$ から $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ という組を作ることを直積 (デカルト積、Cartesian product) と言います。この組による集合は $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$ と表記されます。例えば、R^n は n 個の R による直積 $\mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \cdots \times \mathrm{R}$ から作られています。

ここでは直和に対応して直積としますが、直積は 2 つのベクトルから行列を作る演算にも使われる単語なのでデカルト積と呼んだほうが余計な混乱が起きないです。

$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$ そのものはベクトル空間ではないです。ベクトル空間にするには、和とスカラー倍を

$$(w_1, w_2, \ldots, w_k) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k,\ \alpha \in \mathrm{K}$$

に対して

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k) + (w_1, w_2, \ldots, w_k) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_k + w_k)$$
$$\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_k)$$

と定義すればいいです。このようにして $V_1, V_2, \ldots, V_k$ からベクトル空間 V を作ることを直和 (direct sum) と言い

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

と表記されます。

ベクトル空間 V の部分空間 X, Y があり (2 個にしますが k 個でも同じ)、X, Y の共通部分は 0 のみのとき ($X \cap Y = \{0\}$)、それらによる直和 $V = X \oplus Y$ と言ったとき、V の元が X, Y の元の和で書けることを意味する場合もあります。こちらを内部直和 (internal direct sum)、最初の直和を外部直和 (exteranl direct sum) として区別することもあります。また、記号も区別して内部直和では「$\dotplus$」を使っている場合もあります。

例えば、$(x, y) \in V$ はその部分空間での $(x, 0) \in X,\ (0, y) \in Y$ から、

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

とできることが $V = X \oplus Y$ と表記されます (区別するなら $V = X \dotplus Y$)。簡単に言えば、$V_1 \oplus V_2$ は V_1, V_2 からベクトル空間を作ること、$X \dotplus Y$ はベクトル空間をその部分空間の和で書いたものです。

X, Y を $V = V_1 \oplus V_2$ の部分空間とできてしまうので、V_1, V_2 と X, Y の区別を無視すれば、$V_1 \oplus V_2 = V_1 \dotplus V_2$ と表記できます。この 2 つは同型であるために、この表記が正当化されます。同型の定義は下の同型を見てください。

- 凸集合

ベクトル空間の部分集合 S があり、$x, y \in S$ と $0 \leq \alpha \leq 1$ による $\alpha x + (1 - \alpha) y$ が S にいるとき、S は凸 (convex) と言われます。これは確率の話でよく出てきます。

- 線形演算子

ベクトル空間 V, W があり、V から W への写像 T ($T(v) \in W,\ v \in V$) が、$v_1, v_2 \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{K}$ に対して

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

となっているとき、T は線形写像 (linear map) や線形演算子 (linear operator) と呼ばれます。他にも線形作用素や線形変換とも呼ばれます。ここでは線形演算子と呼んでいきますが、線形作用素、線形演算子は V から V への場合 (自己準同型、endomorphism) だけを指していることもあります。また、線形演算子が作用していることを $T(v)$ と書きますが、Tv ともよく表記され、こちらのほうが実際の計算では便利です。

関数と同じように、$T(v) \in W$ による集合 $\{T(v)|\ v \in V\}$ は像 (image) や値域 (range) と呼ばれます。

$T(v) = 0$ となる $v \in V$ の集合はカーネル (核、kernel) と呼ばれます。カーネルは $\mathrm{Ker}T$ と表記されます ($\mathrm{Ker}T = \{v \in V|T(v) = 0\}$)。カーネルは線形演算子を作用させたら 0 になるベクトル v のことなので、T の逆写像 T^{-1} によって $T^{-1}(\{0\})$ とも書けます。　線形演算子の基本的な定理は「線形演算子」で示しています。

- 同型

ベクトル空間 V, W があり、V から W への線形演算子が全単射であるなら、V と W は同型 (isomorphic) と言います。全単射の線形演算子は同型写像 (isomorphism) と呼ばれます。よくある表記を使うと、線形演算子 T が $T(V) = W$ であれば同型写像です。

同型であれば線形演算子によってベクトル空間の関係がそのまま移行されるので、ベクトル空間としては同等です。この意味で、外部直和と内部直和は等式になります。

また、V と W の次元が同じ n なら、どちらも R^n と同型であるために、V と W は同型です。

- 自己準同型写像

ベクトル空間 V から V への線形演算子を自己準同型写像 (endmorphism) と言い、この線形演算子を集めたものは End V のように表記されます。線形演算子は関数のことなので、関数と同じ和とスカラー倍を定義すれば、End V はベクトル空間となります。

- 双対空間

ベクトル空間 V から K への線形演算子を線形汎関数 (linear functional) と言います。線形汎関数を集めたものはベクトル空間 V の双対空間 V^* と定義されます。線形汎関数は線形演算子なので、関数の場合と同じ和とスカラー倍を定義すれば、双対空間はベクトル空間となります。双対空間のベクトルを余ベクトル (covector) や dual vector と言ったりします。

ベクトル空間 V の基底に対応する双対空間 V^* の基底が定義されています。これを示します。

線形汎関数 f_i の基底 $e_i \in V$ への作用を $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n,\ f_i \in V^*)$ と定義します。δ_{ij} はクロネッカーデルタです ($i = j$ なら $\delta_{ij} = 1$、$i \neq j$ なら $\delta_{ij} = 0$)。これはベクトルを基底 e_i の線形結合で書いたときの i 番目の成分を取り出します。例えば、f_2 としたとき、線形演算子の線形性から

$$f_2(v) = f_2(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_2 f_2(e_2) = \alpha_2$$

となり、$i = 2$ の成分を取り出します。

V^* の基底になっていることを示します。$g \in V^*$ は線形演算子なので線形性から

$$\begin{aligned} g(v) &= g(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_1 g(e_1) + \alpha_2 g(e_2) + \cdots + \alpha_n g(e_n) \\ &= f_1(v) g(e_1) + f_2(v) g(e_2) + \cdots + f_n(v) g(e_n) \end{aligned}$$

g は線形汎関数なので $g(e_i)$ は K です。これを $\beta_i = g(e_i)$ とすれば

$$g(v) = \beta_1 f_1(v) + \beta_2 f_2(v) + \cdots + \beta_n f_n(v)$$
$$g = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n$$

として、f_i の線形結合で書けます。

f_i が線形独立かどうかを見ます。$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ を e_i に作用させると

$$\lambda_1 f_1(e_i) + \lambda_2 f_2(e_i) + \cdots + \lambda_n f_n(e_i) = 0$$

例えば $i = 2$ とすれば

$$0 = \lambda_2 f_2(e_2) = \lambda_2$$

となるので、$\lambda_i = 0$ となります。よって、f_i は線形独立です。

$g \in V^*$ は線形独立な $f_i \in V^*$ $(f_i(e_j) = \delta_{ij})$ の線形結合で書けることから、f_i は V^* の基底です。このように V の基底に対応する双対空間の基底は双対基底 (dual basis) と呼ばれます。

V と V^* は同じ次元を持つので、V, V^* は同型です (「線形演算子」参照)。また、V^* の双対空間 $(V^*)^*$ も同様の話から V^* と同型になり、$(V^*)^*$ は V と同型になります。$(V^*)^*$ を二重双対空間 (double dual space) と言います。

双対基底を使って線形汎関数 F を展開すると、線形性から

$$\begin{aligned}
F(v) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(v) &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_N \boldsymbol{e}_N) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \alpha_j f_i(\boldsymbol{e}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \alpha_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i
\end{aligned}$$

となります。

ちなみに、相対性理論で出てくる反変ベクトルは V のベクトル、共変ベクトルは V^* のベクトル (線形汎関数) のことです。

- ノルム

  ベクトル空間 V でのノルム $\| \ \|$ は $v, w \in V, \ \alpha \in \mathrm{K}$ に対して

  - $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$
  - $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (三角不等式)
  - $v = 0$ なら $\|v\| = 0$、$\|v\| = 0$ なら $v = 0$

という性質を持つと定義されます。$|\alpha|$ は α の絶対値です。ノルムが定義されたベクトル空間をノルム空間 (normed space) と言います。

三角不等式において $w=-v$ とすると

$$0=\|v-v\|\leq\|v\|+\|v\|=2\|v\|$$

となるので、v のノルムは負にならないことが分かります。また、$v=0$ として 1 番目の定義を使うと

$$\|v\|=\|0\|=\|0\cdot 0\|=0\,\|0\|=0$$

となり ($0\cdot 0$ はゼロベクトルのゼロ倍)、3 番目の $v=0$ なら $\|v\|=0$ が出てきます。このため、ノルムは $v\neq 0$ で正と定義に加えると、3 番目がいらなくなります ($v\neq 0$ で負にならないので $\|v\|=0$ のとき $v=0$ とする)。

n 次元数ベクトル空間 R^n で

$$\|x\|=(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)^{1/2}\qquad(x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathrm{R}^3)$$

と定義したものは、ユークリッドノルム (Euclidean norm) と呼ばれます。これはユークリッド空間で普通に使っている関係を使えばノルムの定義を満たすことはすぐ分かります。

他にも R^n で $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の絶対値が最も大きいものをノルムと出来ます。これは

$$\|x\|=\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$$

と表記され、最大値ノルム (maximum norm) や無限大ノルム (infinity norm) と呼ばれます。max は { } の中で最も大きなものという意味です。別の表記として

$$\|x\|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

と書かれることもあります。例えば $x=(3,-1,5)$ なら

$$\|x\|=\max\{|3|,|-1|,|5|\}=5$$

となります。最大値ノルムもノルムの定義を満たしています。$x_i=0$ で $|x_i|=0$ なので、$x_i=0$ のとき $\|x\|=0$ で、スカラー倍は

$$\|\alpha x\|=\max|\alpha x_i|=\max(|\alpha||x_i|)=|\alpha|\max|x_i|=|\alpha|\,\|x\|$$

三角不等式は $|x_i+y_i|$ が $|x_k+y_k|$ で最大値になるとすれば、絶対値の不等式から

$$\|x+y\|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i+y_i|=|x_k+y_k|\leq|x_k|+|y_k|\leq\max_{1\leq i\leq n}|x_i|+\max_{1\leq i\leq n}|y_i|=\|x\|+\|y\|$$

として求められます。2 個目の不等号は $|x_k|, |y_k|$ が $|x_i|, |y_i|$ の中の最大値とはしていないからです。

このように、同じベクトル空間にノルムをいくつも定義できます。しかし、詳しいことは省きますが、有限次元のノルム空間でのノルムは全て同値です。

三角不等式は、$v = x - y, w = y - z$ とすれば

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$$

と書き換えられます。そして、これは

$$\begin{aligned}
\|x - z\| \leq&\ \|x - y\| + \|y - z\| \\
-\|x - z\| \geq&\ -\|x - y\| - \|y - z\| \\
\|y - z\| \geq&\ \|x - z\| - \|x - y\|
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
\|x - z\| \leq&\ \|x - y\| + \|y - z\| \\
\|x - y\| - \|x - z\| \leq&\ \|y - z\|
\end{aligned}$$

という式に変形出来ることから

$$|\,\|x - y\| - \|x - z\|\,| \leq \|y - z\|$$

となります。これは逆三角不等式 (inverse triangle inequality) と呼ばれます。

- 計量

  ベクトル空間 V があり、$V \times V$ から R への写像 d が $(u, v, w \in V)$

  - $d(v, w) \geq 0 \quad (v = w$ のとき $0)$
  - $d(v, w) = d(w, v)$
  - $d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$

  を満たすとき、d は V の計量 (metric) と呼ばれます。計量が定義されたベクトル空間を計量ベクトル空間と言います。計量の定義にノルムが使えるので、ノルムから

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

  として計量を与えられます。これによって計量 d がベクトル v, w の間の距離の概念として導入されます。このため、d を距離関数 (distance function) と言ったりもします。

- ノルム空間のコーシー列

  数列を $\{x_1, x_2, \ldots\} = \{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ と表記します。ノルム空間 V での数列 $\{x_i\}$ があるとします（言葉の区別をするなら点列）。任意の実数 $\epsilon > 0$ に対して、ノルムが

$$\|x_n - x_0\| < \epsilon \quad (x_0 \in V,\ n > N)$$

となる整数 $N > 0$ が存在するとき、数列 $\{x_i\}$ は収束する (convergent) と言われ、x は極限 (limit) と言われます。N は ϵ に依存します。無限大の極限の形で書けば

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - x\| = 0 \ , \ \lim_{i\to\infty} x_i = x$$

となります。

ノルム空間の数列 $\{x_i\}$ があり、$x_i - x_j$ のノルムが有限 (無限大以外の値) で、任意の実数 $\epsilon > 0$ に対して全ての $i, j > n_0$ で $\|x_i - x_j\| < \epsilon$ となる n_0 が存在するなら、$\{x_i\}$ はコーシー列 (基本列、Cauchy sequence) と呼ばれます。

$x_i - x_j$ $(i, j > N)$ のノルムの不等式

$$\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - x\| + \|x_j - x\|$$

において、数列 $\{x_i\}$ が収束しているなら右辺は 0 なので

$$\lim_{i,j\to\infty} \|x_i - x_j\| = 0$$

となります。これは $\|x_i - x_j\| < \epsilon$ のことなので、収束する数列はコーシー列と分かります。

- 開球体、閉球体

  ノルムが定義されたベクトル空間 V において、$x \in V$ と任意の実数 r があるとします。このとき $\|x - y\| < r$ となる y の集合を開球体 (open ball)、$\|x - y\| \leq r$ となる y の集合を閉球体 (closed ball) と呼びます (中心 x、半径 r の開球体、閉球体)。$r = 1$ のときを単位球 (unit ball) と言います。

- 内積

  ベクトル空間 V での内積 (inner product) は、$v, w \in V$ を数値 (実数か複素数)$< v, w >$ にする写像として定義され、$v, w, w_1, w_2 \in V, \ \alpha, \beta \in \mathrm{K}$ として

  - $< v, v > \geq 0$ （正値性）
  - $< v, v >= 0$ なら $v = 0$、$v = 0$ なら $< v, v >= 0$
  - $< v, \alpha w_1 + \beta w_2 >= \alpha < v, w_1 > + \beta < v, w_2 >$ (線形性)
  - $< v, w >= \overline{< w, v >}$ (対称性)

これらを満たすとされます。上についている「-」は複素共役で、実ベクトル空間の内積 ($< v, w >$ は実数) では複素共役を外せます。内積が定義されていると内積空間と呼ばれます。内積の表記には (,), (|), < | > といったものも使われます。

ここでは物理の慣習に従って複素共役を内積の左側に対して取りますが、数学の本では右側で取る慣習になっているので注意してください。

例えば、ユークリッド空間は R^n に内積を定義した空間で、大抵の場合で具体的な内積を

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathrm{R}^n)$$

と与えます。この内積は $x \cdot y$ と表記されるためにドット積 (dot product) と呼ばれます。このとき、$< x, x >$ は

$$< x, x >= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$